Visnyk NTUU KPI Seriia – Radiotekhnika Radioaparatobuduvannia, 2017, Iss. 68, pp. 5–12

УДК 621.396:519.15

Моделі оптимальних багатовимірних сигналів на векторних комбінаторних конфігураціях

Різник В. В.

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

E-mail: *rvv@polynet.lviv.ua*

Розглядаються моделі оптимальних багатовимірних сигналів у вигляді двійкового монолітно-групового коду, в якому будь-яке кодове слово містить не більше одного блоку послідовно розміщених за кільцевою схемою однойменних символів, а множина усіх кодових комбінацій взаємно однозначно відповідає множині векторних координат усіх вузлових точок багатовимірної просторової решітки, число яких збігається з кількістю всіх кільцевих вектор-сум, утворених на послідовності векторів обраної ідеальної кільцевої в'язанки (ІКВ). Наведені приклади побудови оптимальних багатовимірних сигналів у вигляді кодових послідовностей, призначених для проектування сучасних систем зв'язку та розвитку оптимальних векторних інформаційних технологій.

Ключові слова: ідеальна кільцева в'язанка; кільцева вектор-сума; векторні дані; зіркова конфігурація "Слава Україні!"; циклічна система координат; багатовимірна решітка; оптимальний монолітно-груповий код; оптимальні векторні інформаційні технології

Вступ

В сучасній науці і техніці все ширшого застосування набувають багатовимірні дискретні сигнали, що в загальному випадку є багатовимірними функціями просторових незалежних змінних. Наприклад, в системах автоматичного керування такими функціями можуть бути векторні поля, де взаємодія між ланками системи здійснюється на контактних полях відповідної розмірності, у фізиці — просторовий розподіл енергії квантового потоку вздовж напрямку випромінювання і т.п.

Під час моделювання багатовимірних сигналів зручно користуватися поняттям просторової системи координат. При цьому під координатами сигналу розуміють будь-які аргументи, на числовій осі яких проектуються значення сигналу і фіксується динаміка його зміни. У галузі радіофізики використовують моделі відповідних фізичних полів і фізичних процесів, на основі яких створюються математичні моделі багатовимірних сигналів. Такі моделі дають можливість вивчати їх загальні властивості, замінювати фізичне моделювання досліджуваних процесів математичним, абстрагуючись від їх фізичної природи. За допомогою математичних моделей є можливість описувати властивості багатовимірних сигналів із залученням більшого числа визначальних ознак в досліджуваних процесах, відхиляючи другорядні менш впливові ознаки тощо. Тому синтез, дослідження та використання властивостей оптимальних математичних моделей дво- й багатовимірних сигналів набуває важливого значення в радіофізиці, інформаційних технологіях та інших галузях науки і техніки.

1 Огляд методів комбінаторної оптимізації багатовимірних сигналів

Більшість сучасних методів комбінаторної оптимізації багатовимірних сигналів базується на використанні класичної теорії комбінаторних конфігурацій [1], алгебричної теорії чисел [2], циклічних груп[1] і полів Ґалуа [3]. Вони здебільшого стосуються синтезу одно- або двовимірних моделей, побудованих на основі теорії циклічних різницевих множин [4]. Один з методів оптимізації багатовимірних сигналів передбачає використання нетрадиційних комбінаторних конфігурацій — багатовимірних ідеальних кільцевих в'язанок (ІКВ) [5]. В методі використовується принцип оптимальних структурних відношень (ОСВ) для багатовимірних системних об'єктів. Цьому сприяло виявлення великого класу дво- та багатовимірних ІКВ з їх численними ізоморфними й неізоморфними перетвореннями [6]. Встановлено, що багатовимірні (або векторні) ІКВ об'єднують велику групу ще мало досліджених комбінаторних структур, які за різноманітністю тонкої структури та чисельністю значно перевершують класичні комбінаторні конфігурації. Дослідження унікаль-

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Cyclic_group

них властивостей тонкої структури багатовимірних ІКВ висвітлено в публікаціях [5, 6]. Проглядається теоретичний взаємозв'язок структуризації багатовимірних ІКВ з геометричними формами просторової обертової симетрії многовидів (англ. manyfolds[2]). В [5] з'явилося повідомлення про відкриття нового кластеру векторних ІКВ, які зберігають свою унікальність під час переставляння векторів всередині кільцевої структури. Поруч з класичними та нетрадиційними комбінаторними конфігураціями існують численні ансамблі раніше невідомих комбінаторних конфігурацій «зіркового» класу, названих Зірка «Слава Україні!» [6]. На відміну від знаних комбінаторних конфігурацій, останні зберігають свою унікальність при взаємному переміщенні векторів всередині кільцевої структури за зірковою схемою, причому ця властивість зберігається для двох і більше варіантів перестановок, залежно від порядку та розмірності ІКВ. До зіркового типу також належать численні різновиди ІКВ, де кілька векторів можуть змінювати свої величини, а решта — ні. Всі вони наділені груповими властивостями, характерними для класичних циклічних груп і можуть представляти певний інтерес для побудови та дослідження моделей оптимальних векторних сигналів. Векторні ІКВ зручно розглядати як n–послідовності цілочислових t-кортежів, які розміщені за кільцевою схемою, де t-розмірність t-модулярної $(\bmod\ m_1, m_2, \ldots, m_t)$ [3] просторової решітки $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_t = n(n-1)/R$, або $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_t = n(n-1)/R+1$ [6]. Множина значень усіх t-модулярних вектор-сум t-кортежів, утворених на цій послідовності, перелічує множину вузлових точок циклічно замкненої по кожній осі t-вимірної системи координат рівно R разів. Векторні ІКВ охоплюють великий клас комбінаторних конфігурацій, які не мають прямих аналогів серед класичних різновидів. Поняття векторних ІКВ дають змогу розширити сферу фундаментальних і прикладних досліджень в радіоелектроніці і суміжних галузях знань, водночас збагачуючи потенційні можливості сучасної комбінаторної науки.

2 Постановка задачі

Задача полягає у вдосконаленні методів моделювання оптимальних багатовимірних сигналів з використанням нетрадиційних комбінаторних конфігурацій в ролі моделей — векторних ідеальних кільцевих в'язанок (векторних ІКВ). Ключовим завданням постає дослідження комбінаторних властивостей дво- та багатовимірних ІКВ для оптимізації багатовимірних сигналів як носіїв інформації з поліпшеними технічними показниками за надійністю пересилання векторних даних каналами зв'язку. Завдання включає в себе опрацювання методів оптимального кодування векторних сигналів.

3 Метод вирішення завдання

Метод базується на використанні математичного апарату алгебри векторних в'язанок (В-алгебри) [6], де елементами в'язанок постають абстрактні моделі t-вимірних сигналів у вигляді послідовно впорядкованих за кільцевою схемою цілочислових t-кортежів. Числові значення кортежів підібрані так, щоб вони разом з усіма сумами двох, трьох і т.д. послідовно впорядкованих за кільцевою схемою кортежних наборів вичерпували множину координат вузлових точок t-вимірної решітки багатовимірного простору. Оптимізація полягає в покритті фіксованим числом n цілочислових t-кортежів та їхніми лінійними комбінаціями вузлових точок t-вимірної решітки координат віртуального гіпертору[4]. Обчислення здійснюють з урахуванням значень відповідних модулів по кожній із t циклічних координат цієї решітки.

4 Модель двовимірної оптимізованої системи координат

В роботі [6] описана модель оптимальних 2D сигналів у вигляді взаємопов'язаних множини чисел натурального ряду і множини координат розміщення цих чисел на розгорнутій поверхні тору. У загальному випадку модель дозволяє розглядати відношення між сумірними підмножинами впорядкованих елементів та їхніми просторовими координатами в базисному полі заданої системи координат. Задачі такого класу зручно досліджувати на математичних структурах у вигляді циклічних співвідношень між послідовно впорядкованими кортежними наборами векторів відповідної розмірності. Загальна схема двовимірної ($t = 2$) циклічної системи координат з відліком по $\bmod m_1$ і $\bmod m_2$ відносно точки (0,0) приведена на рис. 1.

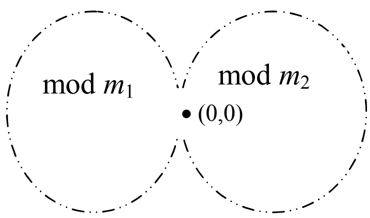

Рис. 1. Схема двовимірної циклічної системи координат з відліком по $\bmod m_1$ і $\bmod m_2$ відносно точки (0,0).

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Manifold
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Modular_arithmetic
[4] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hypertorus.gif

На рис. 2 зображена графічна схема моделі двовимірного (t=2) сигналу у вигляді кільцевої n-послідовності 2-кортежів ((k11, k12), (k21, k22),..., (ki1, ki2),..., (kn1, kn2)), на якій зручно демонструвати реалізацію методу оптимізації моделей двовимірних сигналів. Для прикладу нижче наведена графічна схема двовимірної (t=2) ІКВ четвертого (n=4) порядку (рис. 2).

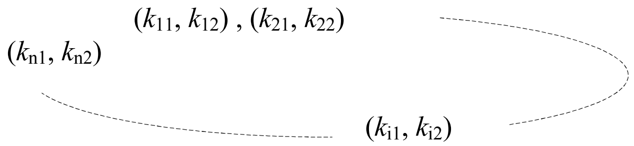

Рис. 2. Графічна схема моделі двовимірного (t=2) сигналу кільцевої n-послідовності 2-кортежів ((k11, k12), (k21, k22),..., (ki1, ki2),..., (kn1, kn2))

Елементами двовимірної ІКВ є впорядковані за кільцевою схемою 2-кортежі ((1,0), (1,1), (2,2), (0,2)) (рис. 3). Обчислення координат вузлових точок двовимірної решітки 3×4 в циклічній системі відліку по кожній осі здійснюється послідовним додаванням впорядкованих за кільцевою схемою координат базових 2D векторів з урахуванням модуля 3 і 4 відповідно, векторні значення яких збігаються з відповідними елементами двовимірної ІКВ ((1,0), (1,1), (2,2), (0,2)). Результати обчислень зведені в табл. 1, перший стовпчик якої містить повний перелік координат вузлових точок решітки 3×4.

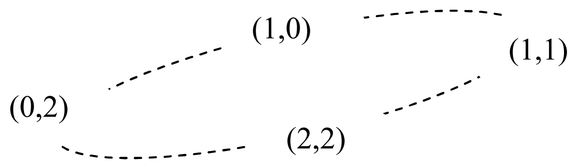

Рис. 3. Графічна схема 2D ІКВ ((1,0), (1,1), (2,2), (0,2)).

Після розміщення результатів обчислення координат вузлових точок у вигляді матриці 3×4 та відповідного їх упорядкування по рядках і стовпчиках, можна побачити, що множина кільцевих (модулярних) вектор-сум двовимірної ІКВ ((1,0), (1,1), (2,2), (0,2)), обчислених по модулю 3 і 4, взаємно однозначно відповідає множині координат двовимірної решітки з розмірами 3×4:

$$\begin{matrix} (0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3) \end{matrix}$$

Отже, за допомогою чотирьох (n=4) двовимірних векторів 2D ІКВ та використання їх послідовних сум можна покрити все поле 12-ти вузлових точок координатної решітки 3×4 в циклічній (модулярній) системі відліку. При цьому вдалося втричі зменшити число задіяних векторів у порівнянні із традиційними методами, що дозволяє вигідно послуговуватись цим методом для оптимізації двовимірних сигналів, дістаючися до теоретичного мінімуму інформаційної і структурної надмірності багатовимірних систем опрацювання векторних даних, багатовимірних систем автоматичного керування та оптимізації векторних інформаційних технологій.

Табл. 1 Результати обчислення координат вузлових точок решітки 3×4 за допомогою ІКВ ((1,0), (1,1), (2,2), (0,2))

Вузлові точки	Спосіб обчислення координат вузлових точок решітки 3×4
(0,0)	((2,2)+(0,2)+(1,0)) mod (3,4)
(0,1)	((1,1)+(2,2)+(0,2)) mod (3,4)
(0,2)	(0,2)
(0,3)	((1,1)+(2,2)) mod (3,4)
(1,0)	(1,0)
(1,1)	(1,1)
(1,2)	(0,2)+(1,0)) mod (3,4)
(1,3)	((1,0)+(1,1)+(2,2)) mod (3,4)
(2,0)	((2,2)+(0,2)) mod (3,4)
(2,1)	((1,0)+(1,1)) mod (3,4)
(2,2)	(2,2)
(2,3)	((0,2)+(1,0)+(1,1)) mod (3,4)

5 Моделі оптимальних багатовимірних сигналів

Моделі оптимальних багатовимірних сигналів, побудованих на основі t-вимірних ІКВ, зручно описувати за допомогою графічної схеми у вигляді кільцевої n-послідовності, елементами якої є t-кортежі $(K_1, K_2, \ldots, K_i, \ldots, K_n)$:

$$\begin{aligned} K_1 &= (k_{11}, k_{12}, \ldots, k_{1t}), \\ K_2 &= (k_{21}, k_{22}, \ldots, k_{2t}), \\ &\ldots \\ K_i &= (k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{it}), \\ &\ldots \\ K_n &= (k_{n1}, k_{n2}, \ldots, k_{nt})), \end{aligned}$$

де $k_{i1} \equiv k_i \pmod{m_1}$, $k_{i2} \equiv k_i \pmod{m_2}$, ..., $k_{it} \equiv k_i \pmod{m_t}$.

Множина усіх кільцевих вектор-сум, взятих по комплексному модулю $(m_1, m_2, \ldots, m_t)$, утворює t–вимірну решітку $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_t = n(n-1)/R$, або $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_t = n(n-1)/R + 1$, яка водночас є множиною t-вимірних просторових координат вузлових точок цієї решітки, причому координати кожної вузлової точки зустрічаються рівно R разів [6]. Таким чином, множину t-кортежів ІКВ можна розглядати як впорядкований за кільцевою схемою набір координат n базових вузлових точок

t-вимірної решітки, проекції яких обмежені рамками просторово замкненої на саму себе координатної сітки $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_t$ в t–вимірній системі відліку, а множина значень координат цих точок, разом зі значеннями усіх їх можливих лінійних комбінацій, взятих у вигляді кільцевих (модулярних) векторсум, перелічують множину вузлових координат решітки R разів.

Схема t-вимірної циклічної системи координат з відліком по $\mathrm{mod}\ m_1, \mathrm{mod}\ m_2, \ldots, \mathrm{mod}\ m_t$ відносно спільної точки $(0, \ldots, 0)$ показана на рис. 4.

На відміну від схеми двовимірної циклічної системи координат, де відлік здійснюється від спільної точки (0,0) на взаємно ортогональних кільцевих осях по mod m_1 і mod m_2 (рис. 1), що знаходяться на поверхні 3D тору, в t-вимірній циклічній системі координат існує t кільцевих осей з відліком по mod m_1, mod m_2, …, mod m_t від спільної точки $(0, \ldots, 0)$ для відповідних кільцевих осей. На рис. 4 приведена проекція на площину малюнку кільцевих осей t-вимірної циклічної системи координат з відліком по mod m_1, mod m_2, …, mod m_t від спільної точки $(0, \ldots, 0)$.

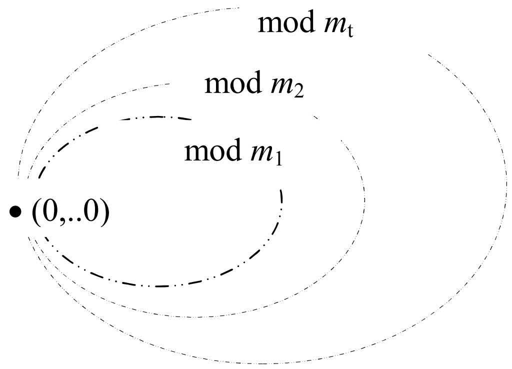

Рис. 4. Схема t-вимірної циклічної системи координат з відліком по mod m_1, mod m_2, …, mod m_t відносно спільної точки $(0, \ldots 0)$.

6 Властивості зіркових конфігурацій «Слава Україні!»

Властивості «зіркових» комбінаторних конфігурацій зручно представляти у вигляді графа з n вершинами, які сполучені між собою n ребрами у вигляді замкненої схеми. На рис. 5 приведені приклади здвоєних ансамблів двовимірних ($t = 2$) зіркових конфігурацій «Слава Україні!» п'ятого ($n = 5$) порядку у вигляді зв'язних графів.

Кожній вершині відповідає один із n t-кортежів $\{K_1, K_2, \ldots, K_i, \ldots, K_n\}$, де $K_i = (k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{it})$, t — число вимірів «зіркової» кільцевої n-послідовності, а кожна пара ребер, якими вершини сполучені між собою, визначає місце обміну t-кортежів місцями під час реконструкції «зірки» від однієї кільцевої послідовності до іншої зі збереженням її унікальних властивостей. Зліва штриховою лінією позначений граф зірки ((1,1), (1,3), (3,3), (0,3), (2,3)), а суцільною - ((1,1), (2,3), (1,3), (0,3), (3,3)). Справа — штриховою ((1,1), (1,4), (1,2), (1,0), (1,3)), а суцільною — ((1,1), (1,0), (1,4), (1,3), (1,2)). Графи зірок можуть набувати різної форми і відповідати різним видам та порядку групи симетрій; вибір напряму обходу вершин графа та початкової вершини не має значення.

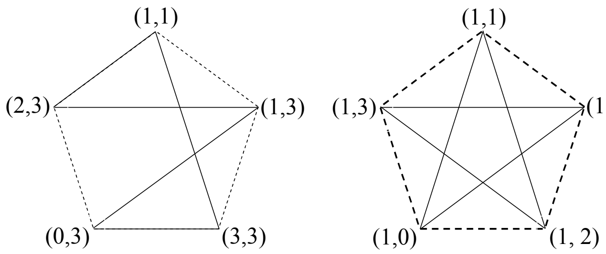

Рис. 5. Приклади ансамблів двовимірних ($t = 2$) зіркових конфігурацій «Слава Україні!» п'ятого ($n = 5$) порядку.

Встановлено, що чисельність ансамблів векторних зіркових комбінаторних конфігурацій зростає прискореними темпами зі збільшенням їх порядку. Так, якщо повна сім'я зіркових конфігурацій «Слава Україні!» п'ятого ($n = 5$) порядку об'єднує десять двовимірних ансамблів — по два варіанти «зірок» у кожному з них, то вже для сьомого існує рівно 20 ансамблів двовимірних ($t = 2$) «зірок» з параметрами $n = 7, R = 1, m_1 = 6, m_2 = 7$, і стільки ж — тривимірних (t=3), де $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 7$, два з яких має по три, і 18 по 4 «зірки» t-вимірних векторів у кожному ансамблі з однаковим їхнім складом. Крім того, комбінування з наборами модулів дозволяє формувати додаткові сім'ї з 20-ти ансамблів зіркових конфігурацій у вигляді оптимальних двовимірних решіток 2×21 і 3×14, кожен з яких має по 2 ансамблі з трьох і 18 з чотирьох конфігурацій сьомого порядку.

Простий підрахунок вказує на існування 60-ти ансамблів двовимірних і 20-ти тривимірних зіркових конфігурацій сьомого ($n = 7$) порядку, які налічують 234 варіанти двовимірних і 78 варіантів тривимірних конфігурацій. Кожен із цих варіантів визначає модель оптимальної системи, яка за допомогою лише семи ($n = 7$) t-вимірних кодових сигналів покриває t-вимірне фазове поле із $n(n{-}1) = 42$–х вузлових точок координатної решітки відповідних розмірів в циклічній системі відліку, причому вектори всередині кожного ансамблю можуть мінятися місцями за правилами «зірки» так, що система залишається оптимальною. Для порівняння слід відзначити, що не існує жодного варіанту одновимірних ІКВ з параметрами $n = 7$, $R = 1$. У загальному випадку t-вимірні конфігурації «Слава Україні!» описуються параметрами n, R, m_1, m_2, …, m_t — як відповідні t-вимірні ІКВ n-го порядку, кратності R та набором модулів $m_1, m_2, \ldots m_t$.

Табл. 2 Покриття вузлових точок двовимірної координатної сітки 4×5 за допомогою ансамблю "зірок": ((1,3), (1,1), (2,3), (0,3), (3,3)) та ((1,3), (3,3), (1,1), (0,3), (2,3)).

Вузлові точки решітки 4×5	Обчислення координат вузлових точок решітки 4×5 за кільцевими сумами по mod (4,5) «зіркових» векторів	
	Зірка ((1,3), (1,1), (2,3), (0,3), (3,3))	Зірка ((1,3), (3,3), (1,1), (0,3), (2,3))
(0,0)	(1,3)+(1,1)+(2,3)+(0,3)	(1,1)+(0,3)+ (2,3)+(1,3)
(0,1)	(3,3)+(1,3)	(3,3)+(1,3)
(0,2)	(1,3)+(1,1)+(2,3)	(3,3)+(1,1)+(0,3)
(0,3)	(0,3)	(0,3)
(0,4)	(0,3)+(3,3)+(1,3)	(3,3)+(1,1)
(1,0)	(0,3)+(3,3)+(1,3)+(1,1)	(1,3)+(3,3)+(1,1)+(0,3)
(1,1)	(1,1)	(1,1)
(1,2)	(3,3)+(1,3)+(1,1)	(1,3)+(3,3)+(1,1)
(1,3)	(1,3)	(1,3)
(1,4)	(2,3)+(0,3)+(3,3)	(1,1)+(0,3)
(2,0)	(1,1)+(2,3)+(0,3)+(3,3)	(3,3)+(1,1)+(0,3)+(2,3)
(2,1)	(2,3)+(0,3)	(0,3)+(2,3)
(2,2)	(2,3)+(0,3)+(3,3)+(1,3)	(0,3)+(3,3)+(1,3)+(3,3)
(2,3)	(2,3)	(2,3)
(2,4)	(1,3)+(1,1)	(2,3)+(1,3)+(3,3)
(3,0)	(3,3)+(1,3)+(1,1) +(2,3)	(2,3)+(1,3)+(3,3)+(1,1)
(3,1)	(0,3)+(3,3)	(2,3)+(1,3)
(3,2)	(1,1)+(2,3)+(0,3)	(1,1)+(0,3)+(2,3)
(3,3)	(3,3)	(3,3)
(3,4)	(1,1)+(2,3)	(0,3)+(2,3)+(1,3)

Для ілюстрації унікальних властивостей зіркових конфігурацій «Слава Україні!» в табл. 2 приведено два способи покриття вузлових точок на двовимірній координатній сітці 4×5, обчислені за допомогою ансамблю «зірок» ((1,3), (1,1), (2,3), (0,3), (3,3)) та ((1,3), (3,3), (1,1), (0,3), (2,3)).

З табл. 2 можна бачити, що будь-який з двох варіантів ансамблів із двох зіркових конфігурацій «Слава Україні!» ((1,3), (1,1), (2,3), (0,3), (3,3)) та ((1,3), (3,3), (1,1), (0,3), (2,3)) дає змогу за допомогою п'яти ($n = 5$) двовимірних кодових сигналів здійснити покриття 20 вузлових точок двовимірної решітки 4×5 рівно одним (R=1) способом, причому вектори всередині кожного ансамблю можуть мінятися місцями за правилами "зірки".

7 Моделі оптимальних векторних кодів

На відміну від традиційних методів перетворення сигналів в двійковий код, прикладна теорія ІКВ передбачає кодування t-вимірних сигналів у двійковому монолітно-груповому коді, де будь-яке дозволене кодове слово є комбінацією щонайбільше двох впорядкованих за кільцевою схемою блоків однойменних символів. Для цього зручно використати оптимальний код з монолітно-груповим розподілом однойменних двійкових символів "1" і "0" у кодових комбінаціях [6]. Приклад побудови такого коду за допомогою двовимірної «зіркової» ІКВ ((1,3), (1,1), (2,3), (0,3), (3,3)) з параметрами $n = 5$, $R = 1$, $m_1 = 4$, $m_2 = 5$ ілюструє табл. 3.

Табл. 3 Оптимальний монолітно-груповий код на «зірковій» ІКВ ((1,3), (1,1), (2,3), (0,3), (3,3))

Вектор	Вагові розряди векторного коду				
	(1,3)	(1,1)	(2,3)	(0,3)	(3,3)
(0,0)	1	1	1	1	0
(0,1)	1	0	0	0	1
(0,2)	1	1	1	0	0
(0,3)	0	0	0	1	0
(0,4)	1	0	0	1	1
...	...	...	...	...	...
(3,4)	0	1	1	0	0

В оптимальному монолітно-груповому t-вимірному коді, побудованому на ІКВ, множина всіх дозволених двійкових комбінацій взаємно однозначно відповідає множині багатовимірних координат усіх вузлових точок t-вимірної просторової решітки, число яких збігається з кількістю всіх кільцевих сум, утворених на кільцевій послідовності векторів обраної ІКВ. За наявності вищезгаданих обмежень цей код набуває статусу оптимального, що дозволяє використовувати його властивості для подолання інформаційної та структурної надмірності багатовимірних дискретних сигналів в радіопристроях і системах зв'язку.

Перевагами такого методу кодування сигналів у двійковий код є висока завадостійкість та швидкість виправлення помилок за правилом «свій замість чужого», коли в момент появи різнойменних символів між однойменними здійснюється автоматичне його самовиправлення заміною різнойменних символів однойменними. Крім того, при формуванні кодових сигналів у вигляді монолітно впорядкованих однойменних символів простежується зменшення негативного впливу явища гонок під час опрацювання масивів даних та пересилання їх каналами зв'язку. Моделі оптимальних векторних кодів, побудованих на двійковому монолітно-груповому коді, можуть знайти застосування в інформаційних технологіях для ефективного опрацювання потоків векторних даних, багатовимірних системах автоматичного управління для керування різними технологічними процесами і системах зв'язку.

8 Аналіз отриманих результатів

Протягом багатьох років зусиллям вчених різних країн створювалася й далі розвивається світова школа комбінаторного аналізу, а разом з нею — теорія комбінаторних конфігурацій [1]. В американо-українському проекті [7] С. Ґоломб[5] запропонував об'єднати теорію «лінійок Ґоломба» [8] й ІКВ для "Дослідження основоположних математичних принципів стосовно оптимального розміщення структурних елементів розподілених в просторі або часі систем..." і розвитку "наукової бази теорії оптимально розподілених систем". Відомо, що до «ідеальних» комбінаторних конфігурацій з розімкненою структурою належать лише п'ять «досконалих» ідеальних «дерев Ліча» [8], у тому числі три ідеальні лінійки Ґоломба. Дослідження продовжуються в напрямку «модуляризації» вищезгаданих конфігурацій [9-11], що свідчить про актуальність цієї проблематики. На відміну від ідеальних конфігурацій із розімкненою структурою існує набагато численніша кількість досконалих структур зі замкненою структурою. Результати порівняльного аналізу й узагальнення багатьох різновидів комбінаторних конфігурацій, таких як досконалі різницеві множини [4], циклічні блок-схеми [12], геометрії Зінґера [13], системи попарно ортогональних латинських квадратів [14], матриці Адамара [15], дають підстави говорити про взаємозв'язок властивостей досліджуваних комбінаторних конфігурацій з фундаментальними фізично-математичними законами природи - обертовою симетрією і натуральними числовими рядами. У двовимірному просторі обертова симетрія порядку $S = n(n-1)/R + 1$ породжує натуральний ряд чисел шляхом обрання початкової точки на ІКВ n–го порядку і послідовним додаванням чисел, що трапляються під час обходу контуру ІКВ як завгодно багато разів. Таким чином, можна отримати будь яке велике натуральне число, що вказує на геометричне походження натуральних чисел, породжених структурою простору. Ця ж властивість проглядається в багатовимірних просторових решітках зі замкненою структурою, що підтверджується відповідними моделями та утвореними на цих моделях натуральних рядів векторів апріорі будь-якої великої розмірності і як завгодно дрібного ступеня роздробленості. Звідси випливає, що в розглянутих моделях оптимальність закладена в самій їхній структурі, причому моделі оптимальних багатовимірних сигналів на векторних комбінаторних конфігураціях не мають апріорі математичних обмежень щодо розмірів квантових векторів, їх кількості та розмірності [5,6,16], а їхні властивості ще не дослідженні.

Основна відмінність запропонованих моделей дискретних сигналів полягає в способі формування системи кодових комбінацій, які набувають вигляду не більше двох послідовно розміщених за кільцевою схемою груп однойменних сигналів. Отримані результати дослідження властивостей такої системи кодування (монолітно-групового коду) дозволили встановити ряд їх переваг та недоліків. Серед суттєвих недоліків – експоненціальне зростання інформаційної надмірності за розрядністю, а серед переваг – кодування й завадостійке опрацювання (пересилання, збереження, декодування, реконструкція тощо) дво- й багатовимірних сигналів в базисній системі векторної системи координат. Недолік щодо надмірності компенсується автоматичним виявленням і виправленням помилок за правилом «не більше двох груп однойменних символів разом», що, в свою чергу, дозволяє підвищити надійність і швидкість опрацювання масивів векторних даних. Створення нового класу монолітно-групових векторних двійкових кодів на основі багатовимірних ІКВ відкривають перспективи для розвитку векторних інформаційних технологій. Векторні ІКВ переважають класичні комбінаторні конфігурації за чисельністю, просторовою різноманітністю та комбінаторними властивостями.

В даній статті увага сфокусована на використанні векторних ІКВ як моделей оптимальних багатовимірних сигналів, які на відміну від оптимізованих лінійок не мають апріорі математичних обмежень щодо кількості базових векторів базової множини векторів та розмірності. Це дає змогу їх використовувати в системах зв'язку для кодування та опрацювання багатовимірних сигналів в інформаційних системах.

Висновки

Моделі оптимальних багатовимірних сигналів зручно описувати у вигляді двійкового монолітно-

[5] Соломон Ґоломб — американський математик, інженер, професор електротехніки в Університеті Південної Каліфорнії

групового коду, в якому будь-яке кодове слово містить не більше одного блоку послідовно розміщених за кільцевою схемою однойменних символів, а множина всіх дозволених двійкових комбінацій взаємно однозначно відповідає множині координат усіх вузлових точок t-вимірної просторової решітки, число яких збігається з кількістю всіх кільцевих вектор-сум, утворених на n-послідовності векторів обраної ІКВ. Комбінаторні властивості таких моделей дають змогу збільшити загальну кількість вживаних векторних сигналів від n до $n(n-1)$, завдяки використанню кільцевих вектор-сум. Потужність множини моделей оптимальних багатовимірних сигналів набагато перевищує кількість одновимірних аналогів, а відкриття зіркових конфігурацій «Слава Україні!», які наділені новітніми корисними властивостями, дає змогу розширити сферу практичного застосування моделей оптимальних багатовимірних сигналів як носіїв необхідної інформації для виконання того чи іншого завдання, забезпечуючи поліпшення технічних показників за надійністю, завадостійкістю, захищеністю від несанкціонованого доступу, швидкістю пересилання векторних даних каналами зв'язку, наприклад, оптимального керування одночасно кількома взаємозв'язаними параметрами якогось фізичного процесу. Моделі відкривають нові можливості для розвитку оптимальних векторних інформаційних технологій.

References

[1] Weisstein E. W. *Configuration*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

[2] Kostrikin A.I. (2012) Vvedienie v algebru. Osnovy algebry [Introduction into algebra. Foundations of algebra]. MCNMO.

[3] Rowland T. and Weisstein E. W. *Galois Extension Field*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

[4] Weisstein E. W. *Perfect Difference Set*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

[5] Riznyk V. V. (2016) Models of optimum discrete signals on the ring combinatorial configurations. *Visn. NTUU KPI, Ser. Radioteh. radioaparatobuduv.*, no. 64, pp. 10-22. (in Ukrainian)

[6] Riznyk V. V. (2016) Models of optimum discrete signals on the vector combinatorial configurations. *Visn. NTUU KPI, Ser. Radioteh. radioaparatobuduv.*, no. 65, pp. 13-25. (in Ukrainian)

[7] Golomb S.W. and Riznyk V.V. (1996) *Researches and Applications of the Combinatorial Configurations for Innovative Devices and Process Engineering.* CRDF Cooperative Grants Program, Los Angeles, CA 90089-2565, 10 p.

[8] Leach D. (2014) Modular Leech Trees of Order at Most 8. *International Journal of Combinatorics*, Vol. 2014, Article ID 218086. DOI: 10.1155/2014/218086

[9] Golomb S. W. (2012) Infinite Sequences with Finite Cross-Correlation-II. *Sequences and Their Applications — SETA 2012*, pp. 110-116. DOI: 10.1007/978-3-642-30615-0_10

[10] Weisstein E. W. *Golomb Ruler*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

[11] Toussaint G. T. (2016) *The Geometry of Musical Rhythm: What Makes a "Good" Rhythm Good?*, CRC Press, pp. 165-174.

[12] Weisstein E. W. *Block Design*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource

[13] Weisstein E. W. *Plane*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

[14] Orthogonal Latin squares. *Encyclopedia of Mathematics*.

[15] Weisstein E. W. *Hadamard Matrix*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource .

[16] Riznyk V. (2016) Multi-modular Optimum Coding Systems Based on Remarkable Geometric Properties of Space, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, pp. 129-148. DOI: 10.1007/978-3-319-45991-2_9

Модели оптимальных многомерных сигналов на векторных комбинаторных конфигурациях

Ризнык В. В.

Рассматриваются модели оптимальных многомерных сигналов в виде двоичного монолитно-группового кода, в котором любое кодовое слово содержит не более одного блока последовательно расположенных по кольцевой схеме одноименных символов, а множество всех кодовых комбинаций взаимно однозначно соответствует множеству векторных координат всех узловых точек многомерной пространственной решетки, число которых совпадает с количеством всех кольцевых вектор-сум, образованных на последовательности векторов выбранной идеальной кольцевой вязанки. Приведены примеры построения оптимальных многомерных сигналов, предназначенных для проектирования современных систем связи, и развития оптимальных векторных информационных технологий.

Ключевые слова: идеальная кольцевая вязанка; кольцевая вектор-сума; векторные данные; звездная конфигурация "Слава Украине!"; циклическая система координат; многомерная решетка; монолитно-групповой код; векторные информационные технологии

Models of optimum multidimensional signals on the vector combinatorial configurations

Riznyk, V. V.

New conceptual models for construction of optimum multidimensional discrete signals as binary monolithic code, in which any allowed code word consists no more than one solid row of the same symbols in the ring topology sequence, named an "Optimum Monolithic Ring" code (OMR-code), are considered. All code combinations of an OMR-code enumerate the set of t-coordinates specified with respect to t-dimensional cyclic frame reference exactly R-times. The remarkable technical merits of "Glory to Ukraine Star" configuration, which properties hold for the same set of an OMR-code in varieties permutations of its terms is demonstrated, and method for design of two- or multidimensional vector signals coded based on the optimum binary monolithic code is presented. Proposed vector models of discrete signal optimization provide, essentially, a new approach to generalize them to great class of optimized problems in radio-telecommunications, navigation and information technology. Moreover, the optimization embedded in the underlying combinatorial models. The favourable qualities of the Optimum Multidimensional Ring code provides breakthrough opportunities to apply them to numerous branches of science and advanced technology, with direct applications to vector data telecommunications, vector encoded design, and optimal vector information technology.

Key words: Ideal Ring Bundl; ring vector sum; vector data; "Glory to Ukraine Star" configuration; solid system of ring axes; multidimensional grid; optimum monolithic code; optimum vector information technologies