

18. Рибін О.І., Ткачук А.П. Аналіз лінійних систем в області трансформант кратного перетворення EIWAL // Вісник НТУУ „КПІ”. Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2006 – Вип. 33. – С.147-154.

19. Рыбин А.И., Ткачук А.П. Анализ линейных систем в области трансформант собственных частот преобразования RTF//Радиоэлектроника. 2006. №11.С.56-63.(Изв. вузов)

Ніжебецька Ю.Х., Рибіна І.О., Якубенко О.А

Комплексне дискретне нормальне ортогональне перетворення. Запропоновано алгоритм формування матричного оператора дискретного нормального ортогонального комплексного перетворення, показано можливість його застосування для аутентифікації особи за динамічно введеним підписом.

Ключові слова: ортогональне перетворення, нормальне ортогональне перетворення

Нижебецкая Ю.Х., Рыбина И.А., Якубенко А.А. Комплексное дискретное нормальное ортогональное преобразование. Предложен алгоритм формирования матричного оператора дискретного нормального ортогонального комплексного преобразования, показана возможность его применения для аутентификации личности по динамически введенной подписи.

Ключевые слова: ортогональное преобразование, нормальное ортогональное преобразование

Nizhebetska I, Rybina I, Yakubenko A. Complex Discrete Normal Ortogonal Transform. The algorithm of forming matrix operator of discrete normal orthogonal complex transform is offered, possibility of its application for the authentication of person after the dynamically entered signature is shown.

Key words: orthogonal transformation, normal orthogonal transformation

УДК 621.372.061

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДЕКОНВОЛЮЦІЇ ЗА УМОВОЮ ОПТИМІЗАЦІЇ ФОРМИ РЕЗУЛЬТУЮЧОЇ ІМПУЛЬСНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Наталенко С.С. Рибін О.І.

Модель деградації образу $z(x, y)$, відтворюваного системою відображення і лінійному наближенні, можна представити у вигляді [1,2]

$$z(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O(x', y') g(x - x', y - y') dx' dy' + v(x, y), \quad (1)$$

де $O(x, y)$ — вихідний образ, $g(x, y)$ — імпульсна характеристика системи (не точкова); $v(x, y)$ — невідома реалізація адитивного шуму.

Найбільш розповсюдженими є методи реставрації, такі, що за відомою імпульсною характеристикою $g(x, y)$, отриманим спотвореним (деградованим) образом $z(x, y)$ та апіорною інформацією про адитивний шум $v(x, y)$, дозволяють знайти оцінку образу $\hat{O}(x, y)$, яка б за обраними критеріями мало відрізнялася від вихідного образу $O(x, y)$ і при цьому рівень шуму в реставрованому образі не перевищував би рівень шуму в (1) [1,2].

Інший підхід [1] до розв'язання задачі реставрації полягає у побудові

корегуючого сигнал $z(x, y)$ фільтру, з імпульсною характеристикою $m(x, y)$ такою, що результуюча імпульсна характеристика $c(x, y)$:

$$c(x, y) = g(x, y) * m(x, y) \quad (2)$$

була б максимально наближеною до δ -імпульсу (мала б найбільшу гостроту), але за умови не перевищення рівня (або енергії) шуму, отриманого в результаті корекції вихідного образу $z(x, y)$. Ясно, що при відсутності шуму імпульсна характеристика $c(x, y) = \delta(x, y)$, а коефіцієнт передачі корегуючого фільтра в (2)

$$m(j\omega_x, j\omega_y) = \frac{1}{G(j\omega_x, j\omega_y)}. \quad (3)$$

При наявності шуму обчислення коефіцієнта передачі за (3) може призвести до такого його збільшення, при якому оцінка образу $\hat{O}(x, y)$ може бути повністю цим шумом замаскована. Тому мірою спотворень результуючої імпульсної характеристики обирають гостроту

$$r^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D(x, y) c^2(x, y) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c^2(x, y) dx dy}, \quad (4)$$

де $D(x, y)$ вагова функція, яка штрафує значення за межами певної області, до якої належить результуюча імпульсна характеристика.

Для простоти ілюстрації властивостей методу деконволюції в області натуральних координат та в запропонованому в роботі методу деконволюції в області перетворення Фур'є перейдемо до одновимірних сигналів. В цьому випадку гостроту (4) можна записати [1] в дискретному вигляді

$$r^2 = \frac{\overline{m}^T \overline{A} m}{m^T \overline{B} m},$$

де \overline{m} — стовпець відліків шуканої корегуючої імпульсної характеристики $m(x, y)$; T — знак транспонування матриці; елементами матриць \overline{A} та \overline{B} є відповідно

$$\overline{A}_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} D(x) g(x - x_i) g(x - x_j) dx;$$

$$\overline{B}_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - x_i) g(x - x_j) dx.$$

Оскільки дисперсія шуму σ_0^2 після корекції:

$$\sigma_0^2 = \overline{m}^T \overline{R}_v \overline{m}, \quad (5a)$$

де \overline{R}_v — кореляційна матриця шуму, то для виконання корекції потрібно виконати умови

$$r^2 = \frac{\overline{\overline{m^T A m}}}{\overline{\overline{m^T B m}}} = \lambda_1 = \min ; \quad (6a)$$

$$\overline{\overline{m^T R_{vv} m}} = \sigma_0^2 \leq \sigma^2, \quad (6b)$$

де σ_0^2 — дисперсія шуму до корекції.

З рівняння (6a) за методом невизначених коефіцієнтів Лагранжа маємо

$$\overline{\overline{m^T A m}} - \lambda_1 \overline{\overline{m^T B m}} = 0,$$

а з (6b)

$$\overline{\overline{m^T R_{vv} m}} - \sigma_0^2 = 0.$$

Об'єднуючи останні рівняння з коефіцієнтом λ_2 , одержуємо

$$(\overline{\overline{m^T A m}} - \lambda_1 \overline{\overline{m^T B m}}) + \lambda_2 (\overline{\overline{m^T R_{vv} m}} - \sigma_0^2) = \min. \quad (7)$$

Лінеаризуємо умову (7) її диференціюванням по кожному елементу m_i стовпця \overline{m} . Це призведе до системи лінійних рівнянь

$$(\overline{A} + \lambda_2 \overline{R_{vv}}) \overline{m} = \lambda_1 \overline{B m}$$

або

$$\overline{B}^{-1} (\overline{A} + \lambda_2 \overline{R_{vv}}) \overline{m} = \lambda_1 \overline{m}.$$

Останнє рівняння можна переписати у більш зручній формі

$$\left\{ \left[\overline{B}^{-1} (\overline{A} + \lambda_2 \overline{R_{vv}}) \right] - \lambda_1 \overline{E} \right\} \overline{m} = \overline{0}, \quad (8)$$

де \overline{E} — одинична матриця; $\overline{0}$ — стовпець нулів.

Вираз (8) співпадає з виразом для визначення власного вектора \overline{m} матриці $\left[\overline{B}^{-1} (\overline{A} + \lambda_2 \overline{R_{vv}}) \right] = \overline{Q}$ за її власним числом λ_1 , яке (що видно з (6a)) є найменшим серед власних чисел [4,5].

Таким чином, алгоритм методу деконволюції в натуральних координатах за критерієм форми імпульсної характеристики має наступний вигляд:

- 1) обчислити матриці \overline{B} , \overline{A} , $\overline{R_{vv}}$;
- 2) надати значення λ_2 і обчислити матрицю \overline{Q} ;
- 3) знайти власні значення λ_1 матриці \overline{Q} і обрати з них найменше;
- 4) знайти власний вектор за (8), що відповідає власному значенню $\lambda_1 = \min$;
- 5) знайти оцінку образів $\overline{\Theta}$;
- 6) якщо отримані образи задовільні, то обчислення закінчити, якщо ні, то перейти до пункту 2 алгоритму.

Опис запропонованого алгоритму

При великих форматах образу задача як формування рівняння (8), так і

його розв'язання стає надзвичайно складною. Так для формату двомірного образу 1024x1024 слід сформувати матрицю \overline{Q} і знайти її власні значення, коли порядок матриці $N = 1024^3 > 10^6$.

Ясно, що більш перспективним представляється перехід до області перетворення Фур'є, оскільки, наприклад, матриці спектрів $\overline{G}(j\omega)$, $\overline{m}(j\omega)$, $\overline{B}(j\omega)$, $\overline{R}_v(j\omega)$ будуть діагональними.

Для переходу до області трансформант Фур'є розглянемо знову формули (2) та (4). Так в (2) за теоремою про згортку оригіналів маємо

$$g(x) * m(x) \square G(j\omega) \cdot m(j\omega). \quad (9)$$

Для переводу в частотну область виразу (4) використаємо теорему Парсеваля, за якою

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(x)c^2(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(j\omega) * |C(j\omega)|^2 d\omega, \quad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c^2(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |C(j\omega)|^2 d\omega.$$

Тоді

$$r^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} D(j\omega) * |C(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |C(j\omega)|^2 d\omega}. \quad (11)$$

Вираз знаменника (11) (при переході до дискретів) можна записати як

$$\overline{[1]}^T \overline{C_2}(\omega) \overline{[1]} = \overline{[1]}^T \overline{G_2}(\omega) \overline{m_2}(\omega) \overline{[1]} = \psi_1, \quad (12)$$

де $\overline{C_2}$, $\overline{G_2}$, $\overline{m_2}$ — діагональні матриці порядку N елементами яких є відповідно $C^2(\omega_k)$, $G^2(\omega_k)$, $m^2(\omega_k)$, тобто квадрат модулів перетворень Фур'є від дискретних функцій $c(x)$, $g(x)$, $m(x)$ на дискретних частотах ω_k ; $\overline{[1]}$ — стовпець одиниць розміру $N \times 1$, T — знак транспонування матриці.

Аналогічно, чисельник (11) можна представити у вигляді

$$\overline{[1]}^T \overline{C_2}(\omega) * \overline{D}(\omega) \overline{[1]} = \overline{[1]}^T \overline{\xi_2}(\omega) \overline{m_2}(\omega) \overline{[1]} = \psi_2, \quad (13)$$

де $\overline{\xi_2}(\omega)$ — дискретний оператор згортки, в якому елементи добутку $\overline{D}(\omega) \overline{G_2}(\omega)$ розташовані в кожному рядку (починаючи з найбільшого номера k частоти ω_k з нумерацією справа наліво). При цьому в нульовому рядку розміщено (в клітинці (0,0)) один елемент $D(\omega_{N-1})G_2(\omega_{N-1})$, в другому в клітинці (1,1) $D(\omega_{N-1})G_2(\omega_{N-1})$, а в клітинці (1,0) $D(\omega_{N-2})G_2(\omega_{N-2})$ і т.д. В кожному наступному рядку матриці $\overline{\xi_2}$ ряд добутків $D(\omega_k)G_2(\omega_k)$ посувається

ся на один крок праворуч; $D(\omega)$ обираємо для зручності дійсним, що відповідає симетричній (парній) відносно початку координат функції $D(x)$.

Умову (11) з урахуванням (12), (13) можна записати у вигляді $\psi_2 = \lambda_2 \psi_1$, або

$$\psi_2 - \lambda_2 \psi_1 = 0, \quad (14)$$

де λ_2 — коефіцієнт варіації Лагранжа.

Умова (5а) при цьому набуває вигляду

$$\overline{[1]}^T \overline{\overline{W_{vv}}}(\omega) \overline{m_2}(\omega) \overline{[1]} - \sigma_0^2 = 0, \quad (15)$$

де $\overline{\overline{W_{vv}}}$ — діагональна матриця, елементами діагоналі якої (за теоремою Вінера-Хінчина) є значення спектра потужності шуму на дискретних частотах.

Підсумовуючи (14) та (15) з коефіцієнтом варіації λ_2 , одержуємо

$$\overline{[1]}^T \overline{\xi_2}(\omega) \overline{m_2}(\omega) \overline{[1]} - \lambda_1 \overline{[1]}^T \overline{G_2}(\omega) \overline{m_2}(\omega) \overline{[1]} + \lambda_2 \overline{[1]}^T \overline{\overline{W_{vv}}}(\omega) \overline{m_2}(\omega) \overline{[1]} - \lambda_2 \sigma_0^2 = \min. \quad (16)$$

Квадратична форма (16) після диференціювання по m_i , елементам матриці

$$\overline{m_2} = \overline{m}(j\omega) \cdot \overline{m}^*(j\omega),$$

з урахуванням $\overline{m_2}(\omega) \overline{[1]} = \overline{m_2}$, де $\overline{m_2}$ — стовпець відліків $\overline{m_{i2}} = \overline{m_2}(\omega_i)$, взятих з діагоналі $\overline{\overline{m_2}}$, приводить до виразу

$$\left[\overline{G_2}^{-1}(\omega) (\overline{\xi_2}(\omega) - \lambda_2 \overline{\overline{W_{vv}}}(\omega)) - \lambda_1 \overline{E} \right] \overline{m}(\omega) = \overline{0}, \quad (17)$$

де $\overline{m}(\omega)$ — значення коефіцієнта передачі шуканого фільтра (з імпульсною характеристикою $m(x)$) на дискретних частотах розміру $N \times 1$; $\overline{0}$ — стовпець нулів розміру $N \times 1$.

На відміну від (8) у виразі (17) обернення матриці $\overline{G_2}(\omega)$, оскільки вона діагональна, не становить труднощів. Вираз (17) є виразом для пошуку власного вектору $\overline{m}(\omega)$ при даному власному значенні λ_1 матриці

$$\overline{G_2}^{-1}(\omega) (\overline{\xi_2}(\omega) - \lambda_2 \overline{\overline{W_{vv}}}(\omega)),$$

яке за умовою (4), (11) до того ж повинно бути найменшим серед усіх власних значень λ_i .

Розглянемо тепер структуру формули (17) детальніше. Так матричний оператор $\overline{\xi_2}(\omega)$ створено множенням дискретного оператора згортки спектру штрафної функції з діагональною матрицею відліків спектра потужності $G^2(\omega)$ імпульсної характеристики

$$\overline{\overline{\xi}}_2 = \overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{G}} = \begin{bmatrix} D_0 G_0^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ D_1 G_0^2 & D_0 G_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ D_2 G_0^2 & D_1 G_1^2 & D_0 G_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 G_0^2 & D_1 G_2^2 & D_0 G_3^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & D_2 G_{N-2}^2 & D_1 G_{N-1}^2 & D_0 G_N^2 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

В матричному виразі (18) для наочності ілюстрації прийемо, що спектр штрафної функції містить лише три відліки D_0 , D_1 , D_2 . Віднімання від матриці $\overline{\overline{\xi}}_2$ діагональної матриці $\lambda_2 \overline{\overline{W}}_{vv}(\omega)$ приводить результат $\overline{\overline{\psi}}_1 = \overline{\overline{\xi}}_2 - \lambda_2 \overline{\overline{W}}_{vv}(\omega)$ до вигляду

$$\overline{\overline{\psi}}_1 = \begin{bmatrix} (D_0 G_0^2 - \lambda_2 W_{vv0}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D_1 G_0^2 & (D_0 G_1^2 - \lambda_2 W_{vv1}) & 0 & \dots & 0 \\ D_2 G_0^2 & D_1 G_1^2 & (D_0 G_2^2 - \lambda_2 W_{vv2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (D_0 G_N^2 - \lambda_2 W_{vvN}) \end{bmatrix}. \quad (18a)$$

А множення виразу (18a) на діагональну матрицю $\overline{\overline{G}}_2^{-1}$ дає результат

$$\overline{\overline{\psi}}_2 = \overline{\overline{G}}_2^{-1} \overline{\overline{\psi}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{(D_0 G_0^2 - \lambda_2 W_{vv0})}{G_0^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{D_1 G_0^2}{G_1^2} & \frac{(D_0 G_1^2 - \lambda_2 W_{vv1})}{G_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{D_2 G_0^2}{G_2^2} & \frac{D_1 G_1^2}{G_2^2} & \frac{(D_0 G_2^2 - \lambda_2 W_{vv2})}{G_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(D_0 G_N^2 - \lambda_2 W_{vvN})}{G_{N-1}^2} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Як видно з матриці (19), вона має трикутниковий вигляд, тому визначник

$$\overline{\overline{\psi}}_2 - \lambda \overline{\overline{E}}$$

буде дорівнювати добутку елементів її головної діагоналі

$$\Delta \overline{\overline{\psi}}_2 = \left(\frac{(D_0 G_0^2 - \lambda_2 W_{vv0})}{G_0^2} - \lambda \right) \left(\frac{(D_0 G_1^2 - \lambda_2 W_{vv1})}{G_1^2} - \lambda \right) \times \dots \times \left(\frac{(D_0 G_N^2 - \lambda_2 W_{vvN})}{G_{N-1}^2} - \lambda \right). \quad (20)$$

Тому будь-яке k -те власне значення матриці $\overline{\overline{\psi}}_2$ має вигляд

$$\lambda^{(k)} = \frac{(D_0 G_k^2 - \lambda_2 W_{vvk})}{G_k^2}. \quad (21)$$

Отже для трикуткової матриці $\overline{\overline{\Psi}}_2$ проблема власних значень розв'язується (21) дуже просто. Матрицю $\overline{\overline{\xi}}_2$ в (18) вважаємо трикутковою. Але, насправді, вона має в верхньому правому куту ненульові елементи. Наприклад, в першому рядку матриці (19) справа наліво маємо наступні елементи $D_1 G_{N-1}^2$, $D_2 G_{N-2}^2$ і т.д. Але, якщо формат матриць $\overline{\overline{\xi}}_2$, $\overline{\overline{\Psi}}_1$, $\overline{\overline{\Psi}}_2$ взяти більшим, ніж формат матриці $\overline{\overline{G}}_2^{-1}$ (при цьому усі значення більші від вихідного формату, зумовленого форматом сигналу в діагоналі матриці $\overline{\overline{G}}_2^{-1}$ слід доповнити нулями), то елементи верхнього трикутника будуть множитися на нулі, внаслідок чого матриці $\overline{\overline{\xi}}_2$, $\overline{\overline{\Psi}}_1$, $\overline{\overline{\Psi}}_2$, можна вважати трикутковими.

Реалізація запропонованого алгоритму

Для апробації запропонованого алгоритму було розроблено його програмну реалізацію на ПЕОМ. Для ілюстрації можливостей запропонованого методу розглянемо реставрацію одновимірного сигналу, спотвореного неточною імпульсною характеристикою (рис. 1а), модуль АЧХ імпульсної характеристики моделі деградації (1) наведено на рис. 1б.

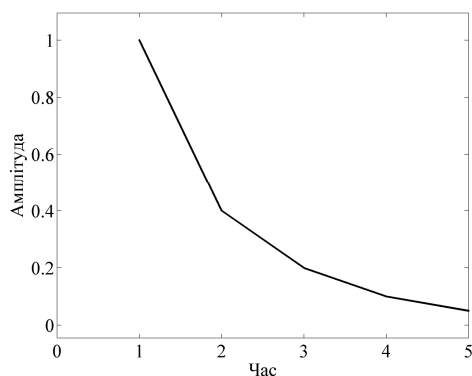


Рис.1а. Неточкова імпульсна характеристика

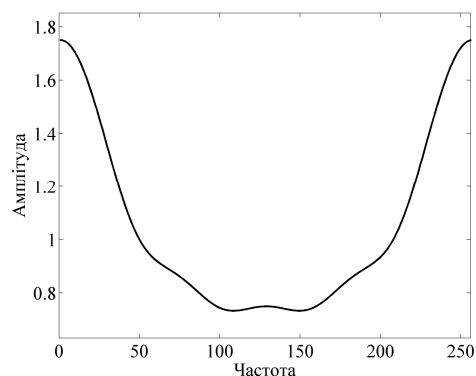


Рис.1б. АЧХ неточної імпульсної характеристики

Для обчислення імпульсної характеристики корегуючого фільтра використовувалася функція штрафу, АЧХ та часовий оригінал якої наведено на рис. 2а та 2б відповідно.

При реалізації алгоритму було отримано спектр корегуючого фільтра $m(\omega)$, АЧХ якого наведено рис. 3а, а його оригінал — на рис. 3б. При цьому результуюча імпульсна характеристика (результат згортки $m(x)$ та $g(x)$) має вигляд рис 4а, а її АЧХ — рис. 4б. При цьому вхідний сигнал наведено на рис. 5, його деградований за (1) варіант — на рис. 6, а результат реставрації — на рис.7.

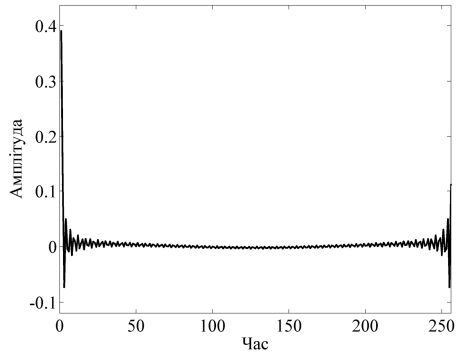


Рис.2а. Часовий оригінал функції штрафу

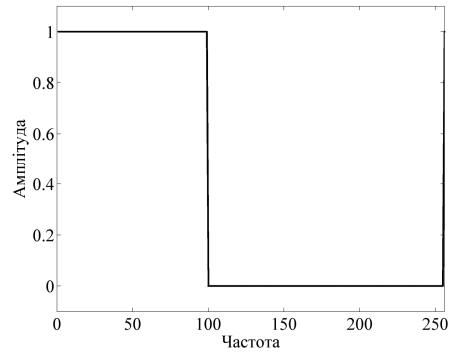


Рис.2б. АЧХ функції штрафу

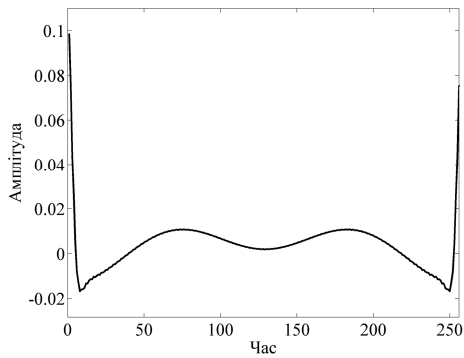


Рис.3а. Оригінал корегуючого фільтра

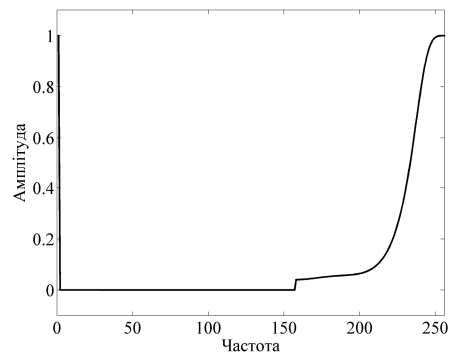


Рис.3б. АЧХ корегуючого фільтра

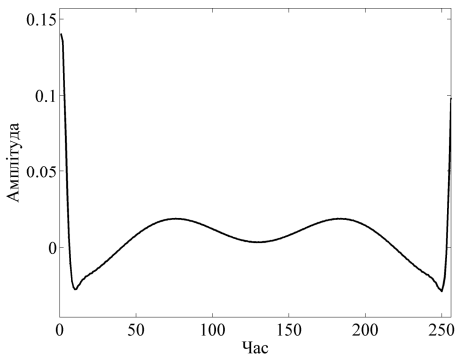


Рис.4а. Результуюча імпульсна характеристика

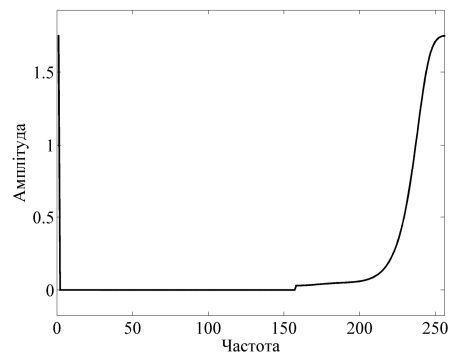


Рис.4б. АЧХ результуючої імпульсної характеристики

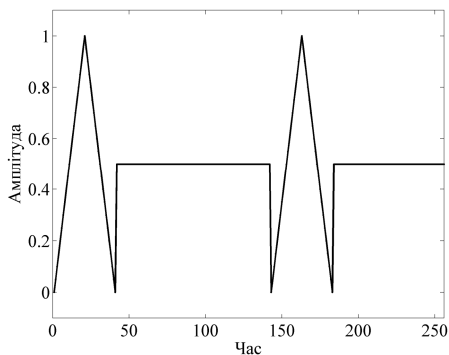


Рис.5. Вхідний сигнал

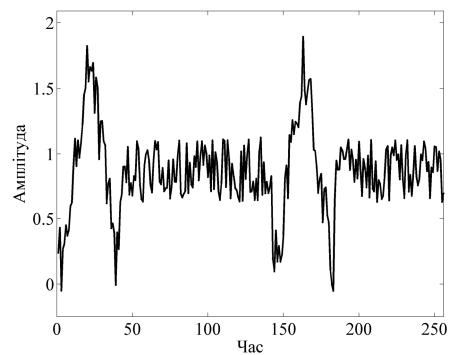


Рис.6. Деградований вхідний сигнал

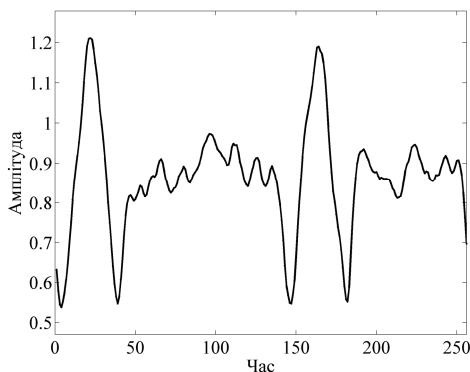


Рис.7 Результат реставрації

Висновки

1. Комп'ютерна реалізація запропонованого в роботі методу реставрації образу за критерієм гостроти результуючої імпульсної характеристики показала його достатню ефективність.
2. Кількість операцій (порівняно до реставрації в натуральних координатах) виявилася значно меншою, що дозволяє розповсюдити метод на випадок реставрації двовимірних образів, прийнятних в сучасній техніці форматів.
3. Проблема власних значень для запропонованого методу практично відсутня, що значно спрощує процедуру обчислень.
4. Проблемою залишається невизначеність процедури вибору коефіцієнта Лагранжа λ_2 , що у подальшому можна компенсувати дослідженням з перебором цих значень для різних форм спотворюючої імпульсної характеристики системи деградації. Можливість коректних висновків з таких досліджень значень λ_2 зумовлена тим, що на відміну від методу умовної деконволюції реставрація виконується за рахунок імпульсної характеристики однакової для всіх образів даного пристрою, а не за рахунок реставрації конкретного образу.

Література

1. Jan J. Metody restaurace obrazu a jejich moznosti // Vybrane odborné a vědecké práce VUT v Brně. – Faculty of electrical engineering. — 1991.—s.7-72.
2. Рыбин А.И., Королёв В.Ю. Алгоритм условной деконволюции в частной области // Радиоэлектроника. — 2000.- №4. — с.51-55. (Изв. высш. учеб. заведений)
3. Рибін О., Корольов В. Реставрація образів методом умовної деконволюції в області просторових частот // Вісник Технічного ун-ту Поділля. — 2000. — №1. — с.145-147.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука — 1967
5. Абакумов В.Г., Сватош Й.А., Рибін О.І. Біомедичні сигнали (генезис, обробка, моніторинг) — Київ: Нора -Прінт, 2001 — 516с.

Наталенко С.С., Рибін О.І. Розв'язання задачі деконволюції за умовою оптимізації форми результуючої імпульсної характеристики Запропонована методика переносу алгоритму реставрації по критерію форми результуючої імпульсної характеристики в область трансформант Фур'є

Ключові слова: деконволюція, перетворення Фур'є, фільтрація, шум, образ

Наталенко С.С., Рибін А.І. Решение задачи деконволюции по условию оптимизации формы результирующей импульсной характеристики Предложена методика переноса алгоритма реставрации по критерию формы результирующей импульсной характеристики в область трансформант Фурье

Ключевые слова: деконволюция, преобразование Фурье, фильтрация, шум, образ

Natalenko S., Rybin A. Solution of the problem of the deconvolution on condition of the optimization of the form of the resulting pulse characteristic Offered methods of the carrying the algorithm to restorations on criterion of the form of the resulting pulse characteristic in Fourier domain

Key words: deconvolution, Fourier transform, filtration, noise, image