

УДК 537.311.6:621.372

**ФОРМУВАННЯ ЗОННОЇ ДІАГРАМИ
ФОТОННИХ ТА ФОНОННИХ КРИСТАЛІВ¹**

*Гіндікіна М. А., магістрантка; Зінгер Я. Л., аспірантка;
Нелін Є. А., д.т.н., професор
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна,
mashenkagin@gmail.com*

ZONE DIAGRAM FORMATION OF PHOTON AND PHONON CRYSTALS

*Gindikina M. A., Undergraduate student; Zinger Y. L., Postgraduate student,
Nelin E. A., Doctor of Engineering, Professor
National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine,
mashenkagin@gmail.com*

Вступ

Фотонні кристали — структури з періодичною зміною показника заломлення. В фонових кристалах періодично змінюються пружні хвильові властивості. Фотонні і фонові кристали (Ф(н)К) відносяться до кристало-подібних структур (КС), що, як і кристали, характеризуються зонними спектральними властивостями. В ідеальних КС в дозволених зонах коефіцієнт проходження дорівнює одиниці, а в заборонених (для необмежених КС) — нулю, що забезпечує максимальну різницю високого і низького рівнів при керуванні сигналами. Ф(н)К є основою новітніх різноманітних оптичних [1, 2] і акустичних [3, 4] пристроїв обробки сигналів.

Принципові особливості КС виявляються в одновимірних структурах, які традиційно моделюють методом матриці переносу [5]. Підхід на основі хвильового імпедансу спрощує моделювання, наповнює його фізичним змістом, дозволяє отримати у багатьох випадках аналітичне рішення [6].

Аналогічно тому, як хвильовий імпеданс середовища характеризує реакцію середовища на хвильове збурювання, вхідний імпеданс структури характеризує реакцію структури на хвильове збурювання. На відміну від S-параметрів вхідні імпедансні характеристики не залежать від середовища на вході структури, що розширює можливості її аналізу і синтезу. Для КС ці характеристики характеризують зонні властивості.

Метою статті є дослідження вхідних імпедансних характеристик та особливостей формування зонних діаграм Ф(н)К.

¹ <http://radap.kpi.ua/radiotechnique/article/view/1099>

Імпедансна модель та властивості необмеженої кристалоподібної структури

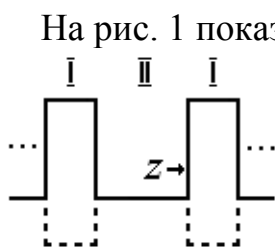


Рис. 1. Імпедансна залежність необмеженої КС.

На рис. 1 показано імпедансну залежність необмеженої одновимірної КС для хвиль різної природи, утворену шарами I і II, що чергуються; z — вхідний імпеданс у прямому напрямку на правій межі між шарами II і I. Для спрощення перетворень імпеданси нормовано до імпедансу шару II. Позначимо параметри шарів I і II індексами a і b . У $\Phi(n)K$ хвильові імпеданси шарів дійсні. На рис. 1 суцільна лінія відповідає імпедансній залежності при імпедансі шару I $Z_a > 1$, а штрихова — при $Z_a < 1$.

Згідно [6]

$$z = \sqrt{\psi} + i\eta, \tag{1}$$

$$\psi = 1 - \eta^2 - 2\eta B^{-1}, \quad \eta = \frac{1 - Z_a^2}{2(B^{-1} + Z_a A^{-1})},$$

де $A = \text{tg}\varphi_a$; $B = \text{tg}\varphi_b$, $\varphi_a = k_a a$, $\varphi_b = k_b b$ — фазові набіги хвилі у шарах I і II, k — хвильове число, a і b — товщини шарів I і II відповідно.

В [6] звернуто увагу на такі взаємозв'язки фізичних властивостей КС і математичних особливостей виразу (1): 1) дійсна частина $\text{Re } z = \sqrt{\psi}$; в заборонених зонах $\psi < 0$ і вхідний імпеданс z уявний; 2) в резонаторній порожнині, що відповідає шару II, умови резонансу виконуються у всій дозволений зоні, в результаті падаюча хвиля резонансно проходить крізь КС.

Доповнимо цей перелік. Пересвідчимося, що: 1) в заборонених зонах вхідний імпеданс у будь-якій точці КС уявний; 2) в дозволених зонах коефіцієнт проходження $T = 1$, а в заборонених — $T = 0$.

Вхідний імпеданс відрізка лінії передачі довжиною x з хвильовим імпедансом Z і імпедансом навантаження z визначається формулою

$$Z_x = Z \frac{z - iZ \text{tg}kx}{Z - iz \text{tg}kx}. \tag{2}$$

При дійсному Z і уявному z величина Z_x уявна. Оскільки в заборонених зонах вхідний імпеданс z уявний, вхідний імпеданс у будь-якій точці КС уявний, що відповідає реактивному хвильовому середовищу. У нескінченному реактивному хвильовому середовищі амплітуда хвилі реактивно загасає до нуля, так що $T = 0$.

Коефіцієнт відбиття визначається співвідношенням

$$R = \frac{z - z'}{z + z'},$$

де z' — вхідний імпеданс в зворотному напрямку на правій межі між ша-

рами II і I. Виходячи з (2) і враховуючи, що вхідні імпеданси у прямому і зворотному напрямках комплексно спряжені, маємо

$$z' = \frac{z^* + iB}{1 + iz^*B},$$

де знак «*» означає комплексне спряження. В результаті перетворень при $\psi \geq 0$ (в дозволених зонах) отримаємо $z = z'$, що відповідає $R = 0$ і, як наслідок, $T = 1$. Таким чином, в результаті взаємодії полів падаючої та відбитої хвиль КС повністю прозора в дозволених зонах і повністю непрозора в заборонених.

Імпедансні характеристики необмежених фотонного та фононного кристалів

На рис. 2 приведено характеристики активної складової вхідного імпедансу необмежених Ф(н)К, згідно (1), в залежності від відношення $p = \varphi_a / \varphi_b$; $\varphi = \varphi_a + \varphi_b$ — фазовий набіг хвилі на період КС. Вказані значення p відповідають таким товщинам шарів: $a = \lambda_a / 4$, $b = \lambda_b / 4$; $a = \lambda_a / 6$, $b = \lambda_b / 3$; $a = \lambda_a / 8$, $b = 3\lambda_b / 8$, де λ_a і λ_b — довжини хвилі на середній частоті першої забороненої зони Ф(н)К при $p = 1$.

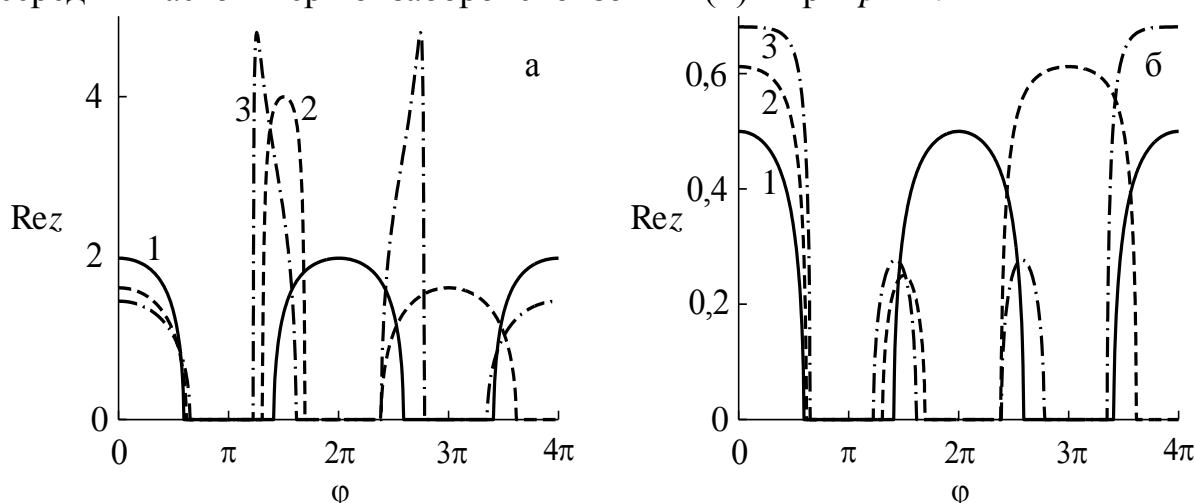


Рис. 2. Залежності активної складової вхідного імпедансу необмежених Ф(н)К при $p=1, 1/2$ і $1/3$ (відповідно 1, 2 і 3): а — $Z_a = 4$; б — $Z_a = 0,25$.

Залежність активної складової вхідного імпедансу являє собою чергування смуг, в яких $\text{Re}z > 0$ і $\text{Re}z = 0$. Ці смуги відповідають дозволеним і забороненим зонам. Відношення p визначає особливості розташування зон і їх ширину. Ф(н)К з чвертьхвильовими шарами мають найширші заборонені зони, причому внаслідок взаємної компенсації хвиль, відбитих межами шару, заборонені зони з парними номерами відсутні. Оскільки такі Ф(н)К використовують найчастіше, у подальшому розглянемо саме їх характеристики.

На рис. 3 наведено залежності активної та реактивної складових вхід-

ного імпедансу необмежених $\Phi(n)K$ згідно (1). Знак реактивної складової в (1) відповідає знаку «+» фази у фазовому множнику прямої хвилі $\exp(ikx)$, прийнятому в квантовій механіці. У реактивному середовищі (наприклад, в забороненій зоні КС) $k = i|k|$ і $\exp(ikx) = \exp(-|k|x)$ — амплітуда прямої хвилі експоненційно зменшується. Оскільки в теорії довгих ліній у фази прямої хвилі знак «-», при аналізі характеру реактивності реактивної складової вхідного імпедансу її знак необхідно змінити на протилежний.

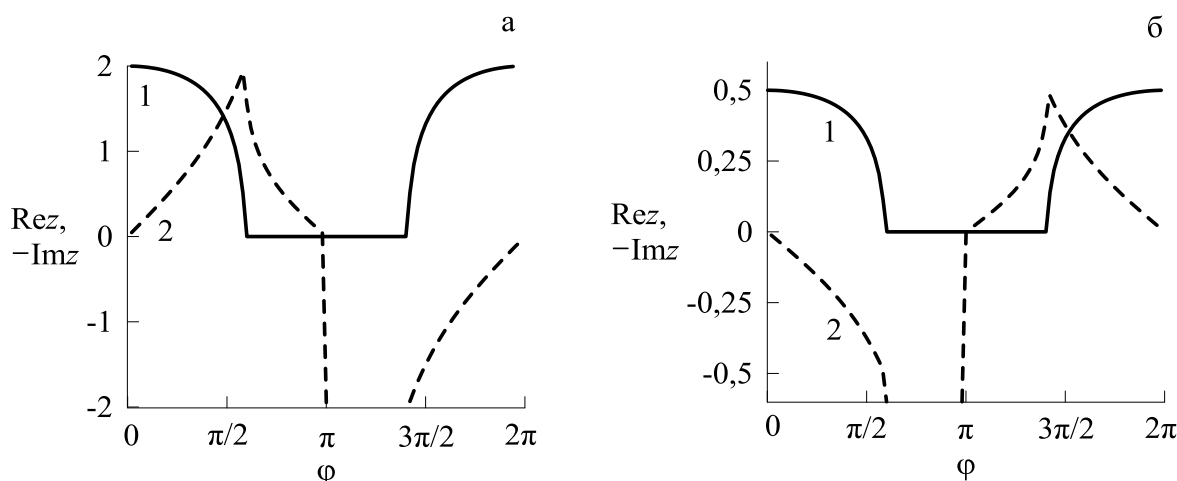


Рис. 3. Залежності активної (1) та реактивної (2) складових вхідного імпедансу необмежених $\Phi(n)K$: а — $Z_a = 4$; б — $Z_a = 0,25$.

Як бачимо з залежностей на рис. 3, при $Z_a > 1$ областям зменшення і збільшення активної складової вхідного імпедансу відповідають індуктивна і ємнісна за характером області реактивної складової, а при $Z_a < 1$ — навпаки. Особливості формування такої відповідності дозволяють дослідити вхідні імпедансні характеристики обмежених $\Phi(n)K$.

Вхідні імпедансні характеристики обмежених фотонного та фононного кристалів

На рис. 4 приведено залежності активної та реактивної складових вхідного імпедансу обмежених $\Phi(n)K$. Для порівняння штрих-пунктирною лінією показано залежності для необмежених $\Phi(n)K$. В дозволених зонах активна і реактивна складові вхідного імпедансу обмежених $\Phi(n)K$ пульсують відносно залежностей необмежених $\Phi(n)K$. Границі зон необмежених і обмежених $\Phi(n)K$ добре узгоджуються.

Як і слід було очікувати, при $Z_a > 1$ поблизу значення $\varphi = \pi$ відбувається вузькосмугова високоімпедансна трансформація хвильового імпедансу середовища, розміщеного на виході $\Phi(n)K$; при $Z_a < 1$ трансформація низькоімпедансна. Екстремальне значення активної складової дорівнює Z_a^N , що при $N = 4$, $Z_a = 4$ і $0,25$ складає відповідно 6554 і $1,53 \cdot 10^{-5}$.

На рис. 5 розглянуто фрагмент залежностей рис. 4, а. Звернемо увагу

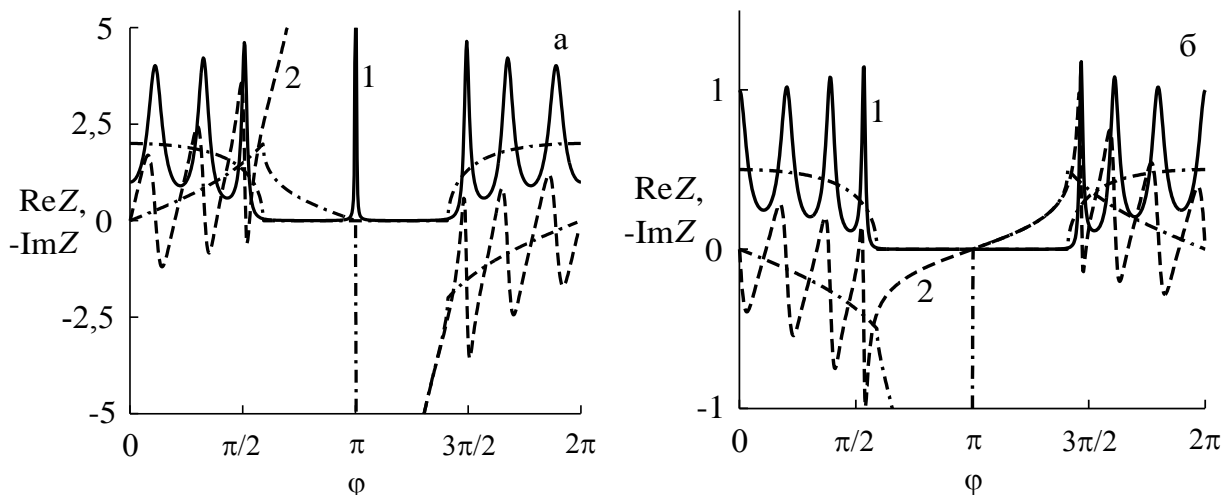


Рис. 4. Залежності активної (1) та реактивної (2) складових вхідного імпедансу обмежених $\Phi(n)K$: а — $Z_a = 4$; б — $Z_a = 0,25$, число шарів $IN = 4$.

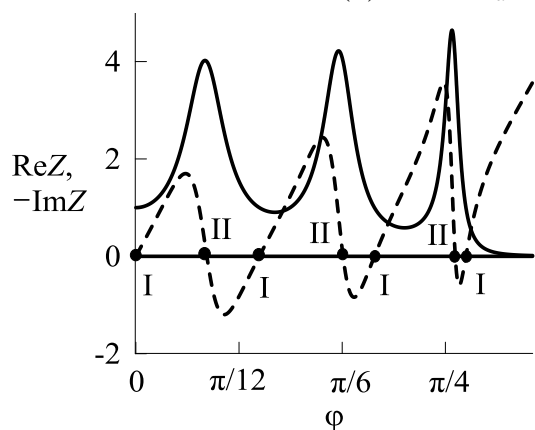


Рис. 5. Фрагмент залежностей рис. 4, а.

на точки залежностей, в яких $\text{Im}Z = 0$. Ці точки позначено як I і II.

При виконанні умови

$$\text{Re}Z = Z_c, \quad (3)$$

де Z_c — хвильовий імпеданс середовища на вході $\Phi(n)K$, $\Phi(n)K$ узгоджені з цим середовищем. Виконання умови (3) для точок I і II відповідає резонансному проходженню хвиль крізь $\Phi(n)K$, причому в точках I $\text{Re}Z = 1$, а в точках II $\text{Re}Z \neq 1$. Таким

чином, резонансне проходження в точках I відбувається без трансформації імпедансу середовища на виході $\Phi(n)K$, а точках II — з трансформацією.

Характеристики коефіцієнта відбиття фотонного та фононного кристалів

На рис. 6 приведено залежності коефіцієнта відбиття (по модулю) обмежених $\Phi(n)K$ і активної складової вхідного імпедансу необмежених $\Phi(n)K$. Головна пелюстка залежності коефіцієнта відбиття відповідає забороненій зоні. Взаємне порівняння залежностей коефіцієнта відбиття обмежених $\Phi(n)K$ і активної складової вхідного імпедансу необмежених $\Phi(n)K$ дозволяє проаналізувати формування зонної діаграми обмеженими $\Phi(n)K$. З візуального порівняння залежностей можна зробити висновок, що вже при $N = 4$ зонна діаграма сформована.

Залежності параметрів заборонених зон обмежених $\Phi(n)K$ від значення N дозволяють кількісно проаналізувати степінь наближення параметрів зонної діаграми обмежених $\Phi(n)K$ до параметрів зонної діаграми необмежених $\Phi(n)K$. Степінь наближення оцінимо формулою:

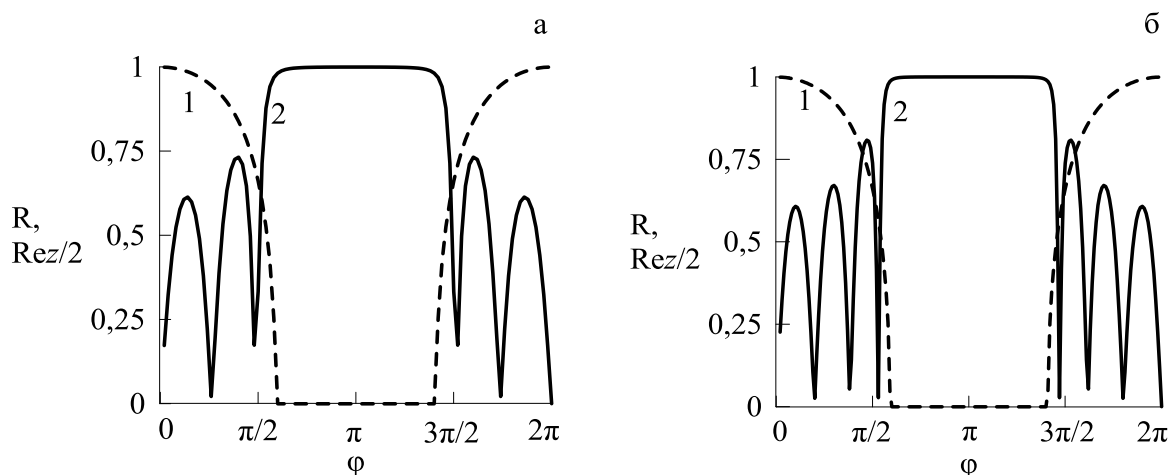


Рис. 6. Залежності коефіцієнта відбиття обмежених $\Phi(n)K$ (1) і активної складової вхідного імпедансу необмежених $\Phi(n)K$ (2): а — $N = 3$; б — $N = 4$.

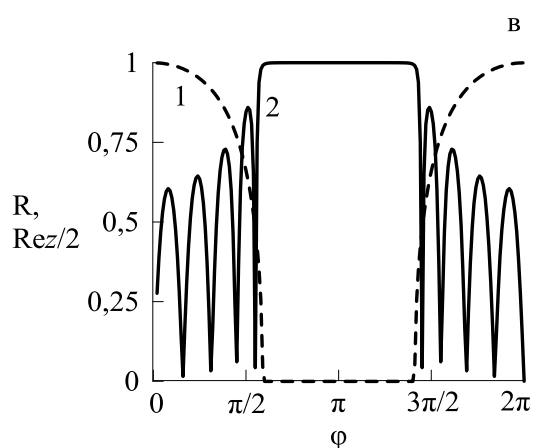


Рис. 6, в — $N = 5$.

$$\delta P = \frac{|P - P_H|}{P_H},$$

де P і P_H — значення параметра зонної діаграми відповідно обмежених і необмежених $\Phi(n)K$.

На рис. 7 приведено залежності параметрів заборонених зон обмежених $\Phi(n)K$. Зі збільшенням N з 4 до 10 значення $\delta\phi$ для залежностей 1 і 2 на рис. 7, а зменшуються з 10,3 і 4,3 % до 1,8 і 0,7 %, а значення δR для залежно-

сті на рис. 7, б — з 1,4 до 0,2 %.

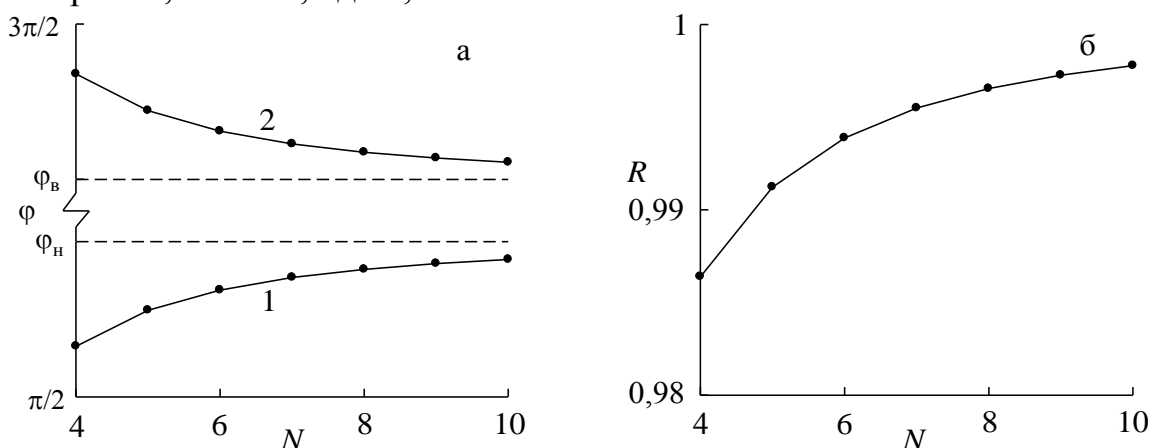


Рис. 7. Залежності параметрів заборонених зон обмежених $\Phi(n)K$: а — нижнє (1) і верхнє (2) значення нулів головної пелюстки залежності коефіцієнта відбиття, ϕ_H і ϕ_B — нижнє і верхнє значення меж забороненої зони необмежених $\Phi(n)K$; б — значення коефіцієнта відбиття обмежених $\Phi(n)K$ при $\phi = \phi_{H, B}$.

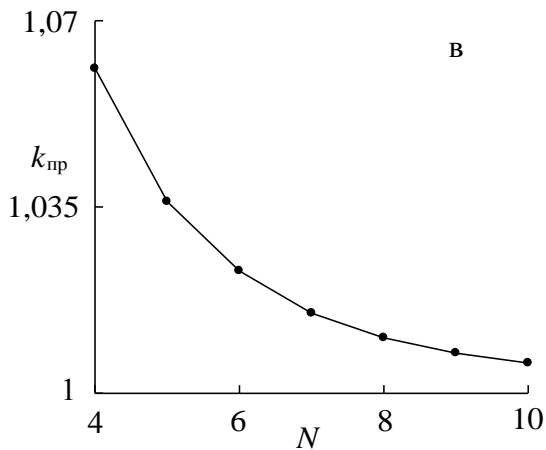


Рис. 7, в — залежність коефіцієнта прямокутності.

На рис. 7, в приведено залежність коефіцієнта прямокутності забороненої зони, що визначається відношенням

$$k_{\text{пр}} = \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta\varphi_{0,9}},$$

де $\Delta\varphi_0$ і $\Delta\varphi_{0,9}$ — смуги залежності коефіцієнта відбиття відповідно по перших нулях і за рівнем 0,9. Для необмежених $\Phi(n)K$ $k_{\text{прн}} = 1$. Зі збільшенням N з 4 до 10 значення $\delta k_{\text{пр}}$ зменшується з 6,1 до 0,6 %. Максимум коефіцієнта відбиття в забороненій зоні

вже при $N = 4$ дорівнює 0,999969.

Висновки

Імпедансна модель відрізняється наочністю аналізу зонних характеристик та фізичних властивостей $\Phi(n)K$. Принципова особливість залежності активної складової вхідного імпедансу $\Phi(n)K$ полягає у чергуванні смуг, що відповідають дозволеним і забороненим зонам. Взаємний аналіз залежностей активної і реактивної складових вхідного імпедансу обмежених $\Phi(n)K$ в дозволений зоні дозволяє визначити умови резонансного проходження хвиль. У $\Phi(n)K$ з типовими параметрами зонна діаграма формується вже при кількості високо- або низькоімпедансних шарів $N = 4$. Максимальна відносна різниця значень параметрів заборонених зон обмежених і необмежених $\Phi(n)K$ при $N = 4$ складає 10,3 %, а при $N = 10$ — 1,8 %.

References

1. Joannopoulos. J. D., Johnson S. G., Winn J. N. and Meade R. D. (2008) *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*, Princeton and Oxford: Princeton University Press, 286 p.
2. Massaro A. ed. (2012) *Photonic Crystals – Introduction, Applications and Theory*, InTech Publisher, 356 p.
3. Olsson III R. H. and El-Kady I. (2009) Microfabricated phononic crystal devices and applications, *Meas. Sci. Tech.*, Vol. 20, No. 1, pp. 012002.
4. Khelif A. and Adibi A., eds. (2015) *Phononic Crystals: Fundamentals and Applications*, N. Y., Springer, 268 p.
5. Markos P. and Soukoulis C. M. (2008) *Wave Propagation From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials*. Princeton and Oxford: Princeton University Press, 352p.
6. Nelin E. A. (2009) Impedance Characteristics of Crystal-like Structures. *Tech. Phys.*, vol. 54, no. 7, pp. 953-957.

Гіндікіна М. А., Зінгер Я. Л., Нелін Є. А. **Формування зонної діаграми фотонних та фононних кристалів.** Досліджено зонні особливості вхідних імпедансних характеристик необмежених і обмежених фотонного та фононного кристалів ($\Phi(n)K$). Взаємним порівнянням залежностей коефіцієнта відбиття обмежених $\Phi(n)K$ і активної складової вхідного імпедансу необмежених $\Phi(n)K$ проаналізовано формування зонної діаграми обмеженими $\Phi(n)K$. В результаті аналізу залежності параметрів заборонених зон обмежених $\Phi(n)K$ від кількості шарів проаналізовано ступінь наближення параметрів зонної діаграми обмежених $\Phi(n)K$ до параметрів зонної діаграми необмежених $\Phi(n)K$.

Ключові слова: фотонний кристал, фононний кристал, зонна діаграма, вхідний імпеданс.

Гиндикина М. А., Зингер Я. Л., Нелин Е. А. **Формирование зонной диаграммы фотонных и фононных кристаллов.** Исследованы зонные особенности входных импедансных характеристик неограниченных и ограниченных фотонного и фононного кристаллов ($\Phi(n)K$). Взаимным сравнением зависимостей коэффициента отражения ограниченных $\Phi(n)K$ и активной составляющей входного импеданса неограниченных $\Phi(n)K$ проанализировано формирование зонной диаграммы ограниченными $\Phi(n)K$. В результате анализа зависимости параметров запрещенных зон ограниченных $\Phi(n)K$ от числа слоев проанализирована степень приближения параметров зонной диаграммы ограниченных $\Phi(n)K$ к параметрам зонной диаграммы неограниченных $\Phi(n)K$.

Ключевые слова: фотонный кристалл, фононный кристалл, зонная диаграмма, входной импеданс.

Gindikina M. A., Zinger Y. L., Nelin E. A. **Zone diagram formation of photon and phonon crystals.**

Introduction. Photon and phonon crystals are crystal structures, which just like the crystals, are characterized by zone spectral properties. The purpose of the article is to research the input impedance characteristics and formation features of the photon and phonon crystals' zone diagrams.

Impedance model and properties of unlimited crystal structure. The expressions for input impedance of unlimited one-dimensional crystal structure for waves of different nature are presented. The relationships of physical properties of the crystal structure and the mathematical features of the expressions are investigated.

Impedance characteristics of photon and phonon unlimited crystals. The dependences of active and reactive components of photon and phonon unlimited crystal's input impedance with layers of different thickness are shown.

Input impedance characteristics of photon and phonon limited crystals. The dependences of active and reactive components of limited photon and phonon crystal's input impedance are given. The conditions for waves resonant passing through photon and phonon crystals are obtained.

Reflection coefficient characteristics of photon and phonon crystals. The formation of the limited photon and phonon crystal's zone diagrams is analyzed by mutual comparison of limited photon and phonon crystal's reflection characteristic and active component of unlimited photon and phonon crystal's input impedance characteristics. The approximation degree of limited photon and phonon crystal's zone diagram parameters to the unlimited photon and phonon crystal's zone diagram parameters is quantitatively analyzed.

Conclusions. The conditions for waves resonant passing through photon and phonon crystals is formulated and features of photon and phonon crystal's zone diagram formation is investigated.

Keywords: photon crystal, phonon crystal, zone diagram, input impedance.