

# Математическая модель цифрового оптико-электронного спектроанализатора

*Колобродов В. Г., Тымчик Г. С., Колобродов Н. С.*

Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт им. И. Сикорского”, г. Киев, Украина

E-mail: [kolobrodov\\_n@ukr.net](mailto:kolobrodov_n@ukr.net)

Целью статьи является разработка физико-математической модели цифрового оптико-электронного спектроанализатора, в котором входной сигнал модулируется пространственно-временным модулятором света, а выходной сигнал регистрируется матричным приемником излучения с последующей компьютерной обработкой. На основе этой модели получены выражения для расчета импульсного отклика и передаточной функции спектроанализатора, которые позволяют анализировать и оптимизировать его основные характеристики.

*Ключевые слова:* оптико-электронный спектроанализатор; пространственный модулятор света; матричный приемник излучения

## Введение

Оптические методы обработки информации занимают значительное место в информационных системах разного предназначения. Интерес к оптическим методам и системам обработки информации обусловлен высокой информационной ёмкостью светового поля как носителя информации, высокой скоростью распространения оптических сигналов и сравнительно простым осуществлением целого ряда интегральных преобразований над двухмерными массивами [1]. Среди оптических систем обработки информации значительное место занимают когерентные оптические спектроанализаторы (КОС), которые предназначены для пространственно-частотного анализа пространственных (двухмерных) сигналов [2]. Теоретические основы работы таких спектроанализаторов базируются на уравнении дифракции Френеля, что отражено в ряде монографий и статей [3, 4].

Обобщенная схема КОС состоит из четырех компонентов: осветительной системы, которая равномерно освещает входной транспарант; входного транспаранта (пространственного модулятора света), амплитудный коэффициент пропускания которого определяется амплитудой исследуемого сигнала; фурье-объектива, который осуществляет двухмерное преобразование Фурье; регистратора спектра сигнала, в качестве которого используют матричные приёмники излучения [3].

В качестве входного транспаранта до недавнего времени использовали диафрагмы и фотопластинки, пропускание которых соответствует исследуемому сигналу. Такие статические транспаранты суще-

ственно ограничивают возможность ввода в спектроанализатор входных сигналов, которые изменяются во времени и пространстве. Появление пропускающих жидкостно-кристаллических пространственных модуляторов света (ЖК ПМС, LC SLM — Liquid Crystal Spatial Light Modulators) позволяет изменять с помощью компьютера пропускание входного транспаранта во времени и пространстве [5]. Оптические спектроанализаторы, в которых входной транспарант и выходной регистратор сигнала имеют матричную структуру, называют цифровыми когерентными спектроанализаторами. В то же время отсутствуют исследования, связанные с особенностями использования таких модуляторов в КОС.

## 1 Постановка задачи

В данной статье исследуется математическая модель когерентного оптического спектроанализатора с целью оптимизации параметров входного пространственного модулятора света.

## 2 Физико-математическая модель оптического спектроанализатора

Обобщенная схема оптического спектроанализатора состоит из когерентного источника излучения, входного транспаранта, фурье-объектива и анализатора светового поля. Если транспарант расположен в передней фокальной плоскости  $x_1y_1$  фурье-объектива и

освещается плоской волной с амплитудой  $V_p$  (рис. 1), то распределение амплитуды поля в плоскости анализа  $x_3y_3$  описывается выражением [3]

$$V(x_3, y_3) = \frac{V_p}{j\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_0(x_1, y_1) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda f}(x_3x_1 + y_3y_1)} dx_1 dy_1 \quad (1)$$

где  $t_0(x_1, y_1)$  — функция амплитудного коэффициента пропускания транспаранта;  $f$  — фокусное расстояние объектива.

Анализ выражения (1) показывает, что комплексная амплитуда светового поля в задней фокальной плоскости фурье-объектива с точностью до постоянного множителя  $V_p/j\lambda f$  представляет собой пространственный спектр от амплитудного коэффициента пропускания  $t_0(x_1, y_1)$  транспаранта с пространственными частотами:

$$\nu_x = \frac{x_3}{\lambda f} \quad \nu_y = \frac{y_3}{\lambda f} \quad (2)$$

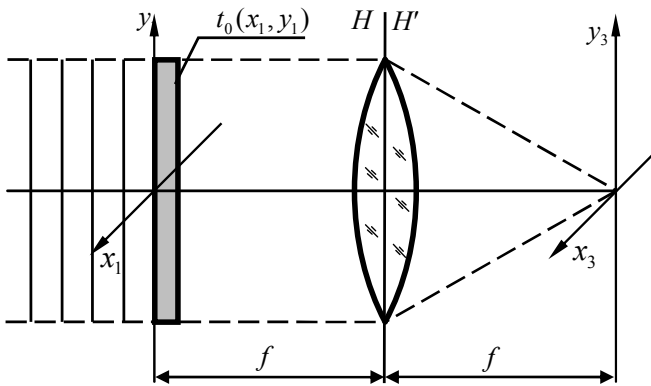


Рис. 1. Оптическая схема когерентного спектроанализатора, когда транспарант расположен в передней фокальной плоскости объектива

Амплитудный коэффициент пропускания входного транспаранта можно представить в виде

$$t_0(x_1, y_1) = t_m(x_1, y_1)t_s(x_1, y_1), \quad (3)$$

где  $t_m(x_1, y_1)$  — коэффициент пропускания модулятора;  $t_s(x_1, y_1)$  — функция, которая соответствует исследуемому сигналу.

Подставим функцию (3) в интеграл (1) и представим его в виде

$$\begin{aligned} V(x_3, y_3) &= \frac{V_p}{j\lambda f} F \{t_m(x_1, y_1)t_s(x_1, y_1)\} = \\ &= \frac{V_p}{j\lambda f} F [T_m(\nu_x, \nu_y) * T_s(\nu_x, \nu_y)] \end{aligned} \quad (4)$$

где  $F\{\}$  — оператор преобразования Фурье для пространственных частот (2);  $*$  — оператор свертки двух

функций;  $T_m(\nu_x, \nu_y)$  — двумерный спектр пропускания модулятора;  $T_s(\nu_x, \nu_y)$  — идеальный спектр исследуемого сигнала.

Анализ соотношения (4) показывает, что распределение амплитуды поля в плоскости анализа  $x_3y_3$  представляет собой свертку идеального спектра сигнала  $T_s(\nu_x, \nu_y)$  с пространственным спектром пропускания модулятора  $T_m(\nu_x, \nu_y)$ , какой можно рассматривать как импульсный отклик системы “входной транспарант — фурье-объектив”. Это означает, что спектр исследуемого сигнала искажается пространственным спектром модулятора.

### 3 Модель матричного пространственного модулятора света

Для определения пространственного спектра пропускания модулятора  $T_m(\nu_x, \nu_y)$  рассмотрим модель такого модулятора [5]. На рис. 2 представлена матричная структура модулятора размером  $X_m \times Y_m$  и периодом  $V_m \times W_m$ . Каждый пиксель имеет прозрачную часть размером  $\nu_m \times w_m$ .

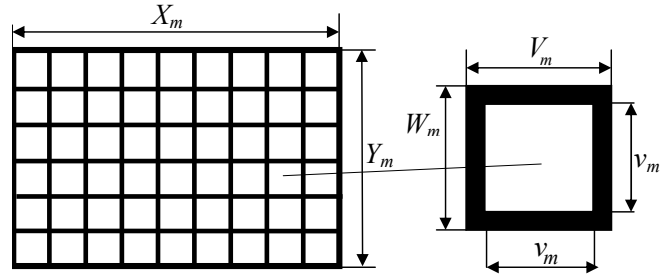


Рис. 2. Модель пропускающего матричного пространственного модулятора света

Для такой модели амплитудный коэффициент пропускания модулятора описывается функцией

$$\begin{aligned} t_m(x_1, y_1) &= \\ &= \left\{ \left[ \text{rect}\left(\frac{x_1}{\nu_m}\right) * \frac{1}{V_m} \text{comb}\left(\frac{x_1}{V_m}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x_1}{X_m}\right) \right\} \times \\ &\times \left\{ \left[ \text{rect}\left(\frac{y_1}{w_m}\right) * \frac{1}{W_m} \text{comb}\left(\frac{y_1}{W_m}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{y_1}{Y_m}\right) \right\} = \\ &= t_{mx}(x_1)t_{my}(y_1) \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\text{rect}(z)$  — rect-функция,

$$\text{rect}(z) = \begin{cases} 1, & \text{когда } |z| \leq 1/2 \\ 0, & \text{когда } |z| > 1/2 \end{cases}$$

$\text{comb}(z)$  — comb-функция,  $\text{comb}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(z - n)$ .

В формуле (5) выражения в квадратных скобках определяют импульсный отклик бесконечной матрицы, а выражения в фигурных скобках ограничивают ее размеры до величины  $X_m \times Y_m$ .

Найдем пространственный спектр одномерной функции  $t_{my}(y)$ , которую можно рассматривать как дифракционную решетку с периодом  $W_m$  и размером  $Y_m$  (рис. 3).

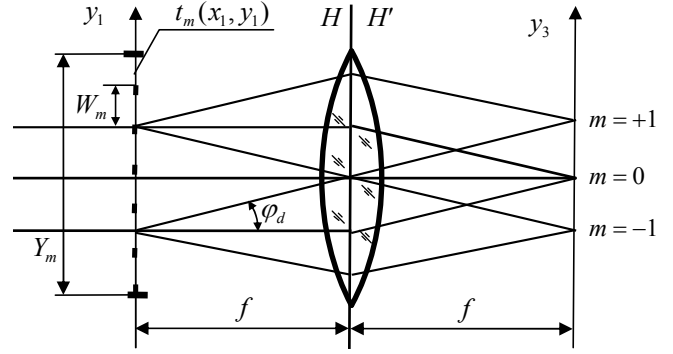


Рис. 3. Дифракция света на одномерном дискретном модуляторе света

$$\begin{aligned} T_{my}(\nu_y) &= F \{t_m(y_1)\} = F \left\{ \left[ \text{rect} \left( \frac{y_1}{w_m} \right) * \frac{1}{W_m} \text{comb} \left( \frac{y_1}{W_m} \right) \right] \text{rect} \left( \frac{y_1}{Y_m} \right) \right\} = \\ &= F \left\{ \left[ \text{rect} \left( \frac{y_1}{w_m} \right) * \frac{1}{W_m} \text{comb} \left( \frac{y_1}{W_m} \right) \right] \right\} * F \left\{ \text{rect} \left( \frac{y_1}{Y_m} \right) \right\} = \\ &= F \left\{ \left[ \text{rect} \left( \frac{y_1}{w_m} \right) \right] F \left\{ \frac{1}{W_m} \text{comb} \left( \frac{y_1}{W_m} \right) \right\} \right\} * F \left\{ \text{rect} \left( \frac{y_1}{Y_m} \right) \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

Пользуясь табл. 2.3 из монографии [6], имеем

$$F \left\{ \text{rect} \left( \frac{y_1}{w_m} \right) \right\} = w_m \text{sinc}(w_m \nu_y) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} F \left\{ \frac{1}{W_m} \text{comb} \left( \frac{y_1}{W_m} \right) \right\} &= \text{comb}(W_m \nu_y) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(W_m \nu_y - n) = \frac{1}{W_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left( \nu_y - \frac{n}{W_m} \right) \quad (8) \end{aligned}$$

$$F \left\{ \text{rect} \left( \frac{y_1}{Y_m} \right) \right\} = Y_m \text{sinc}(Y_m \nu_y) \quad (9)$$

где  $\text{sinc}(z)$  — sinc-функция,  $\text{sinc}(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ . После подстановки (7), (8), (9) в (6) получим

$$\begin{aligned} T_{ym}(\nu_y) &= \left[ w_y \text{sinc}(w_m \nu_y) \frac{1}{W_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left( \nu_y - \frac{n}{W_m} \right) \right] * \\ &* [Y_m \text{sinc}(Y_m \nu_y)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{my,n} \left( \nu_y - \frac{n}{W_m} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

#### 4 Влияние матричной структуры входного транспаранта на разрешающую способность КОС

Определим распределение амплитуды поля в плоскости спектрального анализа  $x_3 y_3$  КОС, который

использует одномерный пространственный модулятор света, который имеет пространственный спектр (10) амплитудного коэффициента пропускания  $t_{my}(y_1)$ . Подставим функцию (10) в выражение (4):

$$\begin{aligned} V(y_3) &= \frac{V_p}{j\lambda f} [T_{my}(\nu_y) * T_s(\nu_y)] = \\ &= \frac{V_p}{j\lambda f} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{my,n} \left( \nu_y - \frac{n}{W_m} \right) * T_s(\nu_y) \right] = \\ &= \frac{V_p}{j\lambda f} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{my,n} \left( \frac{y_3}{\lambda f} - \frac{n}{W_m} \right) * T_s(\nu_y) \right] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \left( \frac{y_3}{\lambda f} - \frac{n}{W_m} \right) \quad (11) \end{aligned}$$

Из выражения (11) видно, что распределение амплитуды светового поля  $V(y_3)$  представляет собой сумму максимумов  $V_n$ , амплитуда которых определяется функцией

$$\begin{aligned} V_n \left( \frac{y_3}{\lambda f} - \frac{n}{W_m} \right) &= \\ &= \frac{V_p}{j\lambda f} \left[ T_{my,n} \left( \frac{y_3}{\lambda f} - \frac{n}{W_m} \right) * T_s(\nu_y) \right] = \\ &= \frac{V_p}{j} \left\{ \left[ w_y \text{sinc} \left( w_m \frac{y_3}{\lambda f} \right) \frac{1}{W_m} \delta \left( y_3 - \frac{n\lambda f}{W_m} \right) \right] * \right. \\ &\quad \left. * \left[ Y_m \text{sinc} \left( Y_m \frac{y_3}{\lambda f} \right) \right] \right\} * T_s \left( \frac{y_3}{\lambda f} \right) \quad (12) \end{aligned}$$

Анализ функции (12) показывает, что

1. Положение  $n$ -го максимума определяется соотношением,  $y_{3n} = \frac{n\lambda f}{W_n}$ , то есть зависит от периода  $W_n$  матричного модулятора света.

2. Амплитуда  $n$ -го максимума модулируется функцией

$$A_{mn} = \frac{w_y}{W_m} \text{sinc} \left( n \frac{w_m}{W_m} \right).$$

3. Дифракционная эффективность ПМС определяется интенсивностью  $n$ -го максимума, нормируемую на интенсивность света, который освещает модулятор, то есть

$$C_{mn} = \frac{I_n}{I_p} = \left( \frac{w_y}{W_m} \right)^2 \text{sinc}^2 \left( n \frac{w_m}{W_m} \right).$$

4. Ширина  $n$ -го максимума при отсутствии входного сигнала определяется размерами модулятора  $Y_m$  и находится из условия

$$\pi Y_m \frac{\Delta y_3}{2\lambda f} = \pi \quad \Rightarrow \quad \Delta y_3 = \frac{2\lambda f}{Y_m}.$$

В области пространственных частот эта формула имеет вид

$$\Delta \nu_y = \frac{\Delta y_3}{\lambda f} = \frac{2}{Y_m}.$$

Минимальные искажения при измерении спектра сигнала  $T_s(\nu_y)$  будут в том случае, когда в формировании распределения амплитуды поля в плоскости анализа принимает участие только максимум нулевого порядка. Это значит, что дифракционные максимумы других порядков не должны поступать к входному зрачку фурье-объектива диаметром  $D_p$ . Для определения максимального периода  $W_{m,\max}$  матричной структуры ПМС, при котором во входной зрачок фурье-объектива не поступает пучок лучей  $m = +1$ -го порядка дифракции, рассмотрим рис. 4. Из рисунка имеем, что

$$\text{tg } \varphi_{d,m=+1} = \frac{D_p + Y_m}{2f} \quad (13)$$

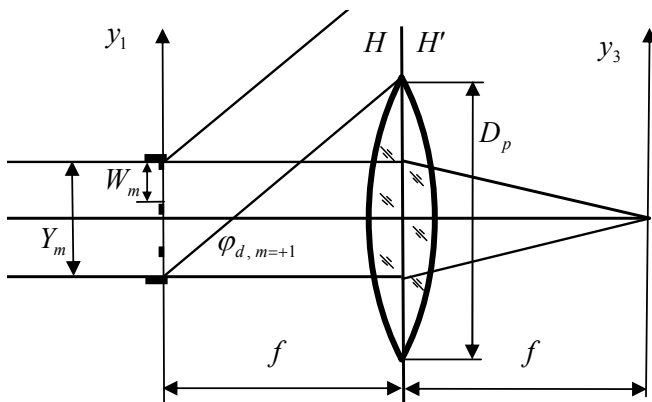


Рис. 4. Схема спектроанализатора для определения предельного значения периода матричного ПМС

Угол дифракции определим из основного уравнения дифракционной решетки, когда . Тогда с учетом (13) имеем

$$W_{n,\max} = \frac{\lambda}{\sin \varphi_{d,m=+1}} = \frac{\lambda}{\sin \left[ \arctg \left( \frac{D_p + Y_m}{2f} \right) \right]} \quad (14)$$

На рис. 5 приведена зависимость максимально допустимого размера пикселя  $W_{m,\max}$  матричного ПМС от размера модулятора  $Y_m$ , когда фурье-объектив имеет фокусное расстояние  $f = 100$  мм и диаметр входного зрачка  $D_p = 50$  мм, а ПМС освещается когерентным излучением с длиной волны  $0,628$  мкм.

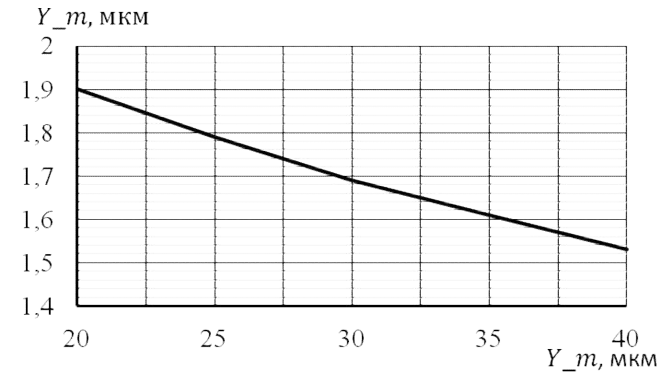


Рис. 5. Зависимость допустимого размера периода  $W_{m,\max}$  матричного ПМС от размера модулятора  $Y_m$

Анализ функции (14) и ее графика показывает, что для оптимального соотношения между диаметром входного зрачка и размером модулятора  $D_p = 2Y_m$ , которое обеспечивает максимальную пространственную полосу пропускания оптического спектроанализатора [4], максимально допустимый размер пикселя составляет  $1,79$  мкм.

## 5 Выводы

1. Использование в оптических спектроанализаторах в качестве входного транспаранта жидкостно-кристаллических матричных модуляторов света позволяет существенно расширить возможности таких приборов для измерения спектров динамических пространственных сигналов.
2. На основе разработанной физико-математической модели когерентного оптического спектроанализатора обоснованы особенности использования матричных модуляторов света в спектроанализаторах, а именно:

- (а) Распределение амплитуды светового поля в плоскости спектрального анализа КОС представляет собой сумму дифракционных максимумов, которые зависят от спектра исследуемого сигнала, искаженного импульсным откликом спектроанализатора. Положение максимумов определяется периодом матричной структуры ПМС, а их ширина - размером модулятора.
- (б) Минимальные искажения при измерении спектра сигнала будут в том случае, когда в формировании распределения амплитуды поля в плоскости анализа принимает участие только максимум нулевого порядка.
- (с) Дифракционная эффективность каждого максимума определяется отношением площади прозрачной части пикселя к его полной площади.

3. В дальнейшем целесообразно исследовать влияние матричных структур входного транспаранта и приемника излучения на основные характеристики КОС.

## Перечень ссылок

1. Okan K. E. *Diffraction, fourier optics and imaging*. – New Jersey, USA: Wiley & Sons, 2007. – 428 p.
2. Богатырева В.В. Оптические методы обработки информации / В.В. Богатырева, А.Л. Дмитриев. – СПб: СПбГУИТМО, 2009. – 74 с.
3. Колобродов В.Г. Когерентні оптичні спектроаналізатори: монографія / В.Г. Колобродов, Г.С. Тимчик, М.С. Колобродов. – К: Вид-во "Політехніка", 2015. – 180 с.
4. Kolobrodov V.G. The problems of designing coherent spectrum analyzers / V.G. Kolobrodov, G.S. Tymchik, Q.A. Nguen // *Proc. of SPIE*. – Vol. 9066. – 2013. – pp. 90660N-1-9066N-7.
5. Curatu G. Analysis and design of wide-angle foveated optical system based on transmissive liquid crystal spatial modulators / G. Curatu, J.E. Harvey // *Optical Engineering*. – 2009. – Vol. 48(4). – pp. 043001-1-043001-10.
6. Колобродов В.Г. Проектування тепловізійних і телевізійних систем спостереження / В.Г. Колобродов, М.І. Лихоліт. – К.: НТУУ "КПР", 2007. – 364 с.

## References

- [1] Okan K.E. (2007) *Diffraction, fourier optics and imaging*, Wiley & Sons, 428 p. DOI: 10.1002/0470085002
- [2] Bogatyreva V.V. фтв Dmitriev A.L. (2009) *Opticheskie metody obrabotki informatsii* [Optical Methods of Information Processing], St. Petersburg, SPbGUITMO, 74 p.

- [3] Kolobrodov V.H., Tymchik H.S. and Kolobrodov M.S. (2015) *Koherentni optychni spektroanalizatory* [Coherent optical spectrum analyzer], Kyiv, Politekhnik Publ., 180 p.
- [4] Kolobrodov V.G., Tymchik G.S. and Nguen Q.A. (2013) The problems of designing coherent spectrum analyzers. *Proc. SPIE9066. Eleventh International Conference on Correlation Optics*, pp. 90660N-1 – 9066N-7. DOI: 10.1117/12.2049587
- [5] Curatu G. and Harvey J.E. (2009) Analysis and design of wide-angle foveated optical system based on transmissive liquid crystal spatial modulators. *Optical Engineering*, Vol. 48, No 4, pp. 043001-1 - 043001-10. DOI: 10.1117/1.3122006
- [6] Kolobrodov V.H. and Lykholit M.I. (2007) *Proektuvannia teploviziynykh i televiziynykh sistem sposterezhenia* [Design of Thermal Imaging and Television Observation Systems], Kyiv, NTUU KPI, 364 p.

## Математична модель цифрового оптико-електронного спектроаналізатора

*Колобродов В. Г., Тимчик Г. С., Колобродов М. С.*

Метою статті є розробка фізико-математичної моделі цифрового оптико-електронного спектроаналізатора, в якому вхідний сигнал модулюється просторово-часовим модулятором світла, а вихідний сигнал реєструється матричним приймачем випромінювання з подальшою комп'ютерною обробкою. На основі цієї моделі отримані вирази для розрахунку імпульсного відгуку і передавальної функції спектроаналізатора, які дозволяють аналізувати і оптимізувати його основні характеристики.

*Ключові слова:* оптико-електронний спектроаналізатор; просторово-часовий модулятор світла; матричний приймач випромінювання

## Mathematical model of digital optoelectronic spectrum analyzer

*Kolobrodov V. G., Timchik G. S., Kolobrodov M. S.*

Background. Digital optoelectronic spectrum analyzer (DOSA) used for spatial-frequency analysis of two-dimensional signals occupies a significant place among optical information processing systems. Diaphragms and the photographic plates with transmission corresponding to investigating signals were used as an input transparency until recently. Such static transparents severely limit the possibility of input signals into spectrum analyzer, which vary in time and space. The appearance of the liquid-crystal spatial light modulators (SLM) allows to change transmission of input transparency in time and space with computer. At the same time there are no researches related to usage of such modulators in DOSA. Objective. There is a justification for features of application of the matrix spatial light modulator in the optical spectrum analyzer. Methods. The method for determining the light amplitude in the spectral field of DOSA analysis was developed by analyzing of physical-mathematical model of SLM. Results. It was found that the distribution of the amplitude of the light field in the spectral analysis plane is equal to the sum of the maximums. There are some features of the sum: positions of the maximums are determined by period of SLM matrix structure, and width of the maximums – by the modulator size; the diffraction efficiency of each maximum

is determined by ratio of the transparent area of the pixel to pixel's total area. Conclusions. Number of monographs and articles is devoted to the physical principles of coherent (laser) spectrum analyzers operation. At the same time there is practically no scientific and technical literature devoted to the research of the DOSA with spatial light modulators. Analysis of SLM mathematical model shows that the minimum distortion in the measurement of the signal spectrum will be in

the case when amplitude distribution in the plane of analysis is forming with zero-order maximum only. The formula, which allows us to calculate the limit period of the SLM matrix structure was obtained, which provides the minimum error of the signal spectrum measurement.

*Key words:* optoelectronic spectrum analyzer; spatial light modulators; matrix detector