

## **ІМПЕДАНС ПЛАСКОЇ КОТУШКИ ІНДУКТИВНОСТІ**

***Закревський О.Ф., аспірант***

*Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут, м. Київ, Україна*

### **Вступ**

Розповсюдження ультразвукових технологій висуває ряд вимог до якості вимірювання та контролю основного параметру ультразвукового випромінювача (УЗВ) – амплітуди механічних коливань торця накладки УЗВ [1]. Застосування вихрострумowego методу обумовлено тим, що торець накладки УЗВ виготовляють зі сплавів металу. Котушки індуктивності вихрострумowego перетворювача (ВСП), які застосовують для вимірювання механічних коливань ультразвукового частотного діапазону, живлять змінним ВЧ струмом і виготовляють на друкованих платах, що технологічно [2].

### **Постановка задачі**

Проектуючи котушки індуктивності, наприклад, котушки ВСП, необхідно вибрати їх конструкцію та провести попередній розрахунок їх параметрів, згідно вимог технічного завдання. Точність розрахунку параметрів ВСП суттєво скорочує час затрачений на проектування вимірювального пристрою в цілому, тому постає проблема підвищення точності розрахунку котушок індуктивності ВСП, а саме таких її параметрів як активний та реактивний опір, добротність. Розрахунок перерахованих параметрів дозволяє в подальшому вибрати оптимальне схемо-технічне рішення вимірювального пристрою в цілому. Оскільки, наприклад, у випадку низько добротної котушки індуктивності доцільним представляється застосування мостової схеми у вимірювальному пристрої, у випадку високо добротної котушки – коливальний контур [3].

### **Огляд стану проблеми**

Пласку котушку індуктивності можна розрахувати аналітичним методом, який базується на теорії електромагнітного поля. Аналітичний розрахунок індуктивності представлено в літературних джерелах [4, 5], які дозволяють наближено розрахувати реактивний опір ВСП. Урахування впливу частоти змінного струму, що живить котушку ВСП, проводять наближено, розділяючи частотну область на три діапазони, в межах яких приймають певні припущення стосовно розподілу струму в поперечному перерізі провідника. Точність розрахунку за наближеними методами [5] складає 10% – 40%.

Розрахунок активного опору провідника, що живиться постійним струмом, визначається добутком довжини провідника на його питомий опір та

поділений на площу поперечного перерізу. У випадку змінного струму визначати активний опір за такою формулою не коректно, оскільки струм у поперечному перерізі розподілений не рівномірно.

Перетворення Ханкеля при розв'язуванні рівнянь Максвелла з метою визначення індуктивності котушки дозволяє отримати розв'язок, який представляє собою функцію Гріна, тобто розглядають випадок, коли виток із струмом представлено нескінченно тонким. Відомо, що магнітний потік прямо пропорційний струму, при цьому магнітне поле зовні провідника прямо пропорційне поверхневому струму провідника, а, отже, заміна провідника нескінченно тонким призводить до нескінченного зростання поверхневого струму  $i$ , як наслідок, отримуємо нескінченне значення магнітного поля тобто магнітного потоку, що за скінченного значення струму призводить до нескінченного значення індуктивності. Такий підхід використовують з метою визначення внесеного імпедансу котушки індуктивності електропровідним об'єктом контролю, що розміщено над котушкою [6, 7].

Застосування методу скінчених елементів, наприклад російського програмного продукту ELCUT, для визначення індуктивності витка із струмом теж неефективно, оскільки, щоб врахувати вплив поверхневого ефекту, крок сітки розбиття мусить бути досить малим та нерівномірним, особливо в області провідника, що призводить до невиправданих затрат машинного часу. Визначити активний опір, з огляду на вказані вище обмеження, теж складно.

Визначення повного імпедансу котушки індуктивності, як зазначено вище, представляє певний інтерес при виборі схемо-технічного рішення вимірювального пристрою в цілому, отже, постає завдання визначити повний імпеданс пласкої котушки індуктивності ВСП, що живиться змінним синусоїдальним струмом, оцінити її добротність.

### **Основна частина**

Застосування дискретного перетворення Ханкеля при розв'язуванні рівняння Гельмгольца потребує точно задати розподіл густини струму, як функції просторових координат провідника. Більш детальний аналіз рівняння електричного кола, яке містить джерело живлення та котушку індуктивності, вказує на те, що функція розподілу густини струму буде комплексною (паралельне з'єднання активного та реактивного елементів). Підставивши дійсну частину функції розподілу густини струму у рівняння Гельмгольца, визначасмо реактивний опір провідника, уявну частину – активний опір. Більш детальний аналіз вказує на те, що зміна частоти струму призводить до зміни розподілу активної та реактивної складової повного струму котушки індуктивності ВСП.

Зобразимо електричне коло так (рис. 1): до джерела напруги  $E$ , що змінюється в часі за синусоїдальним законом, підключено послідовно котушку індуктивності, модель якої представлено у вигляді послідовного

з'єднання активного опору та ідеальної котушки індуктивності. Оскільки опір такого кола комплексний, то й напруга, що падає на котушці, згідно закону Ома, теж комплексна функція  $\dot{U} = I_0(R + j\omega L)$ , де  $I_0 = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$

– повний струм кола;  $R$  – активний опір;  $L$  – індуктивність;  $\omega$  – кругова частота;  $j = \sqrt{-1}$ .

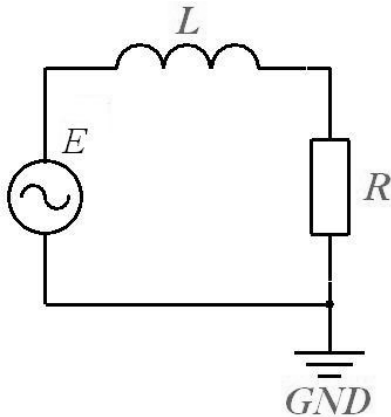


Рис. 1. Котушка індуктивності в електричному колі

Послідовне з'єднання активного та реактивного елементів, замість паралельного, дозволяє спростити подальші розрахунки, оскільки у такому разі струм буде однаковим в обох елементах, що дозволить розглянути процеси у кожному з них окремо.

Оскільки розглядається котушка індуктивності без осердя, тобто її можна вважати лінійною, то можна розглянути окремо розв'язок рівняння Гельмгольца для розрахунку індуктивності котушки та

окремо визначити її опір за функцією розподілу густини струму. Це дозволяє окремо визначити активний та реактивний опори.

Прийmemo функцію розподілу густини струму в провіднику аналогічно функції поширення пласкої змінної електромагнітної хвилі в електропровідному середовищі, що падає нормально до границі розділу не електропровідного та електропровідного середовищ, за координатою  $r$  так:

$$\dot{f}_\varphi(r, R_1, R_2) = \frac{\dot{\gamma} [1(r - R_1) - 1(r - R_2)] [e^{-\dot{\gamma}(r - R_1)} + e^{\dot{\gamma}(r - R_2)}]}{2 [1 - e^{\dot{\gamma}(R_1 - R_2)}]}, \quad (1)$$

де  $\dot{\gamma} = \sqrt{-j\omega\mu_B\mu_0\sigma_B}$ ;  $\mu_B$  – відносна магнітна проникність матеріалу витка зі струмом;  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  Гн/м;  $\sigma_B$  – питома електропровідність матеріалу витка;  $R_1$  – внутрішній радіус витка зі струмом;  $R_2$  – зовнішній радіус витка зі струмом.

Функція розподілу густини струму в провіднику за координатою  $z$  така ж, як і функція (1), де координату  $r$  слід замінити координатою  $z$  та  $R_1$  на  $h$ , а  $R_2$  на  $h + \Delta h$ , де  $\Delta h$  – товщина провідника за координатою  $z$ .

Таку функцію прийнято з огляду на зворотність явищ у природі, тобто змінне електромагнітне поле створює струм в електропровідному середовищі, а такий же змінний струм в електропровідному середовищі створює таке ж електромагнітне поле в не електропровідному.

Індуктивність витка у такому випадку записується так:

$$L = \pi \mu_1 \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{h-0.5\Delta_h}^{h+0.5\Delta_h} e^{\lambda_n z} \dot{f}_z(z, h-0.5\Delta_h, h+0.5\Delta_h) dz \times \int_{h-0.5\Delta_h}^{h+0.5\Delta_h} e^{-\lambda_n z} \dot{f}_z(z, h-0.5\Delta_h, h+0.5\Delta_h) dz \times \left( \int_{R_B-0.5\Delta_r}^{R_B+0.5\Delta_r} r_1 \dot{f}_r(r_1, R_B-0.5\Delta_r, R_B+0.5\Delta_r) J_1(\lambda_n r_1) dr_1 \right)^2 \right) \frac{1}{\lambda_n p^2 R_e^2 J_0^2(\lambda_n p R_e)} \quad (2)$$

Активний опір можна розрахувати згідно відомого розподілення густини струму в поперечному перерізі (1), розраховавши його еквівалентну площу так:

$$S_{\square} = \iint_{\square} |k_r f_r(r, r_1, r_2)| |k_z f_z(z, z_1, z_2)| dr dz$$

Активний опір розраховується як [8]:

$$R = \frac{\rho \ell}{S_{\square}} \quad (3)$$

де  $\rho$  – питомий опір провідника,  $\ell$  – довжина провідника.

Добротність котушки розраховується так [8]:

$$Q = \frac{\omega L(\omega)}{R(\omega)} \quad (4)$$

Отже, формули (2-4) дозволяють розрахувати як активний, так і реактивний опори котушки індуктивності ВСП, оцінити його добротність.

### Числові розрахунки

Оскільки актуальним є розробити математичну модель розрахунку повного імпедансу пласкої котушки індуктивності з прямокутним поперечним перерізом провідника, як функцію частоти струму живлення ВСП, запишемо імпеданс пласкої круглої котушки індуктивності з урахуванням (2) та (3) так:

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{2\pi\rho \left( NR_B + \Delta R_B \sum_{n=0}^{N-1} n \right)}{S_{\square}(\omega)} +$$

$$+ j\omega\pi\mu_1\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{h-0.5\Delta_h}^{h+0.5\Delta_h} e^{\lambda_n z} \dot{f}_z(z, h-0.5\Delta_h, h+0.5\Delta_h, \omega) dz \times \right. \quad (5)$$

$$\times \int_{h-0.5\Delta_h}^{h+0.5\Delta_h} e^{-\lambda_n z} \dot{f}_z(z, h-0.5\Delta_h, h+0.5\Delta_h, \omega) dz \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{N-1} \text{Int}_m(\omega) \left( \frac{\text{Int}_m(\omega) + \sum_{k=0}^{N-1} \text{Int}_k(\omega)}{\lambda_n \rho^2 R_B^2 J_0^2(\lambda_n \rho R_B)} \right)$$

$$\left. \text{Int}_v(\omega) = \int_{R_B + v\Delta R_B - 0.5\Delta_r}^{R_B + v\Delta R_B + 0.5\Delta_r} r_1 \dot{f}_r \left( \begin{matrix} r_1, R_B + (v+0.5)\Delta R_B - 0.5\Delta_r, \\ R_B + (v+0.5)\Delta R_B + 0.5\Delta_r, \omega \end{matrix} \right) \times J_1(\lambda_n r_1) dr_1 \right)$$

де  $v = m, k$ ;  $\Delta R_B$  – крок намотки котушки;  $N$  – кількість витків котушки.

Розрахуємо повний імпеданс плоскої котушки індуктивності згідно (5). Параметри котушки такі: внутрішній радіус  $R_B = 3,9$  мм, крок намотки  $\Delta R_B = 0,4$  мм, кількість витків  $N = 11$ , частота струму живлення 1 МГц.

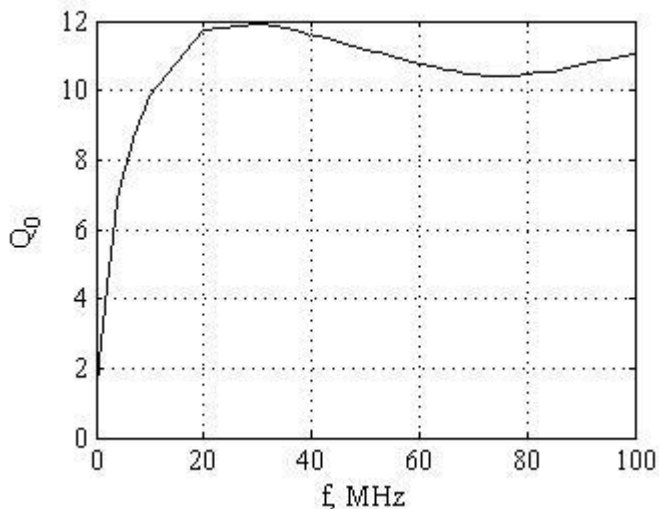


Рис. 2. Добротність котушки індуктивності, як функція частоти

З рис. 2, видно, що в низькочастотному діапазоні доцільно віддавати перевагу мостовій схемі вимірювального кола, на високих частотах – ко-

Повний імпеданс плоскої круглої котушки такий:  $\dot{Z} = 3.9 + j10.72$  Ом, а добротність, згідно (4), приймає значення  $Q \approx 2.75$ .

Для порівняння: імпеданс тієї ж котушки для постійного струму становить  $\dot{Z} = 1.46 + j0 \cdot 1.7071 \cdot 10^{-6}$  Ом

Наведемо функціональну залежність добротності розглянутої котушки індуктивності від частоти струму (рис. 2).

ливальному контуру. Характер поведінки залежності добротності котушки від частоти дозволяє спроектувати котушку оптимальну стосовно її добротності.

### **Висновки**

Аналіз залежності добротності котушки індуктивності від частоти струму показав, що в НЧ діапазоні доцільно застосовувати мостову схему вимірювального кола, а в ВЧ діапазоні – резонансний контур, що дозволяє спроектувати котушку індуктивності з постійною добротністю у певному частотному діапазоні.

У подальшому планується розробити аналітичну модель локального ВСП (котушка індуктивності з екрануючим кільцем) та провести теоретичне дослідження чутливості параметрів локального ВСП до вібрації електропровідної поверхні з метою раціонального вибору схемо-технічного рішення.

### **Література**

1. Leonov G. V. Automation of the amplitude measurement process of ultrasonic oscillatory systems irradiating surface. Biysk. / G. V. Leonov, V. N. Khmelev, I. I. Savin // 6<sup>th</sup> International siberian workshop and tutorial EDM'2005, session II, july 1 — 5, ERLAGOL, — P. 64 — 67.
2. Неразрушающий контроль и диагностика: Справочник / [ В. В. Клюев, Ф. Р. Соснин, А. В. Ковалев и др. ]; под ред. В. В. Клюева. 3-е изд., испр. и доп. — М.: Машиностроение, 2005. — 656 с. — ISBN 5-217-03300-2.
3. Юсеф Али Исследование и разработка микропроцессорного малогабаритного широкодиапазонного измерителя параметров комплексного сопротивления: дис. кандидата техн. наук: спец. 05.11.05 / Юсеф Али. — К. 1994. — 187 с.
4. Немцов М.В. Справочник по расчету параметров катушек индуктивности. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 192 с. — ISBN 5-283-00534-8.
5. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей: Справочная книга. — 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986. — 488 с.: ил.
6. Zakrevskiy O. F. Eddy-current probe for conductive objects displacement in space measurement. Scientific proceedings. — 2011, — № 1(121), — P. 28-31
7. Закревський О.Ф. Вплив скінченності габаритів об'єкту на внесений імпеданс вихрострумове сенсору. Матеріали конференції. 16 Міжнародна науково-технічна конференція «Електромагнітні та акустичні методи неруйнівного контролю матеріалів та виробів ЛЕОТЕСТ-2011», Львів — 2011, — С. 105-108.
8. Зернов Н.В. Теория радиотехнических цепей: Издание 2-е, переработ. и доп., / Зернов Н.В., Карпов В.Г. — Л., «Энергия», 1972. — 816 с.

*Закревський О.Ф. Імпеданс пласкої котушки індуктивності Наведено підхід для аналітичного розрахунку котушок індуктивності у вільному просторі. Як приклад розроблено математичну модель вихрострумове перетворювача у вигляді пласкої спіралеподібної котушки індуктивності у вільному просторі, яка дозволяє розрахувати повний імпеданс котушки з урахуванням скін-ефекту у провіднику, оцінити її добротність. Модель отримана застосуванням дискретного за просторовими координатами перетворення Ханкеля, що дозволило суттєво скоротити затрати машинного часу на розрахунок та припущеннями стосовно функції розподілу струму в провіднику. Функцію розподілу запропоновано з огляду на зворотність явищ у природі, тобто явище*

створення електромагнітним полем певного розподілу струму в електропровідному середовищі аналогічне явищу створення такого ж електромагнітного поля в не електропровідному середовищі таким же розподілом струму в електропровідному середовищі. Проведено розрахунок повного імпедансу та добротності котушки на частоті 1 МГц та, для порівняння, за постійного струму розраховано її опір.

**Ключові слова:** модель пласкої котушки індуктивності, повний імпеданс, добротність котушки, скін-ефект, дискретне перетворення Ханкеля.

*Закревский А.Ф. Импеданс плоской катушки индуктивности* Приведено подход для аналитического расчета катушек индуктивности в свободном пространстве. Как пример разработано математическую модель вихретокового преобразователя в виде плоской спиралеобразной катушки индуктивности в свободном пространстве, которая позволила рассчитать полный импеданс катушки с учетом скин-эффекта в проводнике. Модель получена благодаря использованию дискретного преобразования Ханкеля, что существенно сокращает машинное время, и предположения по поводу распределения тока в проводнике. Функцию распределения предложено исходя из обратимости явлений в природе, а именно, явление создания электромагнитным полем определенного распределения тока в электропроводящей среде аналогично явлению создания такого же электромагнитного поля в неэлектропроводящей среде таким же распределением тока в электропроводящей среде. Проведен расчет импеданса и добротности катушки на частоте 1 МГц и, для сравнения, при постоянном токе рассчитано ее сопротивление.

**Ключевые слова:** модель плоской катушки индуктивности, полный импеданс, добротность катушки, скин-эффект, дискретное преобразование Ханкеля.

*Zakrevskiy O.F. The flat inductor impedance.* The method proposed for calculation a coil in free space is presented. Eddy current transducer mathematical model as a spiral flat inductor in free space is designed as example. It allowed to calculate its impedance, considering skin effect in conductor and to estimate its quality. The model is obtained with assumptions about current distribution in a conductor using the discrete Hankel transform that reduces machine time significantly. Current distribution function is based on phenomena reversibility in nature, namely, electromagnetic field creates definite current distribution in conductive medium and such current distribution in conductive medium creates the same electromagnetic field in free space. Flat inductor impedance and coil quality at 1 MHz and DC are calculated.

**Keywords:** Flat inductor model, total impedance, coil quality, skin-effect, discrete Hankel transform.