

## ЗАСТОСУВАННЯ НОРМАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ДО АНАЛІЗУ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

*Ніжебецька Ю.Х.*

*Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна*

Аналіз лінійних систем, динамічну рівновагу яких описують системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, має важливе значення при проектуванні радіотехнічних, механічних, акустичних та ін. пристроїв. Для нелінійних систем розв'язання задачі аналізу також (в більшості випадків) зводиться до різноманітних методів лінеаризації.

Серед відомих методів аналізу систем лінійних диференціальних рівнянь найбільш поширеними є методи, основані на перетвореннях Лапласа і Фур'є. Але для аналізу сигналів, їх стиснення, передачі, архівації перетворення Фур'є є не найліпшим. Це вимагає пошуку методів розв'язання диференціальних рівнянь при представленні сигналів у вигляді розкладів (перетворень) за іншими функціями (трансформантами Уолша, косинусними і ін.).

### Розв'язання диференціальних рівнянь при використанні нормального перетворення

Теорема про диференціювання для нормального перетворення має вигляд

$$\text{якщо } \overline{X} \div \overline{X}_\xi, \text{ тоді } \overline{X} \frac{d}{dt} \div \overline{\overline{W}}_{\Sigma N} \overline{\overline{D}}_H \overline{X}_\xi,$$

де  $\overline{X}_\xi$  – спектр дискретизованого вхідного сигналу  $\overline{X}$ ,  $\overline{\overline{W}}_{\Sigma N}$  – матричний оператор нормального перетворення,  $\overline{\overline{D}}_H$  – нормована матриця похідних.

Отже, вона значно складніша, ніж теорема диференціювання для перетворення Фур'є, тому що для нормального перетворення матричний оператор  $\overline{A} = \overline{\overline{W}}_{\Sigma N} \overline{\overline{D}}_H$  має не діагональний вигляд, на відміну від  $Diag[kj\omega_1]$  для перетворення Фур'є.

Систему диференціальних рівнянь виду

$$a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

можна привести до узагальненого матричного рівняння  $\overline{\overline{A}}_\Sigma \overline{Y}_\xi = \overline{\overline{B}}_\Sigma \overline{X}_\xi$ , звідки спектр нормального перетворення розв'язку має вигляд

$$\overline{Y}_\xi = \left( \overline{\overline{A}}_\Sigma \right)^{-1} \cdot \overline{\overline{B}}_\Sigma \cdot \overline{X}_\xi. \quad (1)$$

Отже, рішення задачі аналізу (з подальшим зворотним перетворенням спектра (1)) зводиться до обернення матриці  $\overline{A}_\Sigma$ , що створює звичайні для чисельних методів складності, пов'язані з її зумовленістю або порядком.

Тому для спрощення обчислень було запропоновано використовувати розклад матриці  $\overline{A}$  на власні значення та власні вектори

$$\overline{A} = \overline{\Pi}^* \cdot \overline{\lambda} \cdot \overline{\Pi}^T, \quad (2)$$

де  $\overline{\lambda}$  – діагональна матриця власних значень;  $\overline{\Pi}^T$  – матриця власних векторів  $\overline{\pi}_i^{-T}$ , рядками якої є власні вектори матриці  $\overline{A}$ ;  $\overline{\Pi}^*$  – матриця власних векторів  $\overline{\pi}_i^{-*}$ ; \* – знак комплексного спряження.

Для будь-якого перетворення з дійсним ядром власні значення їх матриць  $\overline{A}$  тотожні і лежать на одиничному колі з центром (0, 1). Власні вектори при цьому різні.

Рівняння (1) із врахуванням (2) можна звести до наступного виду

$$\overline{Y}_\xi = \overline{\Pi}^* \cdot \overline{K}(\overline{\lambda}) \cdot \overline{\Pi}^T \cdot \overline{X}_\xi, \quad (3)$$

де  $\overline{K}(\overline{\lambda})$  – діагональна матриця дискретних функцій ланцюга, що пов'язує спектри реакції  $\overline{Y}_\xi$  та впливу  $\overline{X}_\xi$ ,  $i$ -й елемент діагоналі якої має вигляд

$$K(\lambda_i) = \frac{a_m \cdot (\lambda_i)^m + a_{m-1} \cdot (\lambda_i)^{m-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda_i + a_0}{b_n \cdot (\lambda_i)^n + b_{n-1} \cdot (\lambda_i)^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \lambda_i + b_0},$$

де  $K(\lambda_i)$  може бути отримано заміною в операторному виразі функції ланцюга  $K(p)$  змінного  $p$  на дискретне значення  $\lambda_i$ .

Часто при аналізі ступеню подібності і відмінності сигналів такий аналіз зручно проводити в області спектрів ортогональних перетворень з дійсним ядром (Адамара, Хаара, косинусного, REX, нормального і т.п.), у той час як аналіз лінійних систем (як і кусочно-лінійний аналіз систем нелінійних) зручно проводити в області трансформант перетворень Фур'є. Це ускладнює задачу, оскільки при цьому необхідно оперувати різними поняттями і представленнями (характерними для двох різних базисів), зв'язок між якими не є простим.

При використанні алгоритму (3) аналіз сигналів проводиться в базисі нормального ортогонального перетворення, спектр якого  $\overline{X}_\xi$  вважається вхідним сигналом. Цей сигнал перетворюється дискретним нормальним ортогональним перетворенням  $(\overline{W}_{\Sigma N})^T$  в область кратних спектрів, для яких розв'язання диференціальних рівнянь не являє складності, оскільки існує (відмінна за формою, але аналогічна базису Фур'є по структурі) теорема про згортку, теореми диференціювання та інтегрування оригіналів і т.і.

**Підвищення точності нормального перетворення для аналізу лінійних систем**

При розв'язанні ряду задач, таких як задачі аналізу, обробки, передачі та архівації сигналів в області ортогональних перетворень операцію диференціювання зводять до заміни на розділену на величину кроку різницю двох відліків сигналу

$$\frac{d}{dt}x \rightarrow x(k) - x(k-1). \quad (4)$$

Однак врахування трьох чи більше відліків досліджуваного сигналу призведе до множини більш точних немінимальних формул різницевого рівнянь.

Такі немінимальні формули при врахуванні трьох точок відліків сигналу мають вигляд:

$$\frac{d}{dt}x \rightarrow \frac{3x(k) - 4x(k-1) + x(k-2)}{2}; \quad (5 \text{ а})$$

$$\frac{d}{dt}x \rightarrow \frac{x(k+1) - x(k-1)}{2}; \quad (5 \text{ б})$$

$$\frac{d}{dt}x \rightarrow \frac{-x(k+2) + 4x(k+1) - 3x(k)}{2}. \quad (5 \text{ в})$$

У випадку обчислення похідних від функції  $x(k)$  по чотирьох відлікам, одержимо формули, аналогічні (4) у вигляді:

$$\frac{d}{dt}x \rightarrow \frac{2x(k+3) - 9x(k+2) + 18x(k+1) - 11x(k)}{6}; \quad (6 \text{ а})$$

$$\frac{d}{dt}x \rightarrow \frac{-x(k+2) + 6x(k+1) - 3x(k) - 2x(k-1)}{6}; \quad (6 \text{ б})$$

$$\frac{d}{dt}x \rightarrow \frac{2x(k+1) + 3x(k) - 6x(k-1) + x(k-2)}{6}; \quad (6 \text{ в})$$

$$\frac{d}{dt}x \rightarrow \frac{11x(k) - 18x(k-1) + 9x(k-2) - 2x(k-3)}{6}, \quad (6 \text{ г})$$

На рис. 1 показані власні значення перетворення, для якого похідна обчислена по формулі (4) (коло 1), (5 а) (кардіоїда 2), а також для похідних по формулах (6 в) і (6 г) (кардіоїди 3 та 4 відповідно).

Як було відзначено вище, власні значення матриці  $\bar{\lambda}$  для всіх дискретних перетворень збігаються у тому випадку, якщо операція диференціювання замінюється однією різницевою формулою обчислення першої похідної.

Таким чином, особливості теореми про диференціювання будуть залежати тільки від використаного різницевого рівняння і не залежати від виду перетворення, по якому відбувається аналіз.

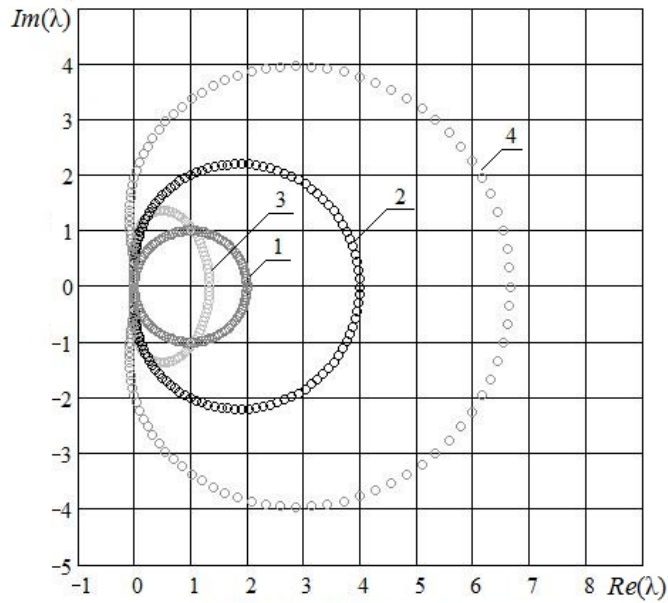
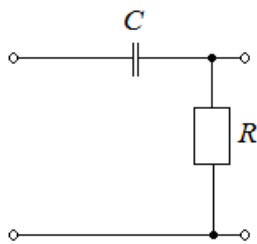


Рис.1. Множини власних значень матриці  $\bar{A}$  для різних формул обчислення першої похідної

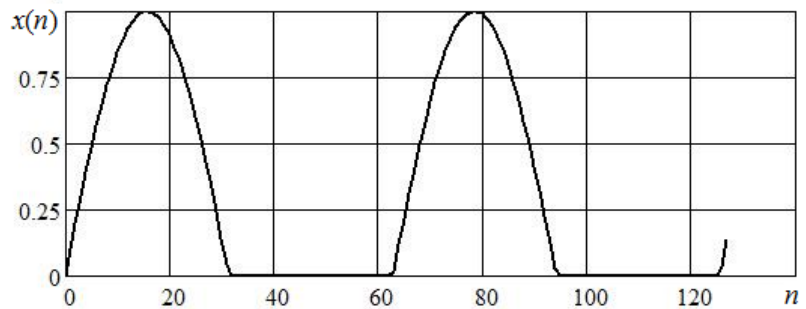
Для ілюстрації деяких можливостей методу аналізу лінійних диференціальних рівнянь за використанням нормального перетворення (який на відміну від перетворення Фур'є проводиться на комплексних власних числах  $\lambda_i$ , а не на частотах  $j\omega_1 n$ ), розглянемо простий приклад.

Нехай на вхід кола рис. 2а надходить обмежене знизу гармонійне коливання (рис. 2б)

$$x(n) = \begin{cases} \sin\left(\frac{n}{10}\right), & \text{при } 0 \leq n < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{при } \frac{T}{2} \leq n < T \end{cases}$$



а



б

Рис. 2. Досліджуване електричне коло та вхідний сигнал

Знайдемо коефіцієнт передачі кола при нормованих значеннях параметрів ( $R=1, C=1$ ):  $K(p) = \frac{p}{1+p}$ , звідки, замінюючи  $p$  на  $\lambda_n$ , одержимо

$$K(\lambda_n) = \frac{\lambda_n}{1 + \lambda_n}$$

На рис. 3 та 4 наведена реакція для різних формул обчислення похідних (крива 1 – для розділеної різниці двох відліків вхідного сигналу; криві 2 і 3 для формул (5 а) і (5 в); криві 4 і 5 для формул (6 а) і (6 б)). Очікуване зменшення похибки обчислень із зростанням числа точок, по яких виконується обчислення похідних, легко помітити по рис. 5.

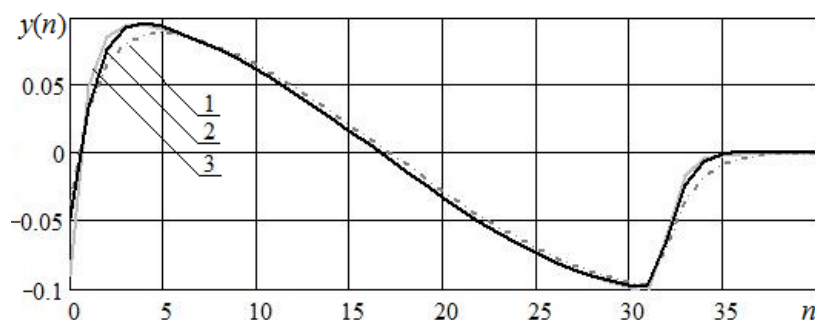


Рис. 3. Реакція кола при обчисленні похідної за формулами (4), (5 а) та (5 в)

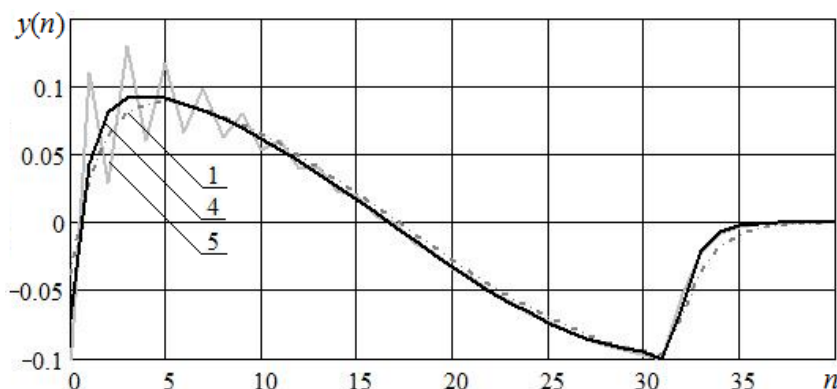


Рис. 4. Реакція кола при обчисленні похідної за формулами (4), (6 а) та (6 б)

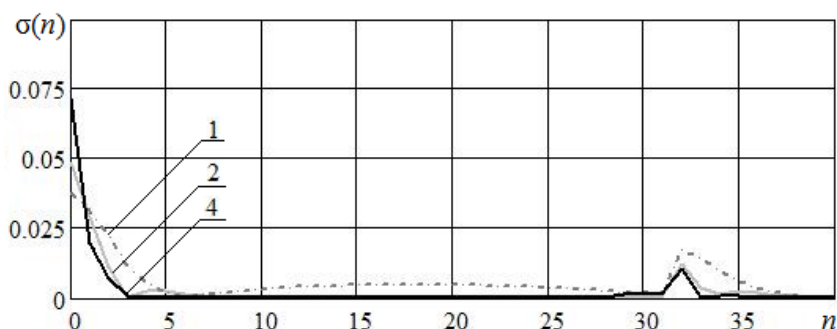


Рис. 5. Модуль абсолютної похибки при обчисленні похідної за формулами (4), (5 а) та (6 а)

**Аналіз подібності і розбіжності реакції лінійної системи до еталонного сигналу за допомогою нормального перетворення**  
 Для нормального перетворення дійсного еталонного сигналу  $\bar{X}_t$  об-

числення реакції кола можна виконати за виразом

$$\bar{Y}_t = \bar{W}_{\Sigma N x}^T \bar{\Pi}^* \bar{K}(\lambda) \bar{\Pi}^T \bar{W}_{\Sigma N x} \bar{X}_t. \quad (7)$$

Якщо тепер у вираз (7) підставити

$$\bar{X}_\xi = \bar{W}_{\Sigma N x} \bar{X}_t \text{ та } \bar{Y}_\xi = \bar{W}_{\Sigma N y} \bar{Y}_t,$$

(де  $\bar{W}_{\Sigma N y}$  – дискретний оператор нормального перетворення), але вже для реакції  $\bar{Y}_t$  на еталонну дію  $\bar{X}_t$ , одержимо:

$$\bar{Y}_\xi = \bar{W}_{\Sigma N y} \bar{W}_{\Sigma N x}^T \bar{\Pi}^* \bar{K}(\lambda) \bar{\Pi}^T \bar{X}_\xi \quad (8)$$

Позначивши в (8)  $\bar{W}_{\Sigma N 1} = \bar{W}_{\Sigma N y} \bar{W}_{\Sigma N x}^T \bar{\Pi}^*$  та  $\bar{W}_{\Sigma N 2} = \bar{\Pi}^T$ , отримаємо вираз для нормальних перетворень вхідного та вихідного сигналів системи з коефіцієнтом передачі  $K(\lambda)$

$$\bar{Y}_\xi = \bar{W}_{\Sigma N 1} \bar{K}(\lambda) \bar{W}_{\Sigma N 2} \bar{X}_\xi \quad (9)$$

При цьому, якщо на вхід еталонної лінійної системи подається еталонний сигнал (спектр його має лише одну ненульову трансформанту з номером 1), то на виході такої системи отримаємо еталонний сигнал, спектр якого  $\bar{Y}_\xi$  містить також лише одну ненульову трансформанту. Відхилення вхідного сигналу  $\bar{X}_t$  від еталонного дадуть спектр з іншими ненульовими трансформантами спектру  $\bar{X}_\xi$ . Ступінь спотворення вхідного сигналу можна оцінити за коефіцієнтом трансформант спектру  $\bar{X}_\xi$ , а вихідного – за коефіцієнтом трансформант спектру  $\bar{Y}_\xi$ .

Важливим є також те, що за виразом (9) можна оцінювати ступінь спотворень вихідного сигналу при наявності розкиду параметрів компонентів системи.

Проілюструємо запропоновані алгоритми оцінки якості лінійної системи на простому прикладі, обраному виходячи з міркувань наочності та простоти перевірки отриманих результатів.

Нехай коло рис. 6 має нормовані параметри  $g_1 = g_2 = 1$ ;  $C_1 = C = 1$ ;  $C_2 = 2C = 2$ . Коефіцієнт передачі напруги такого кола має вигляд:

$$K_{31}(\lambda) = \frac{2\lambda^2 + 2\lambda + 1}{2\lambda^2 + 4\lambda + 1}.$$

Нехай вхідний еталонний сигнал має вигляд рис. 7. Для цього сигналу побудуємо матричний оператор дискретного нормального ортогонального перетворення.

Для еталонного сигналу спектри як вхідного (рис. 8а), так і вихідного (рис. 8б) сигналів мають лише перші трансформанти.

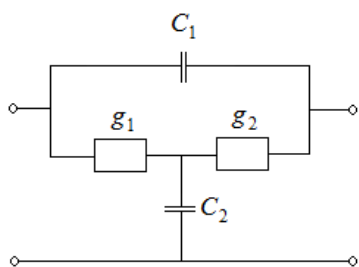


Рис. 6. Досліджуване коло

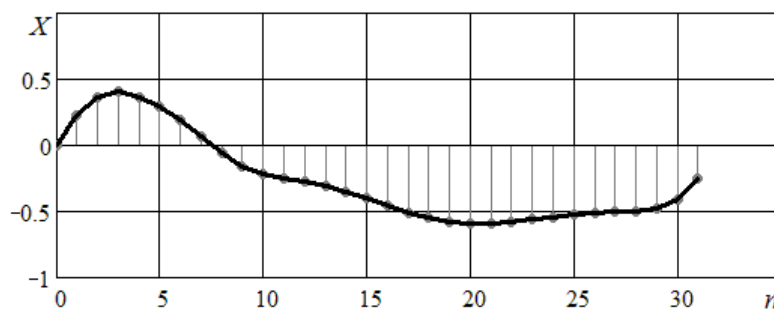


Рис 7. Вхідний еталонний сигнал

Ясно, що в разі відхилень “вхідного сигналу”  $\bar{X}_\xi$  від еталону, спектр  $\bar{Y}_\xi$  буде мати ненульові трансформанти з номерами, відмінними від одиниці.

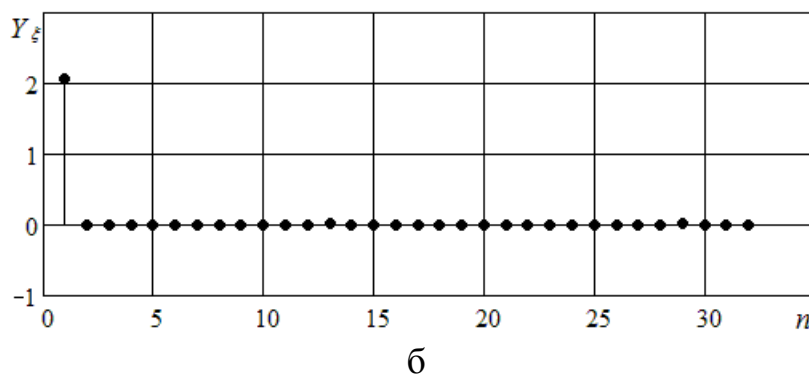
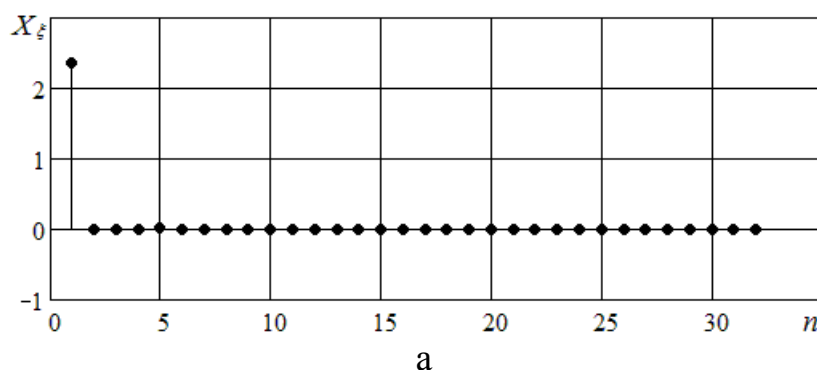


Рис. 8. Спектр “вхідного сигналу”  $\bar{X}_\xi$  (а) та “вихідного сигналу”  $\bar{Y}_\xi$  (б).

Для оцінки впливу розкиду параметрів кола, схему якого наведено на рис. 6, розглянемо випадок, коли відхилення ємностей та провідностей становлять  $\pm 10\%$ , причому для простоти нехай знак відхилення для ємностей буде однаковим, так як і окремо для провідностей.

Звичайно, значення параметрів можуть бути будь-якими в межах поля допуску. Для гладких залежностей функцій кола від параметрів компонентів кола “найгірший випадок” (тобто найбільше по модулю відхилення функції від номінального значення) буде на границях інтервалів. Для апроксимації залежності функції кола під параметрів компонентів оберемо най-

простішу лінійну модель розкладу функції кола в ряд Тейлора:

$$K_{31}(\Delta g, \Delta C_1, \Delta C_2) = K_0 + \alpha_1 \frac{\partial K}{\partial g} \Delta g + \alpha_2 \frac{\partial K}{\partial C_1} \Delta C_1 + \alpha_3 \frac{\partial K}{\partial C_2} \Delta C_2,$$

де  $K_0$  – номінальне значення функції кола при власному значенні  $\lambda = \lambda_i$ ;  $\Delta g, \Delta C$  – прирощення параметрів;  $\alpha$  – коефіцієнти, що враховують знак похідної: якщо похідна призводить до збільшення модуля функції кола, то  $\Delta g, \Delta C$  беруться зі знаком плюс, якщо навпаки – то зі знаком мінус.

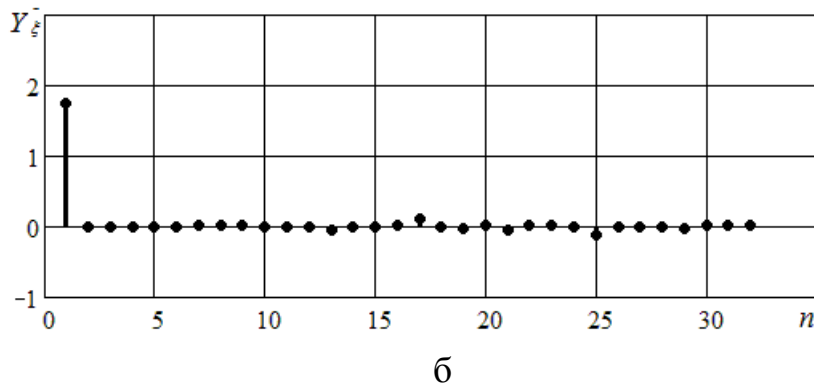
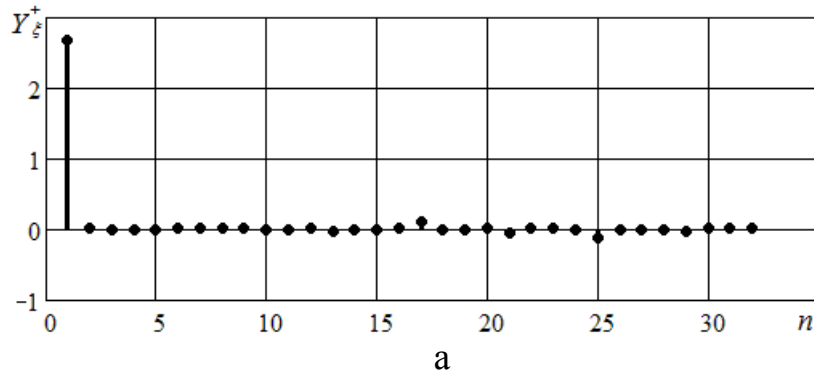


Рис. 9. Спектр сигналу при проходженні через коло з відхиленнями параметрів компонентів на +10% (а) та на -10% (б).

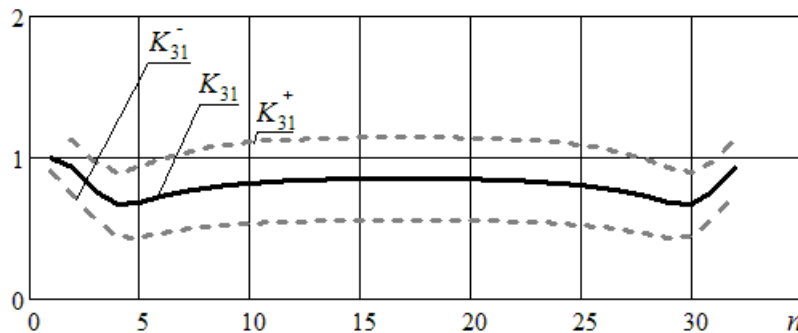


Рис. 10. Функція кола  $K_{31}(\lambda)$  та її граничні значення при відхиленнях значень параметрів кола на +10% та на -10%.

Для знайдених найгірших значень функції кола було знайдено реакцію



на еталонний сигнал  $\bar{Y}_\xi$ , спектри нормальних трансформант яких наведено на рис. 9а (при відхиленні величин ємностей і провідностей на +10 %) і на рис. 9б (при відхиленні величин ємностей і провідностей на -10 %).

Коефіцієнти трансформант спектру вихідного сигналу при відхиленнях значень параметрів кола на +10% та на -10% відповідно становлять  $k_{mp y}^+ = 0,068$ ,  $k_{mp y}^- = 0,113$ . Саму функцію кола  $K_{31}(\lambda)$  та її граничні значення при граничних значеннях величин параметрів наведено на рис. 10.

### **Висновки**

1. Метод розв'язання диференційних рівнянь в області ортогональних перетворень з дійсним ядром був поширений на нормальне перетворення.

2. Теорема про диференціювання для нормального перетворення значно складніша, ніж теорема диференціювання для перетворення Фур'є.

3. Обернення матриці  $\bar{A}$  викликає значні обчислювальні труднощі. Тому для спрощення обчислень виконують розклад матриці  $\bar{A}$  на власні власні значення  $\lambda_i$  та власні вектори  $\bar{\pi}_i$ .

3. Розв'язання диференційних рівнянь в базисі нормального ортогонального перетворення не представляє складності, оскільки існує (відмінна за формою, але аналогічна базису Фур'є по структурі) теорема про згортку, теореми диференціювання та інтегрування оригіналів і т.і.

4. Розділена на величину кроку різниця двох відліків сигналу не є єдиним шляхом обчислення похідної. Врахування більшої кількості відліків досліджуваного сигналу призведе до множини більш точних немінімальних формул різницевих рівнянь. Результатом є підвищення точності методу аналізу лінійних систем в області нормального перетворення, що може призвести до розширення можливостей означеного методу та області його застосувань.

5. Запропонована методика кратного нормального перетворення дозволяє чисельно оцінювати інтегральне спотворення, викликане як випадковими відхиленнями вхідного сигналу, так і лінійні спотворення, викликані статистичним розкидом параметрів компонентів лінійного кола.

### **Література**

1. Абакумов В.Г., Рибін О.І., Сватош Й. Біомедичні сигнали. Генезис, обробка, моніторинг – К.: Нора-прінт, 2001. – 516 с.

2. Ніжебецька Ю.Х., Рибін О.І., Ткачук А.П., Шарпан О.Б. Нормальне дискретне перетворення сигналу довільної форми // Наукові вісті НТУУ «КПІ» – 2008. – №4. – с.34-40.

3. Ніжебецька Ю.Х., Рибін О.І., Шарпан О.Б. Підвищення точності ортогональних перетворень для аналізу лінійних систем // Наукові Вісті НТУУ «КПІ». – 2008. – №5.

4. Рибін О.І., Ніжебецька Ю.Х., Рибіна І.О. Аналіз лінійних систем з використанням кратних перетворень // Вісник НТУУ «КПІ». – Серія Радіотехніка. Радіоапаратуробудування. – 2010. – Випуск 40.

*Ніжебецька Ю.Х. Застосування нормального перетворення до аналізу лінійних систем* Запропонований метод застосування дискретного оператора нормального перетворення для аналізу проходження сигналів через лінійні системи. Проводиться аналіз використання немінімальних формул обчислення, що призводить до підвищення точності методу ортогональних перетворень. Запропонований алгоритм кратного перетворення, що дозволяє оцінювати спотворення, викликане відхиленнями вхідного сигналу чи статистичним розкидом параметрів компонентів лінійного кола.

**Ключові слова:** кратне перетворення, ортогональне перетворення, алгоритм, спектр, лінійні системи.

*Нижебецкая Ю.Х. Применение нормального преобразования к анализу линейных систем.* Предложен метод применения дискретного оператора нормального преобразования для анализа прохождения сигналов через линейные системы. Проведен анализ использования неминимальных формул вычисления, что приводит к повышению точности метода ортогональных преобразований. Предложен алгоритм кратного преобразования, что позволяет оценивать искажения, вызванные отклонениями входного сигнала или статистическим разбросом параметров компонентов линейной цепи.

**Ключевые слова:** кратное преобразование, ортогональное преобразование, алгоритм, спектр, линейные системы.

*Nizhebetska Y.Kh. Analysis of the linear systems with the use of normal transform.* The method of the use of discrete operator of normal transform is offered for the analysis of the signal pass through the linear systems. The analysis of application of the nonminimum derivation formulas using the method of the orthogonal transformation is realized. It leads to the increasing of the precision of the chosen method. Algorithm of multiple transform is offered, that enable to estimate distortion caused by the rejections of entrance signal or statistical variation of parameters of components of linear circle.

**Keywords:** multiple transform, ortogonal transform, algorithm, spectrum, linear system.