УДК 621.372.061

ПРО ТОЧНІСТЬ ОЦІНКИ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ КІЛ ЧАСТОТНИМ СИМВОЛЬНИМ МЕТОДОМ[1]

Шаповалов Ю. І., д.т.н., професор, Мандзій Б .А., д.т.н., професор, Бачик Д. Р., к.т.н.
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна, dariya.smal@gmail.com

ABOUT THE ACCURACY OF ASSESSMENT OF STABILITY OF LINEAR PERIODICALLY TIME-VARIABLE CIRCUITS BY THE FREQUENCY SYMBOLIC METHOD

Yu. Shapovalov, Doctor of Engineering, Professor; B. Mandziy, Doctor of Engineering, Professor; D. Bachyk, Ph.D.
Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine,

Вступ

Оцінка стійкості є однією з найбільш складних задач аналізу та дослідження лінійних параметричних кіл (ЛПК), оскільки вона характеризується і складністю математичного апарату, і громіздкістю математичних обчислень [1]. У [2], на наш погляд, подано простий та ефективний спосіб оцінки стійкості ЛПК, який оснований на визначенні у комплексній площині $s = \sigma + j\omega$ коренів степеневого полінома знаменника $\Delta(s)$ нормальної передавальної функції інерційної частини такого кола [2]: якщо дійсні частини усіх коренів від'ємні, то коло асимптотично стійке, якщо ні – то нестійке. Такий підхід до оцінки стійкості реалізований у системі функцій MAOPCs [3, 4] і показав свою ефективність при аналізі ряду електронних пристроїв, що моделюються у вигляді ЛПК.

Як показала практика, адекватність оцінки стійкості, зокрема ЛПК, шляхом визначення коренів степеневих поліномів $\Delta(s)$ визначається точністю обчислення цих коренів. Однак, методи визначення коренів є виключно числові, тому й точність результату наперед не може бути прогнозована [5]. Крім того, перевірка точності визначення коренів підстановкою їх у відповідний поліном теж не завжди дієва, оскільки, своєю чергою, часто пов'язана з неточністю обчислень [5].

Метою даної роботи є дослідження точності (достовірності) оцінки стійкості ЛПК частотним символьним методом (ЧС-метод) [2] та визначення шляхів її забезпечення.

[1] Електронний варіант статті: http://radap.kpi.ua/radiotechnique/article/view/1068

Зазначимо, що ЧС-метод передбачає визначення передавальних функцій за їх апроксимації поліномами Фур'є. Тому можемо вважати, що похибка результатів визначається: а) кількістю перших k гармонічних складових, обраних до апроксимаційного виразу передавальної функції (за основною частотою Ω розкладу у ряд Фур'є, що визначається як найбільший спільний дільник з основних частот періодичної зміни параметричних елементів кола [2]); б) кількістю r десяткових цифр, узятих для представлення чисел, що визначає точність виконання арифметичних дій. Отже, точність оцінки стійкості кіл в нашому випадку визначається обраними значеннями величин k та r, зменшення яких може призвести до погіршення точності, а надмірне збільшення – до неоправданих затрат комп'ютерного часу та пам'яті. Останнє достатньо критичне, оскільки аналіз реальних параметричних пристроїв з декількома параметричними елементами ЧС-методом проводиться на граничних можливостях символьного процесора сучасних версій MATLAB, тому при надмірних значеннях k та r можливе виникнення некоректних ситуацій.

Дослідження одноконтурного параметричного підсилювача з рис.1

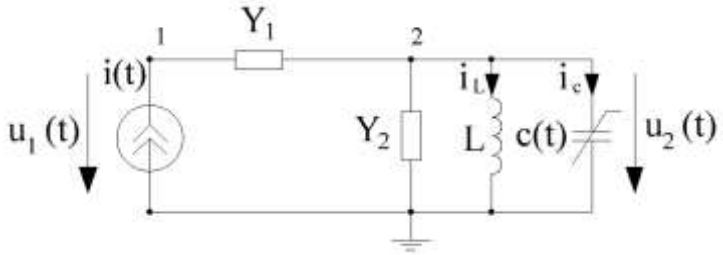


Рис. 1. Одноконтурний параметричний підсилювач

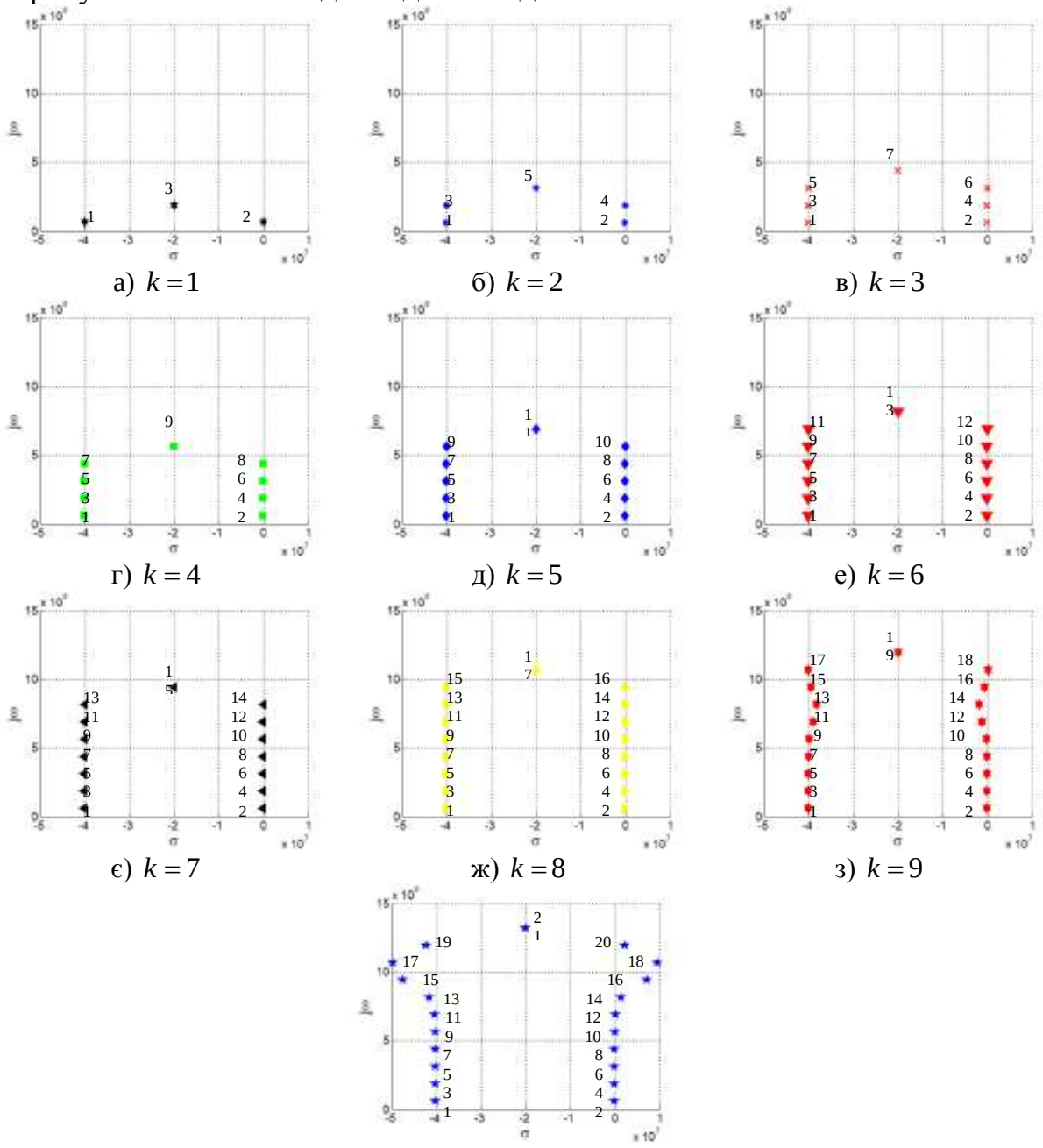
$$i(t)=I_m\cdot\cos(\omega_c\cdot t+\varphi),\ c(t)=c_0\cdot(1+m\cdot\cos(\Omega\cdot t)),$$

$$c_0=10\cdot10^{-12}\Phi,\ m_c=0.127,\ L=0.2533\cdot10^{-6}\,Гн,$$

$$\Omega=4\cdot\pi\cdot10^8\,рад/c,\ Y_1=0.25Cм,\ Y_2=0.0004Cм.$$

Для висвітлення можливої неточності обчислень коренів полінома $\Delta(s)$ глибину модуляції $m=0.127$ параметричної ємності підсилювача, що змінюється гармонічно, обрано близькою до межі нестійкості $(m=0.128)$. За ЧС-методом степінь полінома $\Delta(s)$, корені якого свідчать про стійкість/нестійкість кола, визначається за виразом $n\cdot(2k+1)$, де n – порядок диференціального рівняння, що описує дане коло. На рис. 2,а – і зображені на комплексній площині значення коренів, обчислені за допомогою системи функцій MAOPCs (спряжені корені в силу своєї симетричності на рис.2 та наступних рисунках не показані) при кількості гармонічних складових k у передавальних функціях від 1 до 10 та для $r=13$. Оскільки диференціальне рівняння підсилювача має другий порядок, то при кількості гармонічних складових $k=1,2,\ldots,10$ степінь полінома $\Delta(s)$ відповідно дорівнює 6,10,…,42. Кількість показаних на рис.2,а-і коренів є 3, 5,…, 21, відповідно. Для кількісного порівняння зміни їх числових значень при збільшенні k усі ці корені суміщені у одній комплексній площині, яка наведена на рис.3. За аналогією на рис.4 зображено корені, які обчислені для таких самих k,

однак при $r = 21$. Як бачимо, на рис.3 та рис. 4, деякі корені при зростанні k уточнюються суттєво і це помітно на рисунках, а деякі – незначно, тому на рисунках вони накладені один на одного.



а) $k = 1$ б) $k = 2$ в) $k = 3$

г) $k = 4$ д) $k = 5$ е) $k = 6$

є) $k = 7$ ж) $k = 8$ з) $k = 9$

і) $k = 10$

Рис. 2. Корені полінома $\Delta(s)$ схеми підсилювача з рис.1 при кількості гармонічних складових k у передавальних функціях від 1 до 10 та для $r = 13$

Аналіз отриманих результатів, представлених на рис.3 та рис.4, дає підставу зробити наступні висновки:

1. При зростанні кількості гармонічних складових k у поліномі $\Delta(s)$ кількість коренів у ньому, відповідно, теж зростає. Серед коренів полінома $\Delta(s)$ для певного значення k є корені, що мають місце для кількості $(k-1)$ гармонічних складових у цьому поліномі, а також і «нові» корені. Оскільки

при зростанні k поліном $\Delta(s)$ уточнюється, то й його корені, що отримуються при зростанні k, слід вважати більш точними.

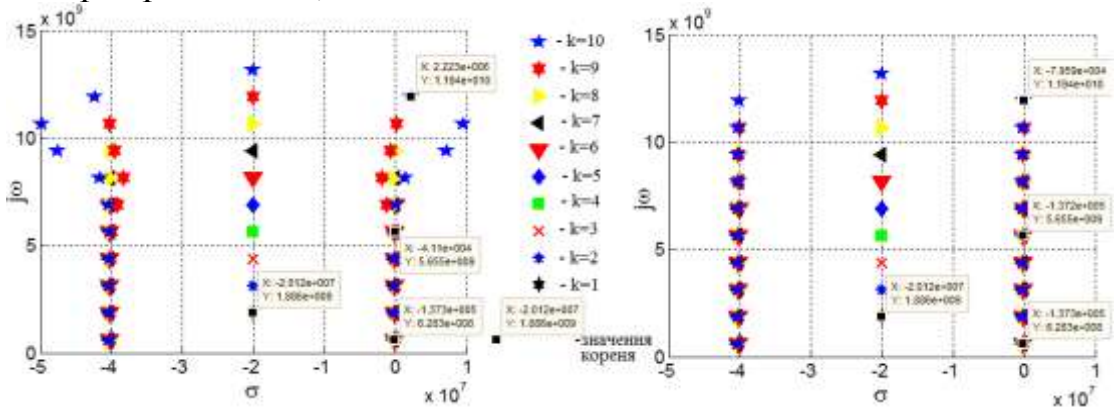


Рис. 3. Корені полінома $\Delta(s)$ схеми підсилювача з рис.1 для $r=13$

Рис. 4. Корені полінома $\Delta(s)$ схеми підсилювача з рис.1 для $r=21$

2. При степенях полінома $\Delta(s)$ від 6 до 30 (для значень k від 1 до7) його корені визначаються достатньо точно. Тому наступні корені візуально накладаються на попередні, що видно на рис.3 та рис.4. (символ ★ синього кольору переважає).

3. З рис.3 витікає, що при значеннях k від 7 до10, які відповідають степеням поліномів від 30 до 42, корені визначаються менш точно (вони не накладаються один на одного). Це означає, що зазначена вище похибка (б) починає переважати над похибкою (а), і обчислення слід повторити при збільшеному значенні r.

4. З рис.4 витікає, що при більшому значенні r розташування дійсних частин коренів поліномів вищих степенів візуально залишається таким же, як і для поліномів нижчих степенів. Це говорить про достатність значення r у таких обчисленнях.

5. Усі корені з рис.4 розташовані у лівій півплощині (при збільшеному масштабі це видно добре). Деякі корені з рис.3 розташовані у правій півплощині. Оскільки коло завідомо стійке, то це говорить про те, що недостатні значення r можуть призводити до хибних суджень про стійкість кола.

6. Корінь з найбільшим номером, обчислений для деякого значення k (3-й на рис.2,а, 5-й на рис.2,б, 7-й на рис.2,в, …, 21-й на рис.2,і) з дійсною частиною -20122271,0488294 при обчисленнях коренів для значення $k=k+1$ розщеплюється на два корені. У випадку точної апроксимації передавальних функцій k має значення ∞, і у цьому випадку корінь, що розщеплюється, буде відсутній. Тому вважаємо наявність цього кореня результатом неточної апроксимації, і у оцінці стійкості кола його не враховуємо.

7. Аналіз числових значень коренів показує, що їх точність тим більша, чим менший номер кореня. Вважаємо, що для заданого k найбільш точно

пораховані перші n коренів полінома $\Delta(s)$. А це корені 1 та 2. Своєю чергою, точність коренів 1 та 2 тим більша, чим для більшого значення k вони обчислені. Тому для оцінки стійкості обираємо корені 1 та 2, обчислені для максимального значення k, тобто для $k=10$ з рис.2і.

8. Дійсні частини 1-го та 2-го коренів, за якими й оцінюємо стійкість кола, на рис.2,і та рис.3 прямують до двох значень: -40189284,9952811 та -137250,373892005 при $r=13$ та на рис.4 до: -40189285,0066831 та -137250,362447517 при $r=21$.

9. Прийнявши з досвіду, що MATLAB визначає корені поліномів до 30 степеня достатньо точно, отримуємо практичну залежність для вибору значення r: якщо $n\cdot(2k+1)\le 30$, то $r=13$, якщо $n\cdot(2k+1)>30$, то $r=21$. Тому остаточно для оцінки стійкості обираємо корені 1 та 2, визначені при $k=10$ та $r=21$.

Проведені експерименти з іншими колами дозволили зробити висновок про те, що для деякого k кількість коренів, які розщеплюються при $k=k+1$ і які не розглядаємо при оцінці стійкості, дорівнює n (з врахуванням спряжених коренів). У нашому випадку $n=2$, тому й на рис.2,а-і розщепляється завжди тільки один корінь.

Питання про те, чому відповідні корені розщеплюються на два корені (а не на іншу кількість), нами не досліджувалось і є предметом наступних досліджень.

Дослідження двоконтурного параметричного підсилювача з рис.5

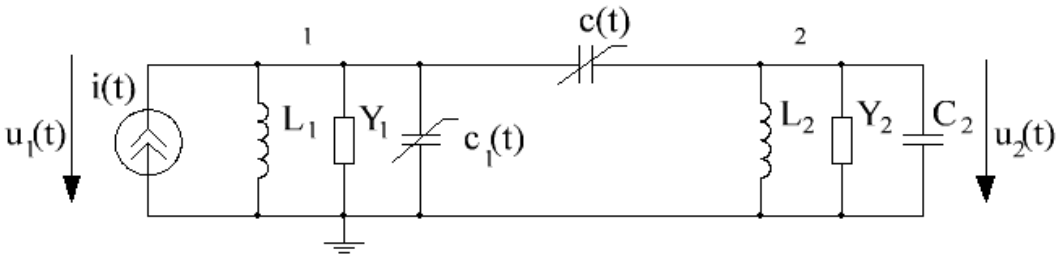


Рис. 5. Двоконтурний параметричний підсилювач

$$i(t)=I_m\cdot\cos(\omega_c\cdot t+\varphi),\ c(t)=c_0\cdot(1+m_{c0}\cdot\cos(\Omega\cdot t)),c_1(t)=c_{01}\cdot(1+m_{c01}\cdot\cos(\Omega\cdot t)),c_0=1n\Phi;$$

$$m_{c0}=m_{c1}=0.03;\Omega=2\cdot\pi\cdot 298.573\cdot 10^6\ рад/с;I_m=0.1mA;s=j\omega_c;\omega_c=2\cdot\pi\cdot 10^8\ рад/с;$$

$$\varphi=\pi/4;Y_1=Y_2=0.0001Cm;c_1=C_2=68n\Phi;L_1=36.70795нГн;L_2=9.312609нГн.$$

На рис. 6,а – г наведені корені полінома $\Delta(s)$ для підсилювача з рис. 5 [3], отримані за допомогою системи функцій MAOPCs при кількості гармонічних складових k у передавальних функціях від 1 до 4 та для $r=21$. Значення r диктується тим, що порядок диференціального рівняння підсилювача $n=4$ та добуток $n\cdot(2k+1)>30$. Степені полінома $\Delta(s)$ для $k=1,2,3,4$ дорівнюють 12, 20, 28 та 36, відповідно. Тому на рис.6,а – г без спряжених показано 6, 10,14 та 18 пронумерованих коренів. На рис.6,д

та рис.6,е показані два фрагменти з рис.6,г (що виділені прямокутниками однакового кольору) у збільшеному масштабі.

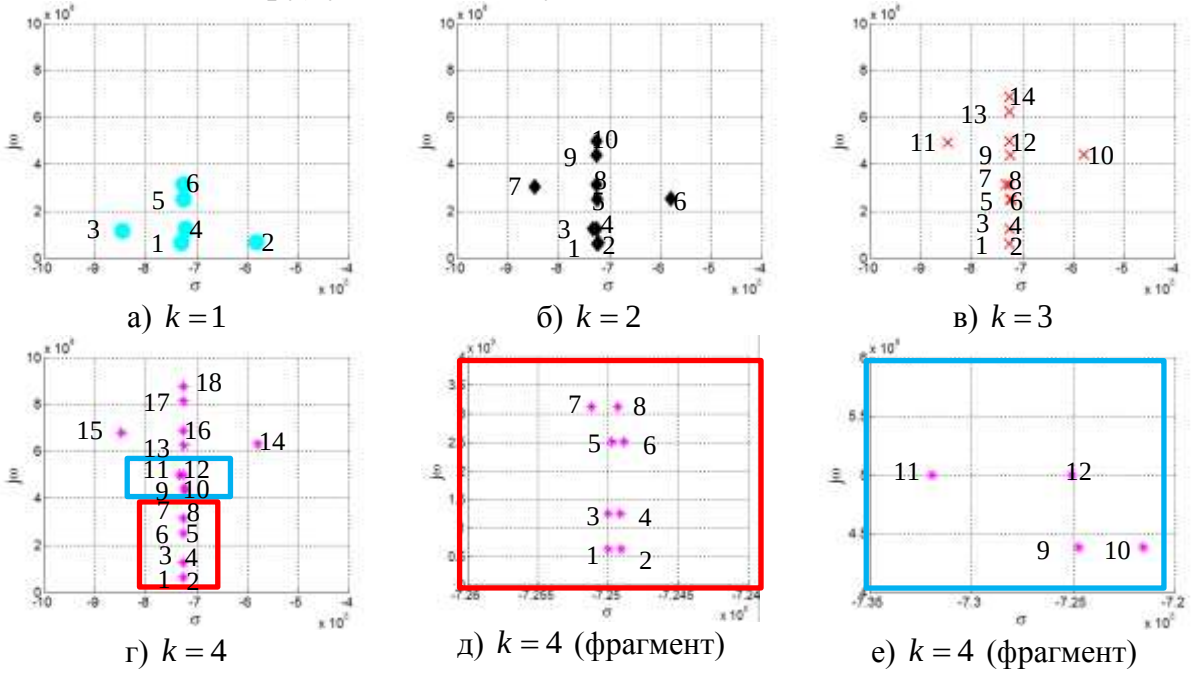


Рис. 6. Корені полінома $\Delta(s)$ схеми підсилювача з рис.5 при кількості гармонічних складових k у передавальних функціях від 1 до 4 для $r=21$

На рис. 7 корені з рис. 6,а – г зведені у одну комплексну площину. На рис.8 – те саме, але, для порівняння, обчислення проведені для значення $r=13$, яке є недостатнім з точки зору точності обчислень. Останнє й витікає з рис.8. Значення глибин модуляції m_{c0}, m_{c1} параметричних ємностей $c(t)$ та $c_1(t)$ підсилювача з рис. 5 у обчисленнях прийняті однаковими $m_{c0}=m_{c01}=0.03$ і такими, що забезпечують режим роботи підсилювача стійкий і далекий від межі нестійкості. За аналогією з одноконтурним підсилювачем, деякі корені двоконтурного при зростанні k теж уточнюються незначно, і на рис. 7 візуально майже не змінюють своє розташування. Тому такі корені є накладені один на одного, і на рис. 7 бачимо корені, що визначені останніми.

З рис. 7 витікають висновки, які є аналогічними до висновків, наведених для одноконтурного підсилювача (рис. 3 та рис. 4):

– згідно висновків 6 – 9 з дослідження одноконтурного підсилювача, корені 17 та 18, (з рис.6,г з дійсними частинами -7.251437468830340e+05 та -7.248923489026104e+05) з оцінки стійкості виключаються. Стійкість слід оцінювати тільки по перших n коренях 1, 2, 3 та 4;

– дійсні частини коренів 1, 2, 3 та 4 на рис. 7 прямують до двох значень -7.249991486184138e+05 та -7.249066498046274e+05 ($r=21$), які й обираємо для оцінки стійкості, і на рис.8 прямують до неточних двох значень: 7.249067274239230e+05 та -7.249990710934853e+05 ($r=13$);

– як витікає з рис. 8 недостатні значення r можуть призводити до хибних суджень про стійкість кола.

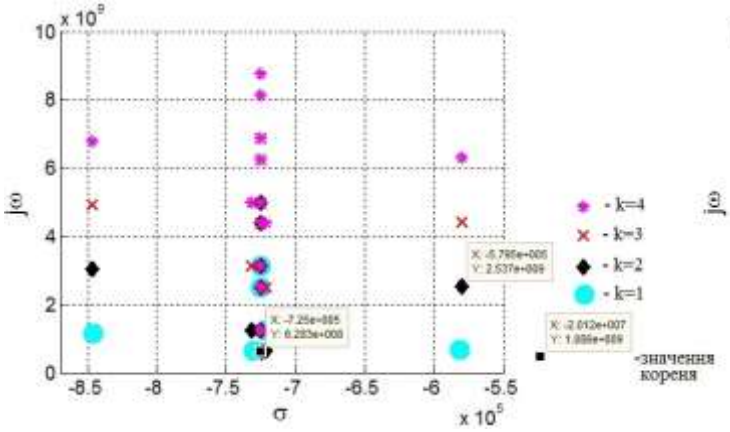


Рис. 7. Корені полінома $\Delta(s)$ схеми підсилювача з рис.5 для $r = 21$

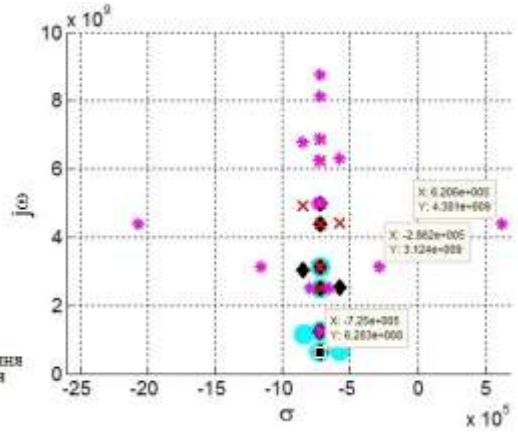
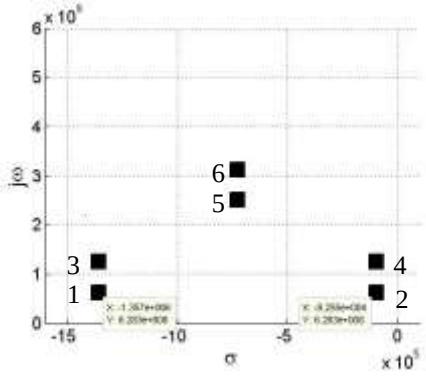


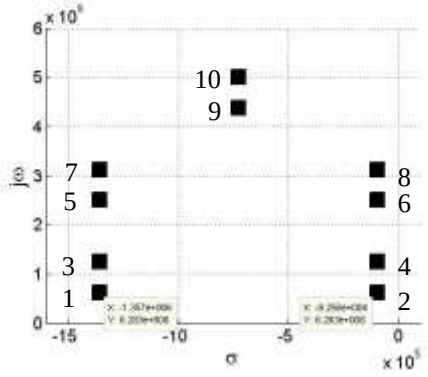
Рис. 8. Корені полінома $\Delta(s)$ схеми підсилювача з рис.5 для $r = 13$

Дослідження підсилювача з рис. 5 при $c_1(t) = const$

На рис. 9 наведено визначені за системою MAOPCs корені полінома $\Delta(s)$ кола з рис. 5 при $c_1(t) = const$.



а) $k = 1$



б) $k = 2$

Рис. 9. Корені полінома $\Delta(s)$ схеми підсилювача з рис.5 при різній кількості гармонічних складових та $m = 0.2$ для $r = 13$

Згідно висновків 6 – 9 з дослідження одноконтурного підсилювача, корені 9 та 10, (з рис.9,б з дійсними частинами -7.250499542609729e+05та -7.245387804693191e+05) з оцінки стійкості виключаються. Стійкість слід оцінювати тільки по коренях 1, 2, 3 та 4;

З проведених експериментів випливає наступне: оскільки дійсні частини коренів 1, 2, 3, та 4 при $k = 2$ дорівнюють дійсним частинам коренів 1, 2, 3 та 4 при $k = 3$ то робимо висновок про те, що двох гармонічних складових у поліномі $\Delta(s)$ з точки зору точності обчислень, тобто $k = 2$, достатньо. Користуючись наведеною раніше практичною залежністю для вибору значення r: $n \cdot (2k+1) \le 30$, визначаємо, що для забезпечення задовіль-

ної точності обчислень у цьому випадку достатньо обрати $r=13$.

З рис. 9,б витікає висновок, який є аналогічним до висновків, наведених для одноконтурного підсилювача та двоконтурного підсилювача з двома параметричними елементами:

– дійсні частини коренів 1 та 3 на рис. 9,а та рис. 9,б прямують до значення -1.357034727449057e+06, а дійсні частини коренів 2 та 4 на рис. 9,а та рис. 9,б прямують до значення -9.255676651636571e+04 та ($r=13$), які й обираємо для оцінки стійкості.

На рис.10 представлені траєкторії руху коренів полінома $\Delta(s)$ при $k=2$ та зміні $m=0.2:0.01:0.25$ для $r=13$.

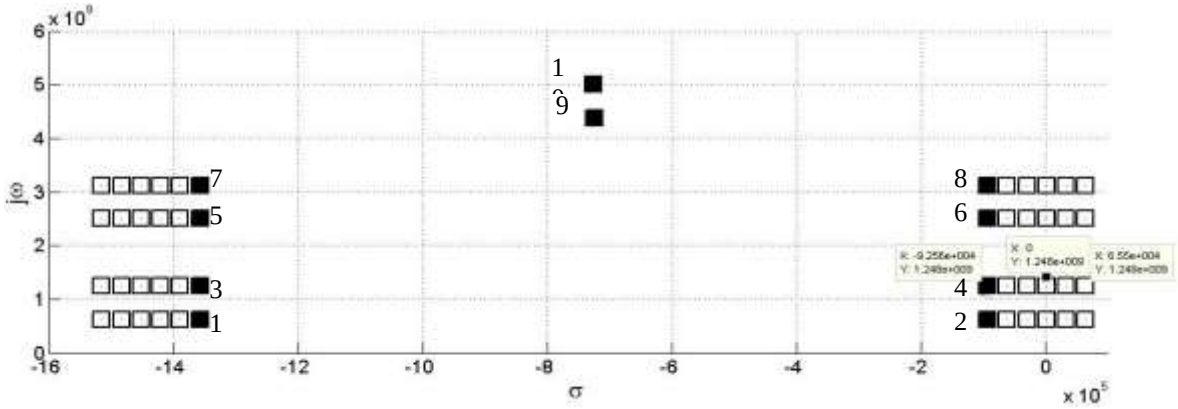


Рис. 10. Корені полінома $\Delta(s)$ схеми підсилювача з рис.5 при $k=2$ та зміні $m=0.2:0.01:0.25$ для $r=13$. Чорним кольором позначені корені для $m=0.2$

Як витікає з рис. 10, корені 2 та 4 при значенні $m=0.2292$ мають ще від'ємні дійсні частини, а при значенні $m=0.2293$ ці корені вже мають додатні дійсні частини. Дійсні частини коренів 1 та 3 у цьому випадку від'ємні. Це означає, що підсилювач з рис. 5 при $c_1(t)=const$ між значеннями $m=0.2292$ та $m=0.2293$ втрачає стійкість і переходить у область нестійкості. Ці дані повністю збігаються з результатами, отриманими за програмою Micro-Cap.

Висновки

Для забезпечення достовірності оцінки стійкості ЛПК на підставі ЧС-методу необхідно аргументовано вибирати кількість k гармонічних складових при апроксимації передавальних функцій поліномами Фур'є та кількість r цифр, узятих для представлення чисел, що визначає точність виконання арифметичних дій. В даній роботі на прикладах схем одноконтурного та двоконтурного параметричних підсилювачів досліджено поведінку коренів полінома $\Delta(s)$ залежно від параметрів k та r і вироблено рекомендації стосовно їх вибору. Обчислювальні експерименти підтверджують: а) високу ефективність оцінки стійкості лінійних параметричних кіл ЧС-методом; б) те, що цей метод на сьогоднішній день є одним з кращих відомих методів такої оцінки.

Перелік посилань

1. Бирюк Н.Д. Основы теории параметрических радиоцепей: монография/ Н.Д. Бирюк, В.В. Юргелас. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – 346 с.

2. Шаповалов Ю.І. Символьний аналіз лінійних електричних кіл у частотній області. Постійні та змінні параметри: монографія / Ю.І. Шаповалов. - Львів: Видавництво НУ «Львівська політехніка», 2014. – 324 с.

3. Шаповалов Ю.І. Система MAOPCs для багатоваріантного аналізу та оптимізації лінійних параметричних кіл у середовищі MATLAB / Ю.І.Шаповалов, Д.Р.Бачик, С.В. Маньковський // Вісн. НУ «Львівська політехніка». Радіоелектроніка та телекомунікації – 2013. – №766. – С.28-34. http://radiotel.lp.edu.ua/images/PDF_2013/04.pdf

4. Бачик Д.Р. Засоби комп'ютерного схемотехнічного моделювання параметричних радіотехнічних вузлів на основі частотного символьного методу: автореф. дис. на здобуття наукового ступеня канд. техн. наук: спец. 05.12.17. «Радіотехнічні та телевізійні системи» / Бачик Дарія Романівна; НУ «Львівська політехніка». – Львів, 2014. – 20с. http://ena.lp.edu.ua:8080/bitstream/ntb/24237/1/avt_Bachyk.pdf

5. Вычисления и приближение данных в MATLAB/ Поиск всех корней полиномов. [Електронний ресурс]. URL: – http://matlab.exponenta.ru/spline/book1/16.php

References

1. Biryuk N.D. Osnovy teorii parametricheskikh radiotsepei: monografiya/ N.D. Biryuk, V.V. Yurgelas. – Voronezh: Izdatel'sko-poligraficheskii tsentr Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta, 2012. – 346 s.

2. Shapovalov Yu.I. Symvolnyi analiz liniinykh elektrychnykh kil u chastotnii oblasti. Postiini ta zminni parametry. Lviv: Vydavnytstvo NU «Lvivska politekhnika», 2014. – 324 c.

3. Shapovalov Yu.I. Cystema MAOPCs dlia bahatovariantnoho analizu ta optymizatsii liniinykh parametrychnykh kil u seredovyshchi MATLAB / Yu.I.Shapovalov, D.R.Bachyk, S.V. Mankovskyi // Visn. NU «Lvivska politekhnika». Radioelektronika ta telekomunikatsii – 2013. – №766. – S.28-34.

4. Bachyk D.R. Zasoby kompiuternoho skhemotekhnichnoho modeliuvannia parametrychnykh radiotekhnichnykh vuzliv na osnovi chastotnoho symvolnoho metodu: avtoref. dys. na zdobuttia naukovoho stupenia kand. tekhn. nauk: spets. 05.12.17. «Radiotekhnichni ta televiziini systemy» / Bachyk Dariia Romanivna; NU «Lvivska politekhnika». – Lviv, 2014. – 20s.

5. Vychisleniya i priblizhenie dannykh v MATLAB/ Poisk vsekh kornei polinomov. [Elektronnii resurs]. URL: – http://matlab.exponenta.ru/spline/book1/16.php

Шаповалов Ю. І., Мандзій Б. А., Бачик Д. Р. ***Про точність оцінки стійкості лінійних параметричних кіл частотним символьним методом****. В роботі розглянуто питання дослідження точності оцінки стійкості лінійних параметричних кіл частотним символьним методом та визначення шляхів її забезпечення. Оцінка зводиться до обчислення дійсних частин коренів знаменника нормальної передавальної функції інерційної частини лінійного параметричного кола. В даній роботі на прикладах схем одноконтурного та двоконтурного параметричних підсилювачів досліджено поведінку коренів знаменника нормальної передавальної функції залежно від кількості врахованих гармонічних складових та десяткових цифр(узятих для представлення чисел) і вироблено рекомендації стосовно їх вибору.*

Ключові слова: *лінійні параметричні кола, частотний символьний метод, стійкість.*

Шаповалов Ю. И., Мандзий Б. А., Бачик Д. Р. ***О точности оценки устойчивости линейных параметрических цепей частотным символьным методом****. В работе рассмотрены вопросы исследования точности оценки устойчивости линейных параметрических цепей частотным символьным методом и определение путей ее обеспечения. Оценка устойчивости сводится к вычислению действительных частей корней знаменателя нормальной передаточной функции инерционной части линейной параметрической цепи. В данной работе на примерах схем одноконтурного и двухконтурного параметрических усилителей исследовано поведение корней знаменателя нормальной передаточной функции в зависимости от количества учитываемых гармонических составляющих и десятичных цифр (взятых для представления чисел) и выработаны рекомендации относительно их выбора.*

Ключевые слова*: линейные параметрические цепи, частотный символьный метод, устойчивость.*

Y. Shapovalov, B. Mandziy, D. Bachyk. ***About the accuracy of assessment of stability of linear periodically time-variable circuits by the frequency symbolic method.***

Introduction. Researching the accuracy (reliability) assessment of the stability of linear periodically time-variable circuits by the frequency symbolic method and determining the ways of ensuring it are considered in the paper. Assessment of stability is reduced to calculating the real parts of the denominator roots of the normal transfer function of a parametric linear circuit inertial part.

Main part. It should be noted that the frequency symbolic method involves determining the transfer functions of their approximation by the Fourier polynomial. Therefore, we can assume that the error of the results are determined by: a) the number of the first k harmonic components selected to expression approximating of the transfer function; b) the number of decimal digits r taken for representing numbers that defines accuracy of performance of arithmetic actions. Thus, the accuracy of estimating stability of circles in our case is determined by selected values of k and r, a decrease which can lead to deterioration of accuracy, but excessive increase - to unjustified costs of computer time and memory. Last is enough critical, since the analysis of real parametric devices with several parametric elements by the frequency symbolic method is carried on critical opportunities of symbolic processor of the modern versions of MATLAB, so at excess value of k and r possible occurrence of incorrect situations.

Conclusions. To ensure the reliability of assessment of linear periodically time-variable circuits stability based on the frequency symbolic method necessary reasoned to choose the number of harmonic components in the approximation of the transfer functions by the Fourier polynomial and the number of digits taken for representing numbers that defines accuracy of performance of arithmetic actions.

Keywords: *LPTV circuits, frequency symbolic method, stability.*