УДК 621.396:519.15

# МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНИХ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ НА ВЕКТОРНИХ КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЯХ[1]

***Різник В. В., д.т.н., професор***
*Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, Україна,*
*rvv@polynet.lviv.ua*

## MODELS OF OPTIMUM DISCRETE SIGNALS ON THE VECTOR COMBINATORIAL CONFIGURATIONS

***Riznyk V. V., PhD DSc, Professor***
*Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

## Вступ

Важливе значення для поліпшення якісних показників радіотехнічних пристроїв і систем радіозв’язку мають методи просторової оптимізації дискретних сигналів та векторних кодових послідовностей. Дослідження в цьому напрямі відкривають перспективи для опрацювання ефективних методів оптимізації дискретних сигналів на основі використання комбінаторних властивостей просторової симетрії та асиметрії. На порядку денному – дослідження ефективних методів синтезу оптимальних дво- й багатовимірних дискретних сигналів, оптимального просторово-часового розподілу сигналів, пошук вигідного співвідношення між параметрами векторних кодових сигналів тощо. У світлі сказаного актуальним постає дослідження векторних комбінаторних конфігурацій як моделей вирішення оптимізаційних задач електрозв’язку.

## Огляд методів просторової оптимізації

Сучасні методи оптимізації систем базуються переважно на класичній теорії комбінаторних конфігурацій [1]. Один з підходів до здійснення просторової оптимізації передбачає застосування принципу оптимальних структурних відношень (ОСВ) для оптимізації багатовимірних системних об’єктів [2]. Цьому сприяло виявлення великого класу дво- та багатовимірних ідеальних кільцевих в’язанок (ІКВ) з їх численними ізоморфними й неізоморфними перетвореннями [3,4]. Багатовимірні векторні ІКВ становлять великий клас ще мало вивчених векторних комбінаторних конструкцій, які за різноманітністю тонкої структури та своєю чисельністю далеко перевершують класичні комбінаторні конфігурації. Дослідження унікальних властивостей тонкої структури багатовимірних ІКВ висвітлено в публікаціях [3-5]. Теоретично доведено, що унікальні властивості ІКВ закодо-

[1] http://radap.kpi.ua/radiotechnique/article/view/1173

вані в обертовій симетрії як завгодно великого порядку і розмірності [3,4]. В [4] з'явилося повідомлення про відкриття нового кластеру ІКВ з властивостями, за яких переставляння місцями векторів всередині кільцевої структури зберігає їхню унікальність. Вперше стало відомо, що поруч з класичними існують численні ансамблі раніше невідомих комбінаторних конфігурацій «зіркового» різновиду. Результати підтверджуються теоретичними розрахунками та комп'ютерною верифікацією. Це розширює можливості опрацювання нових ефективних методів побудови оптимальних багатовимірних дискретних сигналів. Властивості зберігаються під час взаємнооднозначного перетворення одновимірних ІКВ в багатовимірні, і навпаки [3,4]. Векторні ІКВ зручно досліджувати й застосовувати як $n$–послідовності цілочислових $t$–кортежів, де $t$– розмірність просторової структури у вигляді тору. Множина значень усіх кільцевих вектор-сум $t$–кортежів, утворених на цій послідовності, перелічує множину вузлових точок в циклічно замкненій $t$–вимірній системі координат [2-5]. Векторні ІКВ охоплюють велику групу комбінаторних конструкцій – від ідеальних кільцевих в'язанок чисел (одновимірних ІКВ) до багатовимірних структур. Поняття векторних ІКВ дають змогу розширити сферу фундаментальних і прикладних досліджень в радіоелектроніці і суміжних галузях знань, водночас збагачуючи потенційні можливості сучасної комбінаторної науки.

## Постановка задачі

Постановка задачі полягає в поліпшенні якісних показників радіотехнічних пристроїв і систем радіозв'язку шляхом використання оптимальних дискретних сигналів, побудованих за допомогою послідовностей векторів з унікальними комбінаторними властивостями – векторних ІКВ. Ключовим завданням постає опрацювання єдиного підходу до побудови векторних моделей оптимальних дво- й багатовимірних дискретних сигналів з корисними властивостями стосовно завадостійкості, кореляційних можливостей, завадостійкості, самокоректувальної спроможності.

## Метод вирішення завдання

Метод базується на використанні теорії комбінаторних конфігурацій [1] та алгебри в'язанок (В-алгебри) [2], де елементами в'язанок постають дискретні сигнали або кодові символи. Для полегшеного викладання матеріалу під векторною ІКВ далі будемо розуміти ІКВ будь-якої розмірності, включно з одновимірною. В роботі [6] описана модель оптимальних дискретних систем у вигляді взаємопов'язаних множини чисел натурального ряду і множини координат розміщення цих чисел на розгорнутій поверхні тору. У загальному випадку модель дозволяє розглядати відношення між сумірними підмножинами впорядкованих елементів та їхніми просторовими координатами в базисному полі заданої системи координат. Задачі такого класу зручно досліджувати на математичних моделях у вигляді циклічних співвідношень між послідовно впорядкованими наборами векторів відповідної розмірності. Однак класичні методи складно використовувати для розбудови оптимальних дискретних сигналів на векторних кодових послідовностях з-за відсутності зведеної прикладної теорії просторових комбінаторних конфігурацій та достатньо наочних для практичного використання багатовимірних моделей векторних сигналів. Тому актуальною постає проблема опрацювання ефективних методів дослідження та синтезу оптимальних сигналів та імпульсних послідовностей на основі векторних ІКВ- технологій. На порядку денному опрацювання регулярних методів синтезу та систематизація моделей оптимальних дискретних сигналів на векторних комбінаторних конфігураціях типу ІКВ [2]. Моделі зручно представляти у вигляді кругової діаграми з $n$ точками, які знаходяться на кожному з $n$ концентрично розміщених навколо центру діаграми рівнів, де кожній точці на усіх рівнях від першого до ($n$-1)- го відповідає інше число ряду, а множина точок і множина з'єднувальних ліній утворюють кругове симетричне поле оптимально розподілених чисел натурального ряду від 1 до $S_n$–1 у вигляді плаского розгортки координатної сітки, стягнутої з поверхні тору так, щоб кожне число зустрічалося рівно по одному разу [6]. В загальнішому випадку така конфігурація утворюється на $n$- послідовності цілих додатних чисел ($k_1$, $k_2$,…, $k_i$,…, $k_n$), розміщених за кільцевою схемою, де числа і всі суми з двох, трьох і т. д. поруч розміщених чисел перелічують значення чисел натурального ряду від 1 до ($S_n$–1)/ $R$ рівно $R$ разів.

На відміну від одновимірних ІКВ двовимірні ідеальні кільцеві відношення (2D–ІКВ) набувають вигляду кільцевих $n$ –послідовностей, елементами яких є 2-кортежі (($k_{11}$, $k_{12}$), ($k_{21}$, $k_{22}$), ... , ($k_{i1}$, $k_{i2}$),..., ($k_{n1}$, $k_{n2}$)), де $k_{i1} \equiv k_i \pmod{m_1}$, $k_{i2} \equiv k_i \pmod{m_2}$; $m_1 = n-1$, $m_2 = n$, $i = 1, ..., n$; $\sum_{i=1}^{n} k_i = S_n$. Множину 2-кортежів можна розглядати як впорядкований за кільцевою схемою набір координат $n$ вузлових точок, проекції яких обмежені рамками координатної сітки тороїду в двовимірній циклічній системі відліку $n\times(n-1)$, а їхні значення разом із значеннями усіх їх можливих лінійних комбінацій перелічують множину координат вузлів цієї координатної сітки. Лінійні комбінації утворюються додаванням послідовно впорядкованих 2-кортежів (числових значень координат $n$ базових вузлових точок в згаданій системі відліку) з урахуванням значень модулів (mod $n$) і (mod ($n$-1)). Завдання полягає в тому, щоб за допомогою координат $n$ базових вузлових точок та множини усіх їхніх лінійних комбінацій покрити $R$ способами множину $n(n-1)/R$ точок координатної сітки з відповідними розмірами, яка покриває поверхню тору з фіксованим кроком квантування за наявності системи взаємно ортогональних циклічно замкнених відносно спільної точки відліку осей.

## Поняття В-алгебри

Досліджуючи властивості різних видів комбінаторних конструкцій на послідовностях, можна побачити, що всі вони є довільними утвореннями, які базуються на принципі зв'язності. В [2] запропоновано розглядати моделі дискретних систем як математичних об'єктів, елементи і операції над якими пов'язані з топологією структури базової множини. Такий підхід випливає зі самої природи утворення й природного розвитку систем, зокрема генетичних структур.  В'язанка – це впорядкована  - послідовність, що є базовою множиною, на якій визначена множина операцій. В'язанка-об'єкт складається з двох множин (носія в'язанки і множини операцій), причому операції на носієві здійснюються послідовним обходом елементів носія з урахуванням їх впорядкування. При цьому діє правило зв'язності: операціям підлягають лише безпосередньо пов'язані між собою будь-які математичні величини або матеріальні об'єкти. Поняття в'язанки служить достатньо узагальненому визначенню В-алгебри (алгебри в'язанок). Вужчі класи в'язанок можуть утворюватися із загального визначення В-алгебри шляхом накладання на них додаткових обмежень. Одновимірні в'язанки В-алгебри утворюються на елементах, які є одновимірними математичними об'єктами (числа, відрізки, одновимірні вектори, кутові відстані, і т. д.), а вищих вимірів – векторами відповідної розмірності.

## Зв'язок з кодом Баркера

До сигналів з корисними властивостями належать сигнали Баркера, для яких функція автокореляції дорівнює одиниці для усіх можливих позицій, за винятком нульової, коли енергія тих сигналів набуває максимальної величини, яка в числовому еквіваленті збігається з числом позицій коду Баркера [7]. Правило переходу від ІКВ до коду Баркера полягає в наступному.

Для кожного числа  $k_i$, ($i$= 1,2,…, $n$) обраного ІКВ з параметрами $n$, $R$, $S_n$ знаходять відповідний цьому числу $i$-й фрагмент кодової послідовності Баркера ($K_1$, $K_2$,…,$K_i$,…, $K_n$),  $K_i = (a_1, a_2,…, a_j ,…, a_k)$, $k$=$k_i$,  де  $a_1$ = +1,  {$a_j$ }= -1,  $j$ = 2,3,…, $k_i$.

Наприклад, за описаним правилом легко перейти від ІКВ (1,1,4,3,2) з параметрами  $n$=5, $R$=2  до  кодової послідовності Баркера (+1,+1,+1,-1,-1,-1,+1,-1,-1,+1,-1), що складається з п'яти ($n$ =5) послідовно впорядкованих фрагментів  $K_1$,…, $K_5$, де  $K_1$= (+1), $K_2$= (+1), $K_3$ =(+1,-1,-1,-1), $K_4$ = (+1,-1,-1), $K_5$=(+1,-1) і має мінімальний рівень бічних пелюстків автокореляційної функції  1/ $S_n$ =1/11.

Відомо, що існують кодові послідовності Баркера лише з довжинами $N$ =2, 3, 4, 5, 7, 11, 13 [7]. Цим послідовностям взаємно однозначно відповідають наступні варіанти ІКВ ($k_1$ , $k_2$,…, $k_n$ ) з параметрами $n$, $R$, $S_n$ ; $n$ =2,3,4,5,7,11,13 (Табл.2).

Таблиця 2. Відповідність числових ІКВ кодовим послідовностям Баркера

| ІКВ | | | | Код Баркера | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $R$ | $S_n$ | $(k_1, k_2,\ldots, k_n)$ | $N$ | $(a_1, a_2,\ldots, a_N)$ |
| 2 | 2 | 2 | 1,1 | 2 | +1,+1 |
| 2 | 1 | 3 | 1,2 | 3 | +1,+1,-1 |
| 3 | 2 | 4 | 1,1,2 | 4 | +1,+1,+1,-1 |
| 3 | 2 | 4 | 1,2,1 | 4 | +1,+1,-1,+1 |
| 4 | 3 | 5 | 1,1,2,1 | 5 | +1,+1,+1,-1,+1 |
| 4 | 2 | 7 | 1,1,3,2 | 7 | +1,+1,+1,-1,-1,+1,-1 |
| 5 | 2 | 11 | 1,1,4,3,2 | 11 | +1,+1,+1,-1,-1,-1,+1,-1,-1,+1,-1 |
| 9 | 6 | 13 | 1,1,1,1,3,1,2,2,1 | 13 | +1,+1,+1,+1,+1,-1,-1,+1,+1,-1,+1,-1,+1 |

Отже, для кожного з восьми варіантів кодових $N$-послідовностей Баркера існує відповідна ІКВ з параметрами $n$, $R$, $S_n$, яку можна перетворити в послідовність Баркера з мінімальним рівнем бічних пелюстків автокореляційної функції $1/S_n$. За своїми автокореляційними властивостями кодові $S_n$-послідовності, утворені на ІКВ, збігаються з кодами Баркера, що можна трактувати як відображення геометричних законів гармонії обертової симетрії-асиметрії простору в різних комбінаторних конструкціях з кільцевою структурою. Це дає змогу глибше зрозуміти взаємозв’язок унікальних властивостей коду Баркера та ІКВ з фундаментальними законами природи. Інший напрям передбачає використання векторних ІКВ для кодування оптимальних дискретних сигналів, в т.ч. у вигляді багатовимірного монолітного коду [2-3,5], та розбудовою модифікацій ІКВ на їх ізоморфних перетвореннях в багатовимірних просторах [4].

Вищенаведені приклади демонструють можливість застосування принципу оптимальних структурних відношень (ОСВ) для постановки та вирішення ряду практично важливих задач перетворення форми дискретних сигналів з метою поліпшення технічних показників систем кодування й вдосконалення регулярних методів синтезу оптимальних дискретних сигналів.

**Правило оптимізації кодових послідовностей**

Відомо, що коректувальна спроможність циклічного коду, побудованого на основі ІКВ з параметрами $S_n$ , $n$, $R$ досягає свого максимального значення за умови дотримання співвідношення $S_n=2\,n$ [2]:

$$d_{\min} = 2R\ ;\ t_1 \le 2R - 1;\ t_2 \le R - 1,\ \text{якщо}\ n \equiv 0 (mod\ 2); \tag{1}$$
$$d_{\min} = 2(R+1);\quad t_1 \le 2R + 1\ ;\quad t_2 \le R,\ \text{якщо}\ n \equiv 1 (mod\ 2),$$

де $S_n$ – довжина комбінації, $d_{\min}$ – мінімальна кодова відстань, $t_1$ – число помилок, які можна виявити, $t_2$- число помилок, які можна виправити.

З вищенаведеного випливає формула, яка визначає умову забезпечення найвищої завадостійкості циклічного коду з фіксованими значеннями довжини і потужності [2]:

$$R = \begin{cases} \frac{n}{2} & ,\text{якщо } n \equiv 0(mod\ 2) \\ \frac{n-1}{2} & ,\text{якщо } n \equiv 1(mod\ 2) \end{cases} \qquad (2)$$

Зі співвідношення (2) легко вивести концептуальне правило формування бінарних кодових послідовностей з високою завадостійкістю- правило оптимізації кодових послідовностей (правило ОКП), які побудовані на основі ІКВ.

Правило ОКП: ***Найвищої завадостійкості набувають ІКВ - послідовності, в яких кількість різнойменних бінарних символів відрізняється між собою не більше ніж на один символ.***

**Доведення**. Будь-якій $n$ - послідовності чисел $k = (k_i, i= 1,2,\ldots, n)$ взаємно однозначно відповідає кільцева $s$-послідовність бінарних (двозначних) символів $b=(b_i, i=1,2,\ldots,s)$, в якій кожен елемент -послідовності відображений відповідною парою $(b_i, b_j)$, $(i, j=1,2,\ldots, s)$, $i \neq j$ , послідовно розміщених між собою на $s$-послідовності однойменних бінарних символів, де $s$ – сума усіх чисел - послідовності. Оскільки таких пар існує рівно стільки, скільки є чисел в $n$ -послідовності, кількість однойменних символів в кільцевій $s$ – послідовності збігається з числом $n$, а кількість усіх решти ( $s$ – $n$ ) символів може відрізнятися від $n$ не більше ніж на один символ, що задовольняє співвідношенню (2).

Таким чином, в принципі, будь-яку числову послідовність, у тому числі й ІКВ, можна використати для побудови циклічного завадостійкого коду, але найліпший ефект стосовно завадостійкості досягається при дотриманні правила, яке випливає із (2). Слід зауважити, що з-за нелінійного характеру функціональної залежності між рівнем завадостійкості оптимізованого коду і його інформаційною надмірністю існує можливість визначення додаткового оптимуму за критерієм досягнення максимальної ефективності ІКВ-коду за компромісним співвідношенням між коректувальними властивостями коду та його довжиною. За теоретичними розрахунками існує як завгодно багато ІКВ з будь-якими великими величинами параметрів, причому потужність методів кодування стрімко зростає зі збільшенням довжини кодових послідовностей. Так, одновимірним ІКВ дев'ятого ($n$=9) порядку відповідає 9, …,18-го - 52 , …,102-го - 1717,…, 984-го – 159630 різних варіантів одновимірних кодових послідовностей з точністю до реверсування порядку і зміни знаків символів [2]. У цьому переліку не враховуються ІКВ з $2 \leq R \leq S_n$ . Чисельність інваріантів ІКВ дає змогу здійснювати оптимізацію, обираючи ліпші з них за потрібними ознаками, наприклад, методом відсікання або скороченням довжини коду, добором відповідних значень вагових розрядів тощо. Це дає можливість конструювати оптимальні кодові послідовності з тисячами і сотнями тисяч елементів.

Таблиця 1 Характеристика оптимальних циклічних ІКВ-кодів довжиною $7 \leq S_n \leq 43$

| Оптимальний циклічний ІКВ-код | | | | Функція автокореляції оптимального ІКВ-коду | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $R$ | $S_n$ | $t_2$ | +1 | -1 | Δ | 100% |
| 4 | 2 | 7 | 1 | 3 | 4 | -1 | 14,286 |
| 5 | 2 | 11 | 2 | 5 | 6 | -1 | 9,0909 |
| 6 | 3 | 11 | 2 | 5 | 6 | -1 | 9,0909 |
| 7 | 3 | 15 | 3 | 7 | 8 | -1 | 6,6667 |
| 8 | 4 | 15 | 3 | 7 | 8 | -1 | 6,6667 |
| 9 | 4 | 19 | 4 | 9 | 10 | -1 | 5,2631 |
| 10 | 5 | 19 | 4 | 9 | 10 | -1 | 5,2631 |
| 11 | 5 | 23 | 5 | 11 | 12 | -1 | 4,3478 |
| 12 | 6 | 23 | 5 | 11 | 12 | -1 | 4,3478 |
| 13 | 6 | 27 | 6 | 13 | 14 | -1 | 3,7037 |
| 14 | 7 | 27 | 6 | 13 | 14 | -1 | 3,7037 |
| 15 | 7 | 31 | 7 | 15 | 16 | -1 | 3,2258 |
| 16 | 8 | 31 | 7 | 15 | 16 | -1 | 3,2258 |
| 17 | 8 | 35 | 8 | 17 | 18 | -1 | 2,8571 |
| 18 | 9 | 35 | 8 | 17 | 18 | -1 | 2,8571 |
| 19 | 9 | 39 | 9 | 19 | 20 | -1 | 2,5641 |
| 20 | 10 | 39 | 9 | 19 | 20 | -1 | 2,5641 |
| 21 | 10 | 43 | 10 | 21 | 22 | -1 | 2,3256 |
| 22 | 11 | 43 | 10 | 21 | 22 | -1 | 2,3256 |

У таблиці 1 наведена характеристика оптимальних циклічних ІКВ-кодів довжиною $7 \leq S_n \leq 43$ за числом $t_2$ помилок, які цей код може виправити, та його спроможністю щодо розпізнавання сигналів при відношенні сигнал/шум менше одиниці. Функція автокореляції оптимального циклічного ІКВ-коду обчислюється за множиною покрокових зсувів цієї послідовності за результатом підсумовування усіх елементів +1 і -1, після повного циклу покрокових зсувів. Результати обчислень не змінюються від реверсування порядку чи зміни знаків елементів на протилежні в будь-якому з варіантів $S_n$-послідовностей. Проглядається чітка закономірність заповнення таблиці 1, що дозволяє легко визначити числове співвідношення рівня бічних пелюстків і головного піку функції автокореляції за результатом підсумовування усіх елементів +1 і -1 відповідної кодової $S_n$-послідовності будь-якої великої довжини. З таблиці 1 випливає, що оптимальний циклічний код, представлений у вигляді двійкової послідовності довжиною $S_n$ елементів, дозволяє виправляти до $(S_n$-3)/4 помилок, а функція автокореляції цієї послідовності за результатом підсумовування елементів +1 і -1 на будь-якому кроці циклічного зсуву для послідовності будь-якої великої величини $S_n$ не перевищує одиниці з точністю до реверсування порядку і зміни знаків кожного з елементів.

Правило ОКП лежить в основі опрацювання регулярного методу синтезу оптимальних дискретних сигналів різного призначення: оптимальних циклічних кодів підвищеної завадостійкості, сигналів з ліпшими, ніж в сигналів Баркера відношенням головного піку функції автокореляції до бічних. Для синтезу оптимального завадостійкого коду за цим правилом достатньо обрати ІКВ з такими параметрами, щоб довжина комбінацій циклічного коду збігалася з $S_n$, а величини $n$ і $R$ відповідали співвідношенню (2).

Для деяких кластерів оптимальних ІКВ існує більше, ніж одна пара комплементарних відносно обертової симетрії $S$-го порядку ($S$=$S_n$) варіантів $S_n$-послідовностей фіксованої довжини. Під комплементарними (або симетрично спряженими) розуміють геометричні, алгебро-графічні чи графоаналітичні інтерпретації ІКВ, які зручно ілюструвати у вигляді пласких асиметричних фігур, що доповнюючи одна другу, зливаються в єдиному круговому полі обертової симетрії відносно центральної точки [3]. Наприклад, для $S_n$=31 існує чотири комплементарні пари таких ІКВ [2]. Наявний взаємозв'язок ІКВ і натуральним рядом чисел, закодованим в обертовій симетрії, свідчить про єдність джерела інформації про їх походження.

**Оптимальні векторні кодові послідовності**

Розширення конструктивних формотворень ІКВ може здійснюватися шляхом їх ізоморфних геометричних перетворень у симетричному віртуальному полі багатовимірних системах координат зі замкненою просторовою структурою [3-5]. Цьому сприяла розбудова нового різновиду комбінаторних конфігурацій з параметрами $n$ , $R$ , $S_n$ , $S$ , де $S_n$ $S$ 2 ($n$-1) [4,5]. На відміну від традиційних ІКВ нові дво- й багатовимірні векторні комбінаторні конструкції мають ширший діапазон для комбінаційного формування різних варіантів моделей оптимальних дискретних сигналів, завдяки використанню віртуального поля обертової симетрії вищих порядків.

Розглянемо двовимірну модель циклічної $n$ -послідовності, елементами якої є впорядковані 2-кортежі (двовимірні вектори) невід'ємних цілих чисел $C_{n2} = \{(k_{11}, k_{12}), (k_{21}, k_{22}),\ldots, (k_{i1}, k_{i2}),\ldots, (k_{n1}, k_{n2})\}$, де $(k_{n1}, k_{n2})$ знаходиться поруч $(k_{11}, k_{12})$. Ми вимагаємо, щоб множина усіх можливих векторних сум з будь-якого числа послідовно розміщених на кільцевій схемі векторів – від 1 до $n$-1 вичерпували значення координат вузлових точок двовимірної сітки, що покриває рівно $R$ раз поверхню тору, створену двома ($t$=2) ортогональними осями циклічної системи відліку. Така послідовність називається векторною 2-ІКВ з параметрами $n$, $R$, $m_1$, $m_2$, прив'язаних до обертової симетрії порядку $S$, де $S_n$ $S$ 2 ($n$-1)/$R$. Кільцеві суми обчислюють з урахуванням значень модулів $m_1$ та $m_2$ для відповідних осей двовимірної циклічної системи відліку, де $m_1 = n$, $m_2$=($n$-1), або $m_1$=($n$-1), $m_2$=$n$-1. Потужність множини різних варіантів завадостійких двовимірних кодових послідовностей, побудованих на основі 2-ІКВ, є значно більшою від потужності повних сімей одновимірних ІКВ з однаковим числом $n$ елементів. Додаткові варіанти векторних ІКВ утворюються в полі обертової симетрії вище $S_n$.-го порядку. Ця різниця швидко зростає, вже починаючи двовимірних кодових послідовностей на трьох ($n$=3) векторах. Повна сім'я таких послідовностей складається з чотирьох різних варіантів [5], тоді як одновимірна існує в єдиному варіанті [2]. Для послідовностей четвертого ($n$=4) порядку повна сім'я двовимірних кодів обіймає 24 варіанти з параметрами $R$ =1, $m_1$ =3, $m_2$ =4 й шість з $R$ =2, $m_1$=2, $m_2$ =3, в той час як одновимірні - лише трьома варіантами [2]. Для п'ятого ($n$=5) порядку кількість таких варіантів становить 384, в т. ч. 256 двовимірних і 128 тривимірних кодових послідовностей. Кількість 2-ІКВ сьомого порядку, $R$=1, нараховує 540 різновидів двовимірних кодових послідовностей, які можна реалізувати на множині комбінацій $m_1 \times m_2$=42, де $m_1$ набирає значень {2, 3, 6}, а $m_2$ - {7, 14, 21} відповідно. Додатково ще 180 різних варіантів тривимірних послідовностей утворюється у тому ж діапазоні значень $S_в$ для $m_1$ =2, $m_2$ =3, $m_3$=7 [4].

Побудову $t$ -вимірної кодової послідовності на ІКВ з параметрами $n$ , $R$ зручно реалізувати у вигляді кільцевої $n$ –послідовності, елементами якої є $t$ -кортежі ($K_1$, $K_2$, …, $K_i$, …, $K_n$); $K_1$= ($k_{11}$, $k_{12}$, …, $k_{1t}$), $K_2$ = ($k_{21}$, $k_{22}$,…, $k_{2t}$), ..., $K_i$ = ($k_{i1}$, $k_{i2}$,…,$k_{it}$), ... , $K_n$=($k_{n1}$, $k_{n2}$,…, $k_{nt}$)), де $k_{i1} \equiv k_i$ (mod $m_1$), $k_{i2} \equiv k_i$ (mod $m_2$), …, $k_{it} \equiv k_i$ (mod $m_t$). Множина усіх послідовних (кільцевих) вектор-сум, взятих по комплексному модулю ($m_1$, $m_2$, ..., $m_t$), утворює $t$ -вимірну решітку $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_t = n(n-1)/ R$. Ця решітка покриває поверхню віртуального тору відповідної розмірності рівно $R$ разів в замкненій $t$- вимірній циклічній системі відліку просторових координат усіх вузлових точок цієї решітки. Іншими словами, множину $t$-кортежів ІКВ можна розглядати як впорядкований за кільцевою схемою набір координат $n$ базових вузлових точок $t$ -вимірної решітки, проекції яких обмежені рамками просторово замкненої на саму себе координатної сітки $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_t$ , а множина значень координат цих точок разом зі значеннями усіх їх можливих лінійних комбінацій у вигляді кільцевих вектор-сум, перелічують множину вузлових координат цієї решітки $R$ разів.

На відміну від моделей одновимірних дискретних сигналів, моделі векторних послідовностей характеризуються далеко більшими комбінаційними можливостями кодування сигналів й простішими методами побудови. Повні сім'ї «зіркових» ІКВ зручно представляти у вигляді наборів послідовно впорядкованих за кільцевою схемою векторів однакового складу, взаємне переміщення яких всередині кільцевої структури утворюють нові варіанти векторних ІКВ [8]. Геометрично множинам повних сімей векторних ІКВ взаємно однозначно відповідають множини координат цих векторів в циклічній системі відліку їх величин на поверхні тороїду відповідної розмірності [8]. Встановлено, що повні сім'ї векторних зіркових ІКВ складаються із 20 варіантів для $n$ =5 і 156 варіантів $n$ =7 з точністю до реверсування порядку векторів у кільцевій послідовності і переставляння числових значень їх компонент всередині кожного з векторів. Наприклад, пара зіркових ІКВ-послідовностей {(1,3), (1,1), (2,3), (0,3), (3,3)} і {(1,3), (3,3), (1,1), (0,3), (2,3)} відрізняються між собою лише взаємним розміщенням елементів. Кожна з них описується параметрами ІКВ п'ятого ($n$=5) порядку, $m_1$=4, $m_2$=5, $R$=1, яка дає змогу п'ятьма векторами та множиною кільцевих сум, отриманих на цих векторах, здійснити покриття множини усіх 20-ти вузлових точок двовимірної решітки 4×5 рівно одним ($R$=1) способом. Практична реалізація передбачає використання оптимального кільцевого коду з монолітно-груповим розподілом однойменних символів "1" і "0" у кільцевих кодових комбінаціях [5]. Приклад побудови такого коду ілюструє таблиця 2.

Таблиця 2

| Оптимальний монолітно-груповий код на 2-ІКВ {(1,3), (1,1), (2,3), (0,3), (3,3)} | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Вектор | Вагові розряди векторного коду | | | | |
| | (1,3) | (1,1) | (2,3) | (0,3) | (3,3) |
| (0,0) | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| (0,1) | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| (0,2) | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| (0,3) | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| (0,4) | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| …….. | ….. | ….. | ….. | ….. | ….. |
| (3,4) | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

На відміну від традиційних методів перетворення форми інформації кодування сигналів в монолітно-груповому коді усі дозволені кодові комбінації складаються щонайбільше із двох груп однойменних символів. В оптимальному монолітно-груповому коді число усіх можливих комбінацій з таким способом розподілу однойменних символів у кодових комбінаціях збігається з кількістю різних кільцевих сум. За наявності вищезгаданих обмежень цей код набуває статусу оптимального, що дозволяє використовувати його властивості для подолання інформаційної та структурної надмірності під час побудови дискретних сигналів в радіопристроях і системах зв'язку.

В основу запропонованого методу закладено принцип оптимізації вагової системи $n$-позиційного коду з $t$- вимірними ваговими розрядами, значеннями яких є вектори $t$ – вимірної ІКВ-послідовності. При цьому забезпечується можливість покриття множиною лінійних комбінацій, утворених комбінаційним додаванням будь-якого числа послідовно впорядкованих базових $t$-вимірних векторів ІКВ-послідовності, множини вузлів просторової решітки $t$-вимірного тора в $t$-вимірній циклічній системі координат. Додавання базових $t$-наборів здійснюється з урахуванням відповідних модулів $m_1$, $m_2$, ...$m_t$, числові значення яких пов'язані з параметрами $n$ і $R$ $t$-вимірної ІКВ-послідовності співвідношенням [5]:

$$\prod_{1}^{t} m_i = \frac{n(n-1)}{R} \quad \text{або} \quad \prod_{1}^{t} m_i = \frac{n(n-1)}{R} + 1 \; ; \quad (m_1, m_2, \ldots m_t) = 1 \qquad (3)$$

Векторні модульні суми утворюються на множині послідовно впорядкованих $t$-вимірних векторів монолітно-групового коду, які можуть складатися з будь-якого числа послідовно впорядкованих за кільцевою схемою векторів. Поділ оптимальних монолітно-групових кодових послідовностей на кластери за деякими формальними ознаками запропоновано в [2].

## Висновки

Опрацьовано загальний принцип побудови оптимальних дискретних сигналів за допомогою векторних ІКВ, що дозволяє поліпшити якісні характеристики сигналів за такими показниками як коректувальна здатність циклічного коду, функція автокореляції імпульсних сигналів, самокоректувальна спроможність монолітно-групового коду. Найвищої завадостійкості набувають ІКВ -послідовності, в яких кількість різнойменних бінарних символів відрізняється між собою не більше ніж на один символ. Векторні моделі оптимальних дискретних сигналів, включно з кластером «зіркових» комбінаторних конфігурацій за тонкою структурою та чисельністю варіантів значно перевершують класичні аналоги. Досліджено зв'язок векторних ІКВ з просторовими циклічними групами $t$- вимірних тороїдів і з обертовою симетрією, яка відіграє об'єднавчу роль в опрацюванні єдиного підходу до синтезу векторних ІКВ. Описані моделі дають змогу виправляти до ($S_n$-3)/4 помилок, розробляти різні стратегії боротьби з помилками та виявляти сигнали при відношенні сигнал/шум менше 1. Обертова симетрія відіграє об'єднавчу роль в опрацюванні єдиного підходу до синтезу теоретично незчисленних множин оптимальних одно- й багатовимірних дискретних сигналів. Векторні ІКВ дають змогу розширити сферу фундаментальних і прикладних досліджень в радіоелектроніці і суміжних галузях знань, водночас збагачуючи потенційні можливості сучасної комбінаторної науки.

### Перелік посилань


1. Hall M. Jr. Combinatorial Theory / M. Jr. Hall. – Blaisell Publishing Company, 1967. – 470 p.
2. Різник В. В. Синтез оптимальних комбінаторних систем / В. В. Різник. – Львів : Вища школа, 1989. – 165 с.
3. Різник В. В. Комбінаторна оптимізація систем на основі використання спряжених симетричних та асиметричних структур / В. В. Різник // Електротехнічні та комп'ютерні системи. – 2014. – № 13(89). – с. 40-45.
4. Riznyk V. V. Systems Optimization Prospected from Torus Cyclic Groups / V. V. Riznyk // New Development in Pure and Applied Mathematics. – 2015. – Vienna, Austria – pp. 115-119. Available at: http://www.inase.org/library/2015/vienna/bypaper/MAPUR/MAPUR-16.pdf
5. Різник В. В. Моделі оптимальних радіосистем на векторних комбінаторних конфігураціях / В. В. Різник // Вісник НТУУ «КПІ». Серія Радіотехніка, Радіоапаратобудування. – 2015. – № 60. – с. 45-58.
6. Ризнык В.В. Об одном способе оптимального построения дискретных систем /

В. В. Ризнык // Электроника и моделирование. – 1975. – Вып. 8. – С.12-15.

7. Barker R. H. Group Synchronization of Binary Digital Systems. In: Communication Theory / R. H. Barker, W. Jackson, ed. – New York : Academic Press, 1953. – pp. 273-287.

8. Різник В. В. Оптимальні коди на векторних комбінаторних конфігураціях / В.В.Різник // Вісник НУЛП «Інформаційні системи та мережі». – 2015. – № 814. – с. 130-138.

## References

1. Hall M. Jr.(1967) Combinatorial Theory. Blaisell Publishing Company, 470 p.
2. Riznyk V. V. (1989) Syntez optymalnykh kombinatornykh system [Synthesis of the combinatorial optimal systems]. Lviv, Vyshcha shkola, 165 p.
3. Riznyk V. V. (2014) Combinatorial optimization of systems based on symmetric and asymmetric structure usage. Elektrotekhnichni ta komp'iuterni systemy, No 13(89), pp. 40-45 (in Ukrainian).
4. Riznyk V. V. (2015) Systems Optimization Prospected from Torus Cyclic Groups. New Development in Pure and Applied Mathematics, Vienna, Austria, March 15-17, P.115-119.
5. Riznyk, V. V. (2015) Models of optimum radio-systems on the vector combinatorial configurations. Visn. NTUU KPI, Ser. Radioteh. radioaparatobuduv., no. 60, pp. 45-58. (in Ukrainian).
6. Riznyk V. V. (1975) Ob odnom sposobe optimal'nogo postroyeniya diskretnykh system [A method of the optimum design of discrete systems]. Elektronika i modelirovanie, No 8, pp.12-15.
7. Barker R. H. (1953) Group Synchronization of Binary Digital Systems. In: Communication Theory (W. Jackson, ed.). Academic Press, New York, pp. 273-287.
8. Riznyk V. V. (2015) Optymalni kody na vektornykh kombinatornykh konfihuratsiiakh [Optimum codes on vector combinatorial configurations]. Visnyk NU "Lvivska politekhnika". Informatsiini systemy ta merezhi, No 814, pp.130-138.

*Різник В. В.* ***Моделі оптимальних дискретних сигналів на векторних комбінаторних конфігураціях.*** *Запропоновано метод побудови оптимальних дискретних сигналів, який базується на новій комбінаторній конструкції – ідеальних кільцевих векторних послідовностях (кластерах ІКВ). Виявлений великий клас дво- та багатовимірних комбінаторних конструкцій, які перевершують класичні моделі дискретних систем за чисельністю й багатоманітністю варіантів тонкої структури з теоретично необмеженими верхніми значеннями порядку та розмірності. Показано, що унікальні властивості останніх закодовані в тонкій структурі обертової симетрії тору. Наведені приклади побудови оптимальних векторних дискретних сигналів і кодових послідовностей, призначених для проектування сучасних систем зв'язку, навігації й розвитку векторної комп'ютерної індустрії.*

***Ключові слова:*** *обертова симетрія, кільцева векторна послідовність, циклічна група, принцип оптимальних структурних відношень, алгебра в'язанок, радіосигнал, кодова послідовність, функція автокореляції, завадостійкість, оптимальний монолітний код, тор.*

*Ризнык В. В.* ***Модели оптимальных дискретных сигналов на векторных комбинаторных конфигурациях.*** *Предлжен метод построения оптимальных дискретных сигналов, основанный на новой комбинаторной конструкции – идеальных кольцевых векторных последовательностях (кластерах ІКВ). Обнаружен большой класс двумер-*

*ных и многомерных комбинаторных конструкций, превышающих по количеству и многообразию тонкой структуры классические модели дискретных систем с теоретически неограниченными верхними значениями порядка и размерности. Показано, что уникальные свойства ІКВ закодированы в тонкой структуре вращательной симметрии тора. Приведены примеры построения оптимальных векторных дискретных сигналов и кодовых последовательностей, предназначенных для проектирования современных систем связи, навигации и развития векторной компютерной индустрии.*

***Ключевые слова:*** *вращательная симметрия, кольцевая векторная последовательность, циклическая группа, принцип оптимальных структурных отношений, алгебра вязанок, радиосигнал, кодовая последовательность, функция автокорреляции, помехоустойчивость, оптимальный монолитный код, тор.*

*Riznyk V.* ***Models of optimum discrete signals on the vector combinatorial configurations.*** *Method for construction of optimum discrete signals, based on a new conceptual combinatorial model of the systems - Ideal Ring Vector sequences (clusters of the IRV) is proposed. IRV clusters are cyclic ordered sequences of t- integer sub-sequences of sequence, which form perfect relationships of t-dimensional partitions over a virtual t-dimensional lattice covered surface of a finite space interval. The sums of connected sub-sequences of an IRV enumerate the set of t- coordinates specified with respect to cyclic frame reference exactly R-times. This property makes IRVs useful in applications, which need to partition multidimensional objects with the smallest possible number of intersections. There are discover a great class of new two- and multidimensional combinatorial constructions, which being in excess classic models of discrete systems with respect to number and combinatorial varieties with theoretically non-limited values of upper boundaries on order of dimensionality –IRV. It shows that remarkable properties of IRVs encoded in fine structure of torus circular symmetry. There are regarded basic properties these models and made shortest comparative analysis of the models with classical models. Indicate that the IRVs to be in exceed of difference sets multiply, and set of the classical difference sets is subset of the IRVs. Some of useful examples for constructing of the optimum discrete signals, error-correcting codes, and ring monolithic optimum vector codes using IRVs are considered. The problem statement involves development the regular method for construction of the optimum discrete signals using two- and multidimensional IRVs. The favorable technical merits of IRVs sets named "Gloria to Ukraine Stars", which remarkable properties hold for the same set of the IRVs in varieties permutations of its terms is demonstrated, and method for design of two- or multidimensional vector signals coded based on the optimum binary monolithic code is presented. Proposed vector models of discrete signal optimization provide, essentially, a new approach to generalize them to great class of optimized problems in radio-telecommunications, navigation and information technology. Moreover, the optimization embedded in the underlying combinatorial models. The favourable qualities of the Ideal Ring Vector sequences provide breakthrough opportunities to apply them to numerous branches of science and advanced technology, with direct applications to vector data telecommunications, signal processing, encoded design,and information technology. Structural perfection and harmony exist not only in the abstract models but in real world also.*

***Key words:*** *circular symmetry, ring vector sequence, cyclic group, optimum structural relationships principle, bundle's algebra, radio-signal, code sequence, function of autocorrelation, noise immunity, optimum monolithic code, torus.*