

# Застосування регресійної моделі коефіцієнта використання каналів для формування плану розподілу навантаження в мережі

Романов О. І., Нестеренко М. М., Маньківський В. Б.

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”

E-mail: [mankovskij@yandex.ru](mailto:mankovskij@yandex.ru)

При вирішенні завдань управління, проектування і оцінки якості обслуговування в телекомунікаційних мережах нерідко використовується математична модель коефіцієнта використання каналів. Однак, її використання в стандартному вигляді має ряд незручностей. Це пов'язано з тим, що в моделі використовуються аналітичні вирази, які не мають похідні і не дозволяють в явному вигляді отримувати залежність одних параметрів через інші. У статті запропонована апроксимація математичної моделі коефіцієнта використання каналів наближеними диференційованими функціями на базі математичного апарату регресійного аналізу. Надано рекомендації щодо використання отриманих результатів в ході вирішення мережевих задач.

**Ключові слова:** коефіцієнт використання каналів; найпростіший потік заявок; навантаження мережі; QoS; кількість каналів; апроксимуюча функція; регресійний аналіз

показник QoS, як ймовірність відмови в обслуговуванні через відсутність потрібного ресурсу.

## Вступ

До сучасних телекомунікаційних мереж (ТКМ) на основі технологій IP і MPLS (Multiprotocol Label Switching), висуваються достатньо високі вимоги по відмовостійкості, пропускну здатності та якості обслуговування QoS (Quality of Service). Для забезпечення відповідності основних показників функціонування ТКМ встановленим параметрам, необхідні математичні моделі і методи, що дозволяють приймати адекватні рішення в ході управління мережами.

Аналітичний опис процесів функціонування телекомунікаційних мереж нерідко призводить до досить складних математичних виразів. Тому, як правило, використовуються різного роду обмеження, що дозволяють отримати наближене рішення різного ступеню точності. Так, наприклад, в роботі [1] пропонується використовувати обмеження відсутності втрат пакетів в маршрутизаторах. Для цього вводиться обмеження виду (1).

Тобто, сума потоків, які надходять у маршрутизатор на обслуговування, дорівнює сумі потоків, що виходять із маршрутизатора після обслуговування. Це обмеження відповідає тому, що мережа працює в недовантаженому режимі і не дозволяє оцінити такий

$$\begin{cases} \sum_{j(i,j) \rightarrow \infty} x_{(i,j)}^k - \sum_{j(j,i) \rightarrow \infty} x_{(j,i)}^k = 0; k \in K, M_i \neq s_k, d_k \\ \sum_{j(i,j) \rightarrow \infty} x_{(i,j)}^k - \sum_{j(j,i) \rightarrow \infty} x_{(j,i)}^k = 1; k \in K, M_i \neq s_k \\ \sum_{j(i,j) \rightarrow \infty} x_{(i,j)}^k - \sum_{j(j,i) \rightarrow \infty} x_{(j,i)}^k = -1; k \in K, M_i = d_k \end{cases} \quad (1)$$

В роботі [2] використовується обмеження, що весь ресурс мережі розраховується відносно одного із напрямків зв'язку. І по суті QoS визначається не для мережі, а для одного напрямку зв'язку.

Проектування систем здійснюється математичними методами і вимагає математичного опису системи, розробки математичної моделі. Встановити взаємозв'язок між основними факторами в телекомунікаційній системі дозволяє відобразити реальні характеристики системи і алгоритми її функціонування в різних умовах [3].

В роботі [4] для вирішення завдання по визначенню допустимих значень QoS на гілках мережі при заданих обмеженнях щодо якості обслуговування в напрямках зв'язку, пропонується вирішити систему з нерівностей  $N(N - 1)$  (де  $N$  — число вузлів у мережі). Змінними в нерівностях є показники QoS на гілках мережі. При цьому в мережах з динамічною

маршрутизацією потоків заявок одна і та ж гілка використовується для передачі інформації в багатьох напрямках зв'язку. Тому, будь-яка зміна показника якості обслуговування на одній гілці веде до зміни якості обслуговування в декількох напрямках зв'язку.

Крім того, одна і та ж гілка, в залежності від параметрів існуючих напрямків зв'язку, функціонує в різних умовах. Наприклад, якщо число транзитів в шляху передачі інформації велике, то вимоги до якості обслуговування на кожній гілці більш жорсткі [5]. Якщо число транзитів в шляху передачі інформації невелике, то вимоги до якості обслуговування знижуються.

Тому отримати точне рішення системи нерівностей, що відображає виконання вимог до QoS в напрямках зв'язку, складно, а іноді й неможливо. В даній роботі, для вирішення такого типу завдань, пропонується орієнтуватися на напрям зміни коефіцієнта використання каналів (КВК) [4]. Наприклад, в процесі формування плану розподілу навантаження (ПРН), що визначає вид системи нерівностей, виникла ситуація, коли не можливо однозначно визначити оптимальний шлях передачі інформації. Тоді рекомендується вибирати шлях, що веде до підвищення загального КВК в мережі при дотриманні заданих показників QoS в напрямках зв'язку. Як показали дослідження, це дозволяє мінімізувати необхідну продуктивність гілок при виконанні заданих показників якості обслуговування і, як наслідок, знизити сумарні витрати на обладнання мережі.

Однак, при використанні КВК в стандартному вигляді є ряд незручностей. По-перше, коефіцієнт використання каналів описується не диференційованими функціями. По-друге, аналітичні вирази, що описують взаємозв'язки коефіцієнта використання каналів, не дозволяють в явному вигляді записати залежність одного параметра через інші. Тому доцільно використовувати наближені аналітичні моделі, що дозволяють усунути ці недоліки.

## 1 Постановка задачі

Мета роботи — отримати наближені аналітичні залежності коефіцієнта використання каналів від співвідношення обсягу навантаження, числа каналів і допустимої ймовірності втрат заявок на гілках мережі, які відображають суть процесів, що протікають в мережі та мають високий рівень адекватності і диференціюються в діапазоні досліджуваних значень.

Коефіцієнти КВК найбільш часто використовуються в якості показників оцінки ефективності функціонування телекомунікаційних мереж. Це пов'язано з тим, що він має чисельне значення, має яскраво виражений фізичний зміст.

Для гілки мережі з комутацією трактів, логічних, фізичних або віртуальних каналів КВК може бути представлений у вигляді (2):

$$K = \frac{Y(p)}{V} \Big|_{p=\text{const}} \quad (2)$$

де:  $K$  — коефіцієнт використання каналів;  $Y(p)$  — пропускна спроможність гілки;  $V$  — число віртуальних каналів в гілці мережі;  $p$  — показник якості обслуговування QoS (наприклад, ймовірність відмови в обслуговуванні або ймовірність відмови в наданні ресурсу необхідної продуктивності).

Пропускна спроможність гілки мережі при обслуговуванні найпростішого потоку навантаження визначається виразом (3):

$$Y(p) = Z \cdot (1 - p) = Z \cdot \left( 1 - \frac{\frac{Z^V}{V!}}{\sum_{i=0}^V \frac{Z^i}{i!}} \right) \quad (3)$$

де:  $Z$  — обсяг навантаження, яке поступає на обслуговування на гілку мережі.

Тоді аналітичний вираз для визначення КВК, після нескладних математичних перетворень, набуде вигляду (4):

$$K = \frac{Z \cdot \left( \sum_{i=0}^V \frac{Z^i}{i!} - \frac{Z^V}{V!} \right)}{V \cdot \left( \sum_{i=0}^V \frac{Z^i}{i!} \right)} \quad (4)$$

Якщо на гілку надходить примітивний потік заявок, то пропускна здатність буде дорівнювати (5):

$$Y(p) = Z(1 - p) = Z \cdot \left( 1 - \frac{C_{S-1}^V \cdot z^V \cdot (1 - z)^{S-V}}{\sum_{i=0}^V (C_S^i \cdot z^i \cdot (1 - z)^{S-i})} \right) \quad (5)$$

де:  $z$  — величина навантаження, яке надходить на обслуговування на гілку мережі від кожного із  $S$  абонентів;  $C_S^i$  — число сполучень «із  $S$  по  $V$ » («із  $S$  по  $i$ »).

Тоді, відповідно, аналітичний вираз для визначення КВК прийме наступний вигляд (6):

$$K = \frac{Z}{V} \cdot \left( 1 - \frac{C_{S-1}^V \cdot z^V \cdot (1 - z)^{S-V}}{\sum_{i=0}^V (C_S^i \cdot z^i \cdot (1 - z)^{S-i})} \right) \quad (6)$$

Для підвищення точності практичних розрахунків зроблено припущення, що в мережі циркулює найпростіший потік заявок. Даний потік заявок найбільш

складний в обслуговуванні. Тобто, ми будемо проводити розрахунок на найгірший випадок. І крім того, це дозволить знизити складність опису методу.

У процесі виконання завдання формування оптимального плану розподілу навантаження потрібно забезпечити раціональне співвідношення між числом каналів, навантаженням і QoS на гілках мережі при забезпеченні заданих вимог до якості обслуговування в напрямках зв'язку [6, 7]. Для цього необхідно проаналізувати залежності типу:

- $K = f(V)$  при  $p = \text{const}$
- $K = f(Z)$  при  $p = \text{const}$
- $K = f(p)$  при  $Z = \text{const}$

Проведення аналізу значно простіше і точніше, якщо дані аналітичні вирази мають похідні у всьому діапазоні досліджуваних значень, а залежність одного параметра від іншого може бути представлена в явному вигляді. Вирази (4) і (6) не відповідають цим вимогам і їх використання при практичних розрахунках має значні труднощі.

Тому пропонується апроксимація виразу (4) за допомогою емпіричних функцій, що диференціюються. Для цієї мети пропонується використовувати математичний апарат чисельного аналізу [8], який забезпечує високу ступінь адекватності отриманих результатів.

## 2 Рішення задачі

Побудова емпіричних формул складається з двох етапів:

1. Визначення загального вигляду формули.
2. Розрахунок найкращих параметрів аналітичного виразу.

Для заданої системи значень  $(K_i, p_i)|_{V=\text{const}}$ ,  $(K_i, V_i)|_{p=\text{const}}$  та  $(K_i, Z_i)|_{p=\text{const}}$  була обрана аналітична залежність (7):

$$y = \tilde{f}(x; a, b, c) \quad (7)$$

де:  $a$ ,  $b$  та  $c$  — деякі константи.

В результаті проведеного аналізу було з'ясовано, що найбільша адекватність досягається при використанні функцій вигляду (8):

$$K = ax^b + c \quad (8)$$

Звідси слідує, що  $k - c = ax^b$ . Після логарифмування цей вираз прийме вигляд:

$$\lg |k - c| = \lg |a| + b \lg x, \quad |k - c| \neq 0, \quad |a| \neq 0$$

Звідси, враховуючи, що  $\lg |k - c| = K$  та  $\lg x = X$  отримуємо залежність наступного вигляду (9):

$$K = bX + \lg a \quad (9)$$

Визначення параметрів формули (8) починаємо зі знаходження значення  $c$ . Для цього складаємо середнє геометричне  $x_s = \sqrt{x_1 x_n}$ , де  $x_1$  та  $x_n$  крайні значення змінної. Потім, використовуючи метод лінійної інтерполяції, для  $x_s$  знайдемо значення (10):

$$k_s = k_i + \frac{k_{i+1} - k_i}{x_{i+1} - x_i} (\bar{x}_s - x_i) \quad (10)$$

де:  $x_i$  та  $x_{i+1}$  — проміжні значення, між якими знаходиться  $\bar{x}_s$ :  $x_i < \bar{x}_s < x_{i+1}$ .

Допускаючи, що точки  $M_1(x_1, k_1)$ ,  $M_s(x_s, k_s)$ ,  $M_n(x_n, k_n)$  розміщені на кривій (8), отримуємо три рівності:

$$\begin{aligned} k_1 &= c + ax_1^b, \\ k_s &= c + ax_s^b, \\ k_n &= c + ax_n^b \end{aligned}$$

Зводячи  $\bar{x}_s = \sqrt{x_1 x_n}$  в ступінь  $b$  і множачи на  $a$ , отримуємо  $ax_s^b = \sqrt{ax_1^b ax_n^b}$ , або  $k_s - c = \sqrt{(k_1 - c)(k_n - c)}$ . Розв'язуючи це рівняння відносно  $c$ , знаходимо (11):

$$c = \frac{k_1 \cdot k_n - k_s^2}{k_1 + k_n - 2 \cdot k_s} \quad (11)$$

Коли  $c$  визначено, будуємо точки  $N_i = (K_i, X_i)$ , де  $X_i = \lg x_i$ ,  $K_i = \lg(k_i - c)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Оскільки вони розташовуються майже прямолінійно, то це підтверджує правильність вибору залежності виду (8).

Визначення найкращих параметрів  $a$ ,  $b$  апроксимуючої функції (8) було проведено методом найменших квадратів. Вибір даного методу обумовлений тим, що його використання дає найменше відхилення, від вихідних даних в порівнянні з методом середніх. Крім того, він володіє ще однією важливою перевагою, а саме якщо сума  $s$  квадратів відхилень  $\varepsilon_i$  мала, то і самі ці відхилення також малі за абсолютним значенням.

Згідно методу найменших квадратів (МНК) найкращими коефіцієнтами вважаються ті, для яких сума квадратів відхилень буде мінімальною (12):

$$\begin{aligned} S(a_1, a_2, \dots, a_m) &= \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \tilde{K}(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m) - k_i \right]^2 \rightarrow \min \end{aligned} \quad (12)$$

Звідси, використовуючи необхідні умови екстремуму функції кількох змінних, отримуємо так звану нормальну систему (13), і задача зводиться до знаходження параметрів (коефіцієнтів) [5]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} S(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

Система спрощується, якщо емпірична функція лінійна щодо параметрів. Остаточно, нормальна система буде мати вигляд (14):

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1[x] + a_2[x^2] + \dots + a_m[x^m] = [k] \\ a_0[x] + a_1[x^2] + \dots + a_m[x^{m+1}] = [xk] \\ \dots \\ a_0[x^m] + a_1[x^{m+1}] + \dots + a_m[x^{2m}] = [x^m k] \end{cases} \quad (14)$$

Так як після логарифмування емпірична формула (9) має лінійний вигляд, то нормальну систему рівнянь (14) можна записати у вигляді (15):

$$\begin{cases} n \cdot \lg a + [X] \cdot b = [K] \\ [X] \cdot \lg a + [X^2] \cdot b = [X \cdot K] \end{cases} \quad (15)$$

де  $n$  — кількість точок, які ми аналізуємо;

$$[X] = \sum_{i=1}^n \lg x_i, \quad [X^2] = \sum_{i=1}^n (\lg x_i)^2, \quad [K] = \sum_{i=1}^n \lg |k_i - c|$$

$$[XK] = \sum_{i=1}^n (\lg x_i) \times (\lg |k_i - 1|), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Рішення системи нормальних лінійних рівнянь (15), із симетричною квадратною матрицею коефіцієнтів, було проведено методом Крамера. Тобто систему лінійних рівнянь записуємо за допомогою визначників (16):

$$\begin{cases} \alpha \times \Delta = \Delta_\alpha \\ \beta \times \Delta = \Delta_\beta \end{cases} \quad (16)$$

де:  $\Delta = \begin{vmatrix} n & [X] \\ [X] & [X^2] \end{vmatrix}$  — визначник системи (15);

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} [Y] & [X] \\ [XY] & [X^2] \end{vmatrix}, \quad \Delta_\beta = \begin{vmatrix} n & [K] \\ [X] & [XK] \end{vmatrix}.$$

У разі  $\Delta \neq 0$  система нормальних лінійних рівнянь має єдиний розв'язок:

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} \quad \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} \quad (17)$$

де:  $\alpha = \lg a$ ,  $\beta = b$  — шукані постійні емпіричної аналітичної залежності (8). При остаточному виборі емпіричної залежності повинна виконуватися умова (18):

$$\begin{cases} \alpha \times (-1), & \text{якщо } c > k_i, |k_i - c| \neq 0; \\ \beta \times (+1), & \text{якщо } k_i > c, |k_i - c| \neq 0; \end{cases} \quad (18)$$

На основі розглянутого математичного апарату були визначені основні емпіричні залежності коефіцієнта використання каналів від співвідношення величини навантаження, втрат і числа каналів в гілках телекомунікаційної мережі:  $K = f(V_i)$  при  $p = \text{const}$ ;  $K = f(Z_i)$  при  $p = \text{const}$ ;  $K = f(p_i)$  при  $V = \text{const}$ ;  $K = f(p_i)$  при  $Z = \text{const}$ .

Отримані емпіричні формули і їх середньоквадратичне відхилення, а саме:  $S = \sum_{i=1}^n (\tilde{k}_i - k_i)^2$ , приведені в таблиці 1.

Для наочності і зручності аналізу отримані емпіричні залежності представлені на рис. 2, рис. 1, рис. 3 і рис. 4.

Далі проводилося узагальнення отриманої аналітичної моделі за рахунок згладжування отриманих статистичних даних.

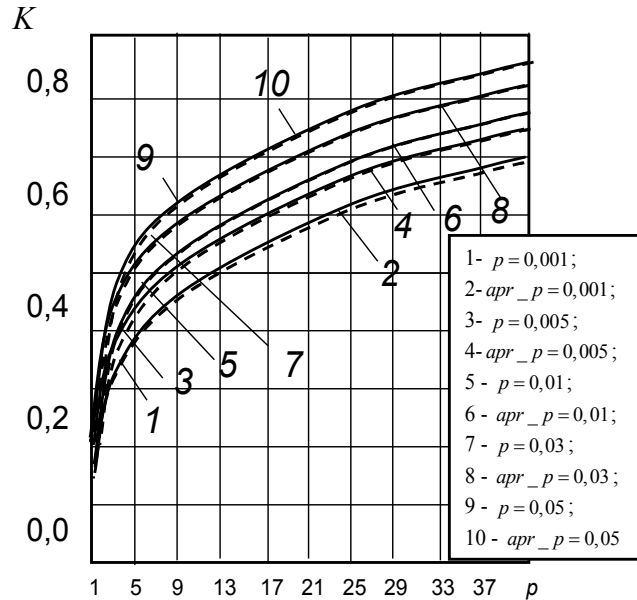


Рис. 1. Результати апроксимації залежності  $K$  від  $Z$  при  $p = \text{const}$

Табл. 1 Середньоквадратичне відхилення емпіричних формул від реальних значень

const	$\tilde{K}$	$S$
$p = 0,001$	$1,2359 \times V^{0,1241} - 1,3399$	0,00158
$p = 0,005$	$-8,3753 \times V^{-0,0274} + 8,2477$	0,00150
$p = 0,01$	$2,7669 \times V^{-0,0983} + 2,6440$	0,00092
$p = 0,02$	$-1,8264 \times V^{-0,1769} + 1,7115$	0,00072
$p = 0,05$	$-1,3804 \times V^{-0,2872} + 1,3013$	0,00045
$p = 0,001$	$1,6368 \times Z^{0,736} - 1,4640$	0,00023
$p = 0,005$	$3,1652 \times Z^{0,0420} - 2,9549$	0,00041
$p = 0,01$	$-6,2994 \times Z^{-0,0244} + 6,5212$	0,00031
$p = 0,03$	$-2,2772 \times Z^{-0,0749} + 2,5429$	0,00012
$p = 0,05$	$-1,5542 \times Z^{-0,1199} + 1,8407$	0,00019
$V = 3$	$0,9419 \times p^{0,4079} + 0,0068$	0,00001
$V = 5$	$0,9497 \times p^{0,0268} + 0,0268$	0,00001
$V = 8$	$0,07 \ln(p) + 0,733$	0,00098
$V = 25$	$0,053 \ln(p) + 0,8952$	0,00228
$Z = 5$	$0,6039 \times p^{0,2337} + 0,2550$	0,00001
$Z = 8$	$0,6934 \times p^{0,2724} + 0,3336$	0,00015
$Z = 10$	$0,8670 \times p^{0,3362} + 0,3838$	0,00025
$Z = 20$	$0,6124 \times p^{0,2100} + 0,4361$	0,00002

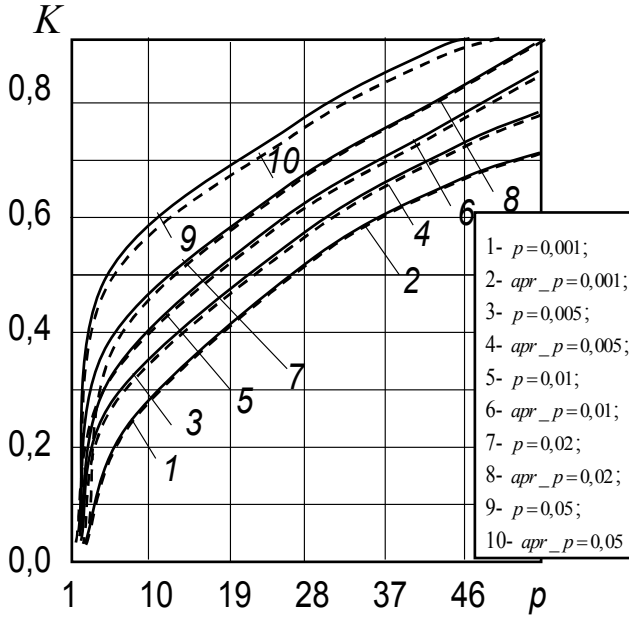


Рис. 2. Результати апроксимації залежності  $K$  від  $V$  при  $p = \text{const}$

Оцінка адекватності отриманих результатів може бути проведена за допомогою математичного апарату лінійного регресивного аналізу. Для цього проведемо статистичний аналіз оцінок лінійної моделі, скориставшись методом найменших квадратів. Для цього необхідно представити результати спостережень в такій формі [8]:

$$y_i = \beta_0 a_0(x_i) + \beta_1 a_1(x_i) + \dots + \beta_{k-1} a_{k-1}(x_i) + \varepsilon_i,$$

де  $\varepsilon_i$  — випадкові помилки спостереження.

Припустимо, що помилки спостережень мають нульові математичні очікування і не корелюють, тобто виконуються умови:

$$M[\varepsilon_i] = 0$$

$$k_{ij} = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & i = j; \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$$

де:  $k_{ij}$  — коваріація випадкових величин  $\varepsilon_i$  та  $\varepsilon_j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Необхідно відзначити, що в МНК оцінки не залежать від обсягу вибірки  $n$  (за умови  $n \geq k$ , де  $k$  — число оцінюваних параметрів), якщо помилки спостережень не корелюються  $\varepsilon_i$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  і мають нормальний розподіл  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , то оцінки, отримані за МНК, збігаються з оцінками, які були розраховані на основі методу максимальної правдоподібності [9].

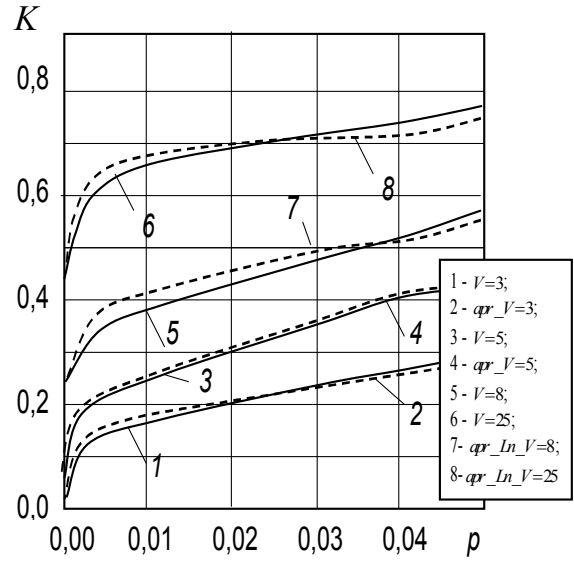


Рис. 3. Результати апроксимації залежності  $K$  від  $p$  при  $V = \text{const}$

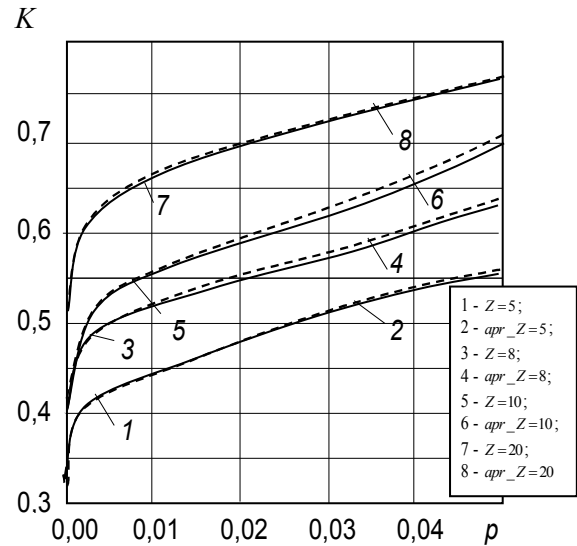


Рис. 4. Результати апроксимації залежності  $K$  від  $p$  при  $Z = \text{const}$

Нехай  $\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{k-1}$  — оцінки параметрів лінійної моделі. Розрахуємо залишкову суму квадратів  $Q_e$ :

$$Q_e(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{k-1}) = \sum [y_i - \tilde{\beta}_0 a_0(x_i) - \tilde{\beta}_1 a_1(x_i) - \dots - \tilde{\beta}_{k-1} a_{k-1}(x_i)]^2$$

або в матричному обчисленні:

$$Q_e = (Y - A\tilde{\beta})^T (Y - A\tilde{\beta}) = Y^T Y - \tilde{\beta}^T A^T Y$$

Зручніше використовувати в такому вигляді:

$$|Q_e| = |Y^T Y - \tilde{\beta}^T A^T Y|. \quad (19)$$

Незміщена оцінка дисперсії помилок визначається за формулою:

$$\tilde{\sigma}_\varepsilon^2 = s_\varepsilon^2 = \frac{Q_e}{n - k} \quad (20)$$

А оцінка коваріаційної матриці дорівнює:

$$K_m = s_\varepsilon^2 (A^T A)^{-1} \quad (21)$$

Якщо допустити, що помилки спостережень корелюється і мають нормальний розподіл, то для цього випадку оцінки параметрів представленої аналітичної моделі  $\beta_j, j = 0, 1, \dots, k - 1$  також мають нормальний розподіл.

Межі довірчих інтервалів в цьому випадку визначаються наступним чином:

$$\tilde{\beta}_j \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n - k) \cdot s_\varepsilon \cdot \sqrt{a_{jj}} \quad (22)$$

де:  $a_{ij}$  — елемент матриці  $(A^T A)^{-1}$ , а  $\alpha$  — заданий рівень значущості.

Знайдемо довірчі інтервали для параметрів отриманих аналітичних залежностей. Отримані результати зведені в таблиці 2.

Для практичних розрахунків достатньо прийняти рівень значущості  $\alpha = 0,05$  та використовувати розподіл Стьюдента.

Для вирішення завдань аналізу якості функціонування телекомунікаційних мереж, а саме оцінки пропускну здатності, представляє інтерес швидкість зміни КВК. Це досить наочно демонструє перша похідна від знайденої емпіричної функції:

$$\tilde{K}' = abx^{b-1}. \quad (23)$$

Використовуючи залежності виду (23) при необхідних значеннях аргументів були отримані графіки залежностей:

$$\begin{aligned} \tilde{K}' &= f(V_i)|_{p=\text{const}}, \\ \tilde{K}' &= f(Z_i)|_{p=\text{const}}, \\ \tilde{K}' &= f(p_i)|_{V=\text{const}}, \\ \tilde{K}' &= f(p_i)|_{Z=\text{const}}, \end{aligned}$$

які представлені нижче у графічному вигляді на рис. 5, 6, 7, 8.

### 3 Результати

В результаті проведеної роботи виконана апроксимація коефіцієнта використання каналів наближеними диференційованими функціями на базі математичного апарату регресійного аналізу (рис. 2, 1, 3, 4).

Отримані наближені аналітичні залежності коефіцієнта використання каналів від співвідношення величини навантаження, числа каналів і необхідної якості

обслуговування на гілках мережі. Дані залежності з високим ступенем точності відображають суть процесів обслуговування заявок в телекомунікаційній мережі [10], мають достатньо високий рівень адекватності і диференціюються в діапазоні досліджуваних значень параметрів функціонування мережі.

Аналіз зміни (приросту) КВК зручно провести по першій похідній отриманих функцій. Дані залежності в відносних одиницях представлені на рис. 5, 6, 7, 8.

Табл. 2 Оцінка параметрів емпіричних формул при рівні значущості  $\alpha = 0.05$

$\tilde{K}$	$a \in$	$b \in$
$1, 2359 \times V^{0,1241} - 1, 3399$	(1,2433; 1,2297)	(0,1262; 0,1220)
$-8, 3753 \times V^{-0,0274} + 8, 2477$	(-9,1911; -7,6319)	(0,0086; -0,0634)
$-2, 7669 \times V^{-0,0983} + 2, 6440$	(-2,7905; -2,7398)	(- 0,0948; - 0,1018)
$-1, 8264 \times V^{-0,1769} + 1, 7115$	(-1,8501; -1,8030)	(-0,1719; -0,1819)
$-1, 3804 \times V^{-0,2872} + 1, 3013$	(-1,3897; -1,3712)	(-0,2846; -0,2898)
$1, 6368 \times Z^{-0,736} - 1, 4640$	(1,6580; 1,6174)	(0,0780; 0,0692)
$3, 1652 \times Z^{-0,0420} - 2, 9549$	(3,2324; 3,0993)	(0,0496; 0,0344)
$-6, 2994 \times Z^{-0,0244} + 6, 5212$	(-6,4833; -6,1208)	(-0,0143; -0,0345)
$-2, 2772 \times Z^{-0,0749} + 2, 5429$	(-2,2989; -2,2557)	(-0,0716; -0,0782)
$-1, 5542 \times Z^{-0,1199} + 1, 8407$	(-1,5632; -1,5452)	(-0,1179; -0,1219)
$0, 9419 \times p^{0,4079} + 0, 0068$	(1,0218; 0,8682)	(0,4203; 0,3955)
$0, 9497 \times p^{0,0268} + 0, 0268$	(1,0119; 0,8914)	(0,3028; 0,2844)
$0, 9419 \times p^{0,4079} + 0, 0068$	(0,0821; 0,0678)	
$0, 7 \ln(p) + 0, 733$	(0,0632; 0,0442)	
$0, 053 \ln(p) + 0, 8952$	(0,8288; 0,4779)	(0,2753; 0,1921)
$0, 6934 \times p^{0,2724} + 0, 3336$	(1,0497; 0,5103)	(0,3189; 0,2259)
$0, 8670 \times p^{0,3362} + 0, 3838$	(1,2287; 0,6117)	(0,3937; 0,2604)
$0, 6124 \times p^{0,2100} + 0, 4361$	(0,6932; 0,5409)	(0,2296; 0,1904)

Аналізуючи залежності рис. 5, 6, 7, 8 можна побачити, що при збільшенні навантаження швидкість наростання коефіцієнта використання каналів спостерігається на гілках мережі з малим навантаженням і невеликим числом каналів.

При середньому ( $Z = 15 - 35$  Ерл) і великому ( $Z > 35$  Ерл) навантаженні на гілках мережі швидкість зміни коефіцієнта використання каналів на гілках мережі приблизно однакова.

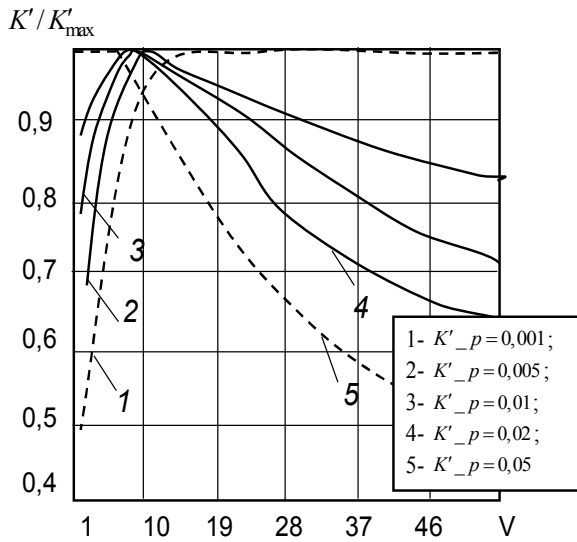


Рис. 5. Графіки залежності  $\tilde{K}'/\tilde{K}'_{max}$  від  $V$  при  $p = \text{const}$

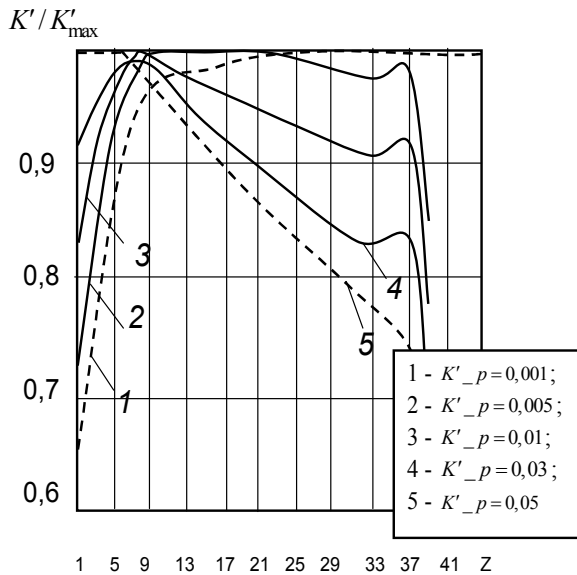


Рис. 6. Графіки залежності  $\tilde{K}'/\tilde{K}'_{max}$  від  $Z$  при  $p = \text{const}$

Це дає можливість сформулювати практичні рекомендації щодо формування плану розподілу навантаження. В разі рівності довжини обхідних шляхів в напрямку зв'язку і виникненні труднощів (невизначеностей) при визначенні порядку їх заняття слід дотримуватися наступного алгоритму розв'язання задачі:

- якщо в мережі інтенсивність навантаження в напрямках зв'язку невелика, то необхідно пра-

гнути до рівномірного розподілу навантаження по гілках мережі;

- якщо в мережі інтенсивність навантаження в напрямках зв'язку середня або висока, то необхідно прагнути до досягнення рівності ймовірності втрат на гілках мережі.

Такий підхід дозволяє забезпечити високу ефективність використання каналів в мережі, і як наслідок, мінімізує необхідний обсяг обладнання в мережі для забезпечення заданої якості обслуговування в напрямках зв'язку.

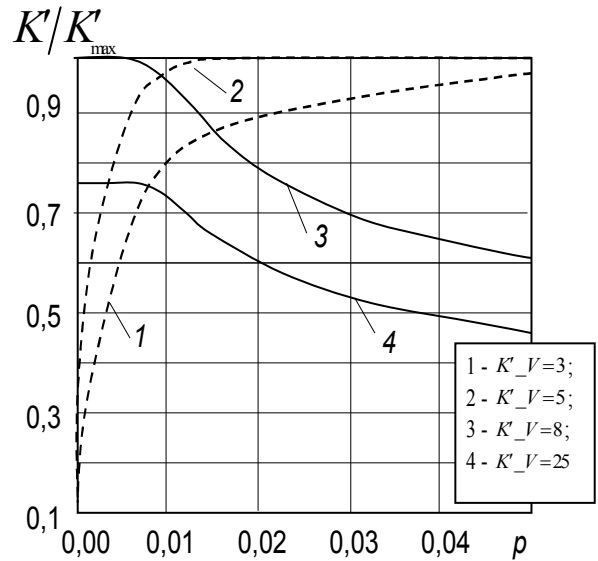


Рис. 7. Графіки залежності  $\tilde{K}'/\tilde{K}'_{max}$  від  $p$  при  $V = \text{const}$

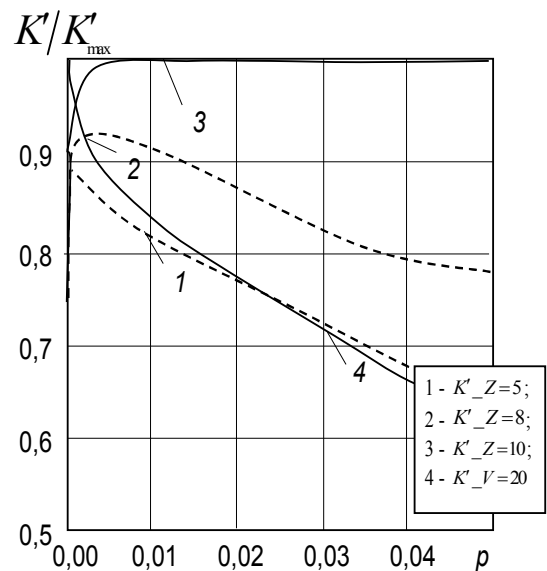


Рис. 8. Графіки залежності  $\tilde{K}'/\tilde{K}'_{max}$  від  $p$  при  $Z = \text{const}$

## Висновки

В роботі виконана апроксимація моделі КВК наближеними диференційованими функціями на основі математичного апарату регресійного аналізу. Отримані наближені аналітичні вирази залежності коефіцієнта використання каналів від співвідношення величини навантаження, числа каналів і необхідної якості обслуговування на гілках мережі. Дані залежності відображають суть процесів обслуговування заявок в телекомунікаційній мережі, мають достатньо високий рівень адекватності і диференціюються в діапазоні досліджуваних значень параметрів функціонування мережі.

На основі отриманих аналітичних залежностей розроблені практичні рекомендації щодо алгоритму формування плану розподілу навантаження, який забезпечує мінімізацію необхідного каналного ресурсу в мережі при забезпеченні заданої якості обслуговування в напрямках зв'язку.

Крім того, отримані аналітичні залежності КВК дають можливість усунути невизначеності при рішенні системи нелінійних рівнянь, яка описує вимоги до QoS в напрямках зв'язку. Це з достатнім для практики ступенем точності дозволяє визначити допустимі значення показників якості обслуговування на гілках мережі при виконанні обмежень щодо якості обслуговування в напрямках зв'язку.

## Перелік посилань

1. Лемешко А.В. Повышение масштабируемости и производительности решений по отказоустойчивой маршрутизации в телекоммуникационных сетях / А.В. Лемешко, А.С. Еременко, Н.Н. Тарики, К.М. Арус // Системи обробки інформації. – 2016. – №1 (138). – с. 152-156.
2. Lee Y. A Constrained Multipath Traffic Engineering Scheme for MPLS Networks / Y. Lee, Y. Seok, Y. Choi, C. Kim // Proc. IEEE ICC'2002. – 2002. – pp. 2431-2436.
3. Лаврут А. А. Описание системы спутниковой связи как сложного динамического объекта при помощи метода Крона / А.А. Лаврут, А.М. Мартиненко, Т.В. Лаврут // Системи обробки інформації. – 2010. – № 1. – с. 251-256.
4. Романов А. И. Телекоммуникационные сети и управление / А.И. Романов. – К.: ВПЦ "Київський ун-т 2003. – 246 с.
5. Стрелковская И. В. Особенности решения задач управления трафиком в телекоммуникационной сети / И.В. Стрелковская, И.Н. Соловская // Збірник наукових праць ОНАЗ ім. О. С. Попова. – 2011. – Вип. 2. – с. 24-34.
6. Klymash M. System for increasing quality of service of multimedia data in convergent networks / M. Klymash, M. Beshley, B. Stryhaluk // Проблемы инфокоммуникаций : межд. науч.-практ. конф. (PIC S&T-2014). – Харьков, 2014. – Том 2. – С. 96-103.
7. Belotti P. MPLS over Transport Network: Two Layers Approach to Network Design with Statistical Multiplexing / P. Belotti, A. Capone, G. Carello, F. Malucelli, F. Senaldi,

A. Totaro // Conference on Next Generation Internet Design and Engineering (NGI 2006). – Valencia, 2006. – pp. 308-318.

8. Краснов М. Л. Вся высшая математика / М. Л. Краснов, А.И. Киселев, Е.В. Шикин, В.И. Залогин. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 256 с.
9. Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: ООО "Издательский дом ОНИКС 21 век", 2005. – 400 с.
10. Knippel A. The Multi-Layered Network Design Problem / A. Knippel, B. Lardeux // European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol. 138, Iss. 1. – pp. 87-99.

## References

- [1] Lemeshko O.V., Yeremenko O.S., Tariki N., Arous K.M. (2016) Enhancement scalability and performance of fault-tolerant routing solutions in telecommunication networks. *Systemy obrobky informatsii*, No 1 (138), pp. 152-156.
- [2] Lee Y.A, Seok Y., Choi Y. and Kim C. (2002) Constrained Multipath Traffic Engineering Scheme for MPLS Networks. *2002 IEEE International Conference on Communications. Conference Proceedings. ICC 2002 (Cat. No.02CH37333)*, pp. 2431-2436. DOI: 10.1109/icc.2002.997280
- [3] Lavrut A.A., Martinenko A.M. and Lavrut T.V. (2010) Description of satellite communication network as difficult dynamic object through method of KRON, *Radioelektronni i komp'uterni systemy*, No 7(48), pp. 251-256.
- [4] Romanov A.I. (2003) *Telekommunikatsionnye seti i upravlenie*. Kyiv, VPTs "Kyivskiy univesytet", 246 p.
- [5] Strelkovskaya I.V. and Solovskaya I.N. (2011) Singularity of traffic management problem solving in telecommunication network. *Naukovi pratsi ONAZ im. O.S. Popova*, No 2, pp. 24-34.
- [6] Klymash M., Beshley M. and Stryhaluk B. (2014) System for increasing quality of service of multimedia data in convergent networks. *Problems of Infocommunications Science and Technology, 2014 First International Scientific-Practical Conference*, Vol 2, pp. 96-103. DOI: 10.1109/INFOCOMMST.2014.6992299
- [7] Belotti P., Capone A., Carello G., Malucelli F., Senaldi F., Totaro A. (2006) MPLS over Transport Network: Two Layers Approach to Network Design with Statistical Multiplexing. *Next Generation Internet Design and Engineering, 2006. NGI '06*, pp. 308-318. DOI: 10.1109/NGI.2006.1678258
- [8] Krasnov M.L., Kiselev A.I., Shikin E.V. and Zalogin V.I. (2003) *Vsya vysshaya matematika* [All higher mathematics]. Moscow, Editorial URSS, 256 p.
- [9] Verzhbitskii V.M. (2005) *Chislennyye metody (matematicheskiy analiz i obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya)* [Numerical methods (mathematical analysis and ordinary differential equations)]. Moscow, Izdatel'skii dom ONIKS 21 vek, 400 p.



- [10] Knippel A. and Lardeux B. (2007) The Multi-Layered Network Design Problem. *European Journal of Operational Research*, Vol. 138, Iss. 1, pp. 87-99. DOI: 10.1016/j.ejor.2006.07.046

## Применение регрессивной модели коэффициента использования каналов при формировании плана распределения нагрузки в сети

*Романов А. И., Нестеренко Н. Н., Маньковський В. Б.*

При решении задач управления, проектирования и оценки качества обслуживания в телекоммуникационных сетях нередко используется математическая модель коэффициента использования каналов. Однако, ее использование в стандартном виде имеет ряд неудобств. Это связано с тем, что используемые в модели аналитические выражения не дифференцируемы и не позволяют в явном виде выразить зависимость одних параметров через другие. В статье предложена аппроксимация математической модели коэффициента использования каналов приближенными дифференцируемыми функциями на базе математического аппарата регрессионного анализа. Даны рекомендации по использованию полученных результатов в ходе решения сетевых задач.

*Ключевые слова:* коэффициент использования каналов; простейший поток заявок; нагрузка сети; QoS; количество каналов; аппроксимирующая функция; регрессионный анализ

## The usage of regress model coefficient utilization of channels for creating the load distribution plan in network

*Romanov O. I., Nesterenko M. M., Mankivskiy V. B.*

Introduction. Method of problem solutions of management, design and quality evaluation using mathematical models coefficient utilization of channels (CUC) in standard form has several inconveniences. It is connected with fact models used analytical expressions that are not derivatives and don't explicitly get some parameters dependence by others. Formulation of the problem. Objective is obtain approximate analytical coefficient dependence channel utilization ratio of the load, the number of channels and allowable probability of loss requests on branches network. This ratio reflects essence of processes occurring in network with a high level of adequacy and differentiated range of values explored. Solution. The problem definition of empirical relationships is conducted by two stages. At the first stage the general form of analytical expressions was determined (7). In the second stage best settings analytical expressions were calculated. The calculation results are represented in Tables 1 and 2. Analysis of the CUC is carried by the first derivative functions. Results. Analytical dependences of the CCC were obtained. They allow you to remove indeterminacy in the solution of nonlinear equations. This nonlinear system describes the requirements for quality of service in connection direction. This reduces the requested channel resource in the network. That allows providing a certain quality of service in connection direction.

*Key words:* coefficient of channel used; simple flow requests; network load; QoS; number of channels; approximating function; regression analysis