

Оценка границы Крамера-Рао для 2D радиопеленгации в плоских антенных решетках

Нечаев Ю. Б.¹, Пешков И. В.²

¹Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

²Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина, г. Елец, Россия

E-mail: ilvpeshkov@gmail.com

В работе рассматриваются кольцевые, дугообразные и L-образные антенные решетки для задачи радиопеленгации со сверхразрешением стохастическим методом максимального правдоподобия и MUSIC. Вычислены границы Крамера-Рао для различных ситуаций, в т.ч. расположения сигналов по азимуту и углу места, а также отношений сигнал-шум. Получены зависимости среднеквадратического отклонения для азимутальной и угломестной пеленгации методом максимального правдоподобия и MUSIC в различной шумовой обстановке. Ключевые слова:

Ключевые слова: радиопеленгация; граница Крамера-Рао; MUSIC; метод максимального правдоподобия

Введение

Оценка угловых координат источников радиоизлучения (ИРИ) представляет серьезный исследовательский интерес и используется главным образом для разделения целей [1]. Конфигурации используемых антенных решеток (АР), которые были исследованы, причем только в азимутальной плоскости, главным образом, касались равномерных линейных (ЛАР), равномерных прямоугольных, а также равномерных кольцевых. В задачах, требующих как азимутальной, так и угломестной радиопеленгации были использованы планарные или плоские АР [2]. На сегодняшний день работы, посвященные сравнительному исследованию характеристик радиопеленгации со сверхразрешением, в том числе оценке границы Крамера-Рао, для различных конфигураций АР, касаются зачастую только одной или двух типов [3–13]. Поэтому получение оптимальной формы антенной решетки, позволяющей получить оценки координат источников радиоизлучения с наивысшей точностью весьма актуально.

1 Постановка задачи

На рис. 1 показана решетка из N элементов, произвольно распределенных в плоскости xy . Рассмотрим узкополосный сигнал $s(t)$ на несущей частоте ω_0 с угловыми координатами θ и φ относительно осей x и z соответственно, т.е. θ связана с азимутальной и φ с вертикальной плоскостями. Сигнал выражается как [14]

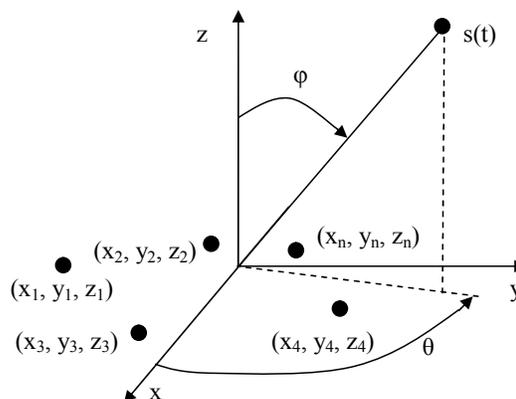


Рис. 1. АР произвольной формы

$$\tilde{s}(t) = u(t) \cos(\omega_0 t + \nu(t)), \quad (1)$$

где $u(t)$ и $\nu(t)$ — медленно изменяющиеся функции времени. Поскольку сигнал узкополосный, то задержка τ_i вызывает сдвиг фазы $\xi_i = -\tau_i \omega_0$, т.е.

$$s(t - \tau) = s(t) e^{j\xi_i} = s(t) e^{-j\tau_i \omega_0} \quad (2)$$

$$\xi_i = \frac{\omega_0}{c} [x_i \sin \varphi \cos \theta + y_i \sin \varphi \sin \theta + z_i \cos \varphi] \quad (3)$$

где λ — длина волны. И теперь, если сигналы на АЭ обозначить как x_1, x_2, \dots, x_N , то в векторной форме они будут выглядеть как:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}(\omega, \theta, \lambda) s(t) = \begin{bmatrix} e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_1^T} & e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_2^T} & \dots & e^{j\mathbf{k}\mathbf{r}_N^T} \end{bmatrix} s(t) \quad (4)$$

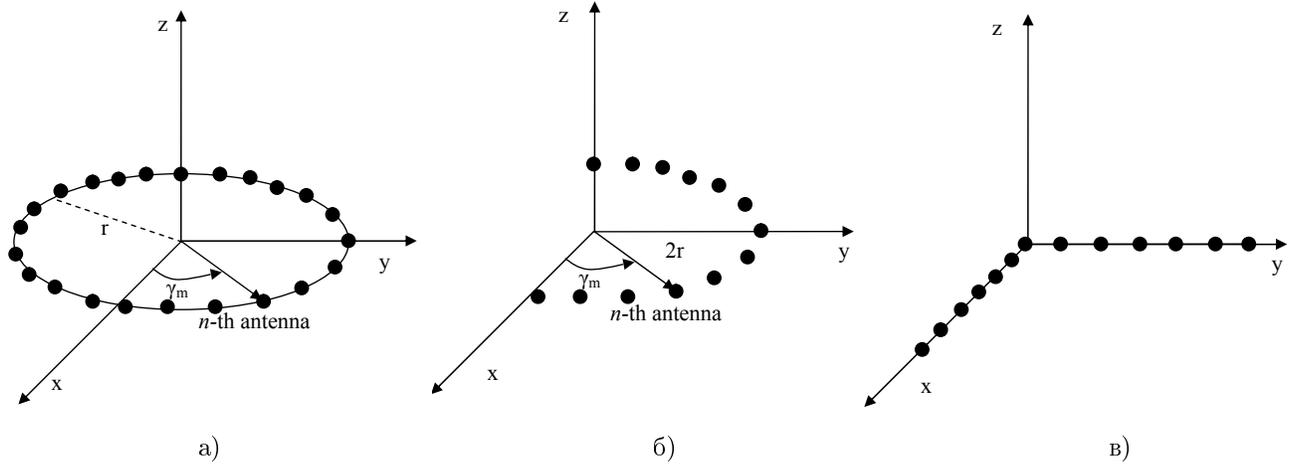


Рис. 2. Изображение а) кольцевой, б) дугообразной и в) L-образной АР

где $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(k_x, k_y, k_z) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$ — волновое число, $\mathbf{r}_n^T = (x_n, y_n, z_n)^T$ — радиус-вектор к n -му АЭ.

Как уже было показано [15], на точность радиопеленгации оказывает влияние межэлементное расстояние, а также форма АР. Известно, что решетки L-образной (рис. 2в) [16], а также дугообразной формы (рис. 2б) [17] могут давать лучшие характеристики, чем кольцевые (рис. 2а) для одного источника сигнала. Поэтому актуальным является вопрос о выборе наилучшей формы АР для нескольких источников сигналов, а также метода радиопеленгации. Естественным и распространенным критерием выбора геометрии АР является нижняя граница Крамера-Рао.

2 Граница Крамера-Рао для 2D радиопеленгации

Пусть имеется вектор $\vec{\mathbf{x}}(t)$, образующий стационарный гауссовский процесс с нулевым средним, имеющим моменты второго рода:

$$E \{ \vec{\mathbf{x}}(t) \vec{\mathbf{x}}^H(t) \} = \mathbf{R} \delta_{ij} = (\mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I}) \delta_{ij} \quad (5)$$

$$E \{ \vec{\mathbf{x}}(t) \vec{\mathbf{x}}^T(t) \} = 0, \quad (6)$$

где \mathbf{S} — корреляционная матрица сигналов, \mathbf{A} — матрица направляющих векторов, σ^2 — мощность шума. При этом сигналы и шум являются реализациями случайных гауссовских величин.

Функция правдоподобия отсчетов $\vec{\mathbf{x}}(t_1), \dots, \vec{\mathbf{x}}(t_N)$, которые являются независимыми и идентично распределенными, задается:

$$p(\vec{\mathbf{x}}(t_1), \dots, \vec{\mathbf{x}}(t_N) | \theta, \mathbf{S}, \sigma^2) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\pi^N |\mathbf{R}|} e^{-\vec{\mathbf{x}}^H(t_i) \mathbf{R}^{-1} \vec{\mathbf{x}}(t_i)} \quad (7)$$

где N — количество АЭ, $|\dots|$ — детерминант матрицы. Максимизация $p(\theta, \mathbf{S}, \sigma^2)$ эквивалентно минимизации отрицательной логарифмической функции правдоподобия:

$$p(\theta, \mathbf{S}, \sigma^2) = N \log |\mathbf{R}| + - \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^H(t_i) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}(t_i) = \log |\mathbf{R}| + Tr \{ \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{R}} \} \quad (8)$$

После некоторых алгебраических преобразований функция правдоподобия (7) может быть упрощена по отношению к \mathbf{S} и σ^2 :

$$\hat{\mathbf{S}}(\theta) = \mathbf{A}^\dagger(\theta) (\hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}) \mathbf{A}^{\dagger H}(\theta) \quad (9)$$

$$\hat{\sigma}^2(\theta) = \frac{1}{m-d} Tr \{ \mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}} \} \quad (10)$$

где \mathbf{A}^\dagger — псевдоинверсия матрицы \mathbf{A} и \mathbf{P}_A^\perp — ортогональный проектор на нуль-пространство \mathbf{A}^H . Оценки параметров сигнала получаются путем решения следующей оптимизационной проблемы [18]:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} V_{SML}(\theta) \quad (11)$$

$$V_{SML}(\theta) = \log |\mathbf{A}(\theta) \hat{\mathbf{S}}(\theta) \mathbf{A}(\theta)^H + \hat{\sigma}(\theta) \mathbf{I}| \quad (12)$$

Важным параметром измерения, насколько хорошо функционирует тот или иной метод, является ковариационная матрица ошибок оценок, нижняя граница которой вычисляется согласно критерию Крамера-Рао (ГКР). Пусть $\hat{\eta}$ — несмещенная оценка вектора параметров η_0 , т.е. $E \{ \hat{\eta} \} = \eta_0$ на основе наблюдений \mathbf{X}_N , тогда нижняя граница Крамера-Рао задается:

$$E \{ (\hat{\eta} - \eta_0)(\hat{\eta} - \eta_0)^T \} \geq \left[-E \left\{ \frac{\partial^2 \log p(\mathbf{X}_N | \eta)}{\partial \eta \partial \eta^T} \right\} \right]^{-1} \quad (13)$$

ГКР легко выводится из нормализованной отрицательной логарифмической функции правдоподобия (8). Компактное выражение ГКР для P параметров M сигналов представлено в [18]:

$$E \left\{ \left(\hat{\theta} - \theta_0 \right) \left(\hat{\theta} - \theta_0 \right)^T \right\} \geq \mathbf{B}_{STO} \quad (14)$$

$$\left\{ \mathbf{B}_{STO}^{-1} \right\}_{ij} = \frac{2N}{\sigma^2} \Re \left[Tr \left\{ \mathbf{A}_j^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{A}_i \mathbf{S} \mathbf{A}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} \right\} \right] \\ i, j = 1, \dots, pM. \quad (15)$$

Для случая, когда только один параметр ($p = 1$) ассоциирован с каждым сигналом, ГКР может быть записана:

$$\mathbf{B}_{STO} = \frac{\sigma^2}{2N} \Re \left[Tr \left\{ \left(\mathbf{D}^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D} \right) \circ \left(\mathbf{S} \mathbf{A}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} \right)^T \right\} \right]^{-1} \quad (16)$$

где \circ — обозначает поэлементное умножение и

$$\mathbf{D} = \left[\left. \frac{\partial \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_1}, \dots, \left. \frac{\partial \mathbf{a}(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_d} \right] \quad (17)$$

Для распространения ГКР (16) на произвольное число сигналов и их параметров (прежде всего, азимутальная и угломестная пеленгация) воспользуемся [19]. Определим матрицы производных D_θ и D_φ :

$$\mathbf{D}_{\theta, \varphi} = \left[\left. \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_1, \varphi_1)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\theta_1, \varphi_1}, \dots, \left. \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_d, \varphi_d)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\theta_d, \varphi_d} \right] \quad (18)$$

Таким образом, ковариационную матрицу ошибок оценок для 2D радиопеленгации можно записать:

$$\mathbf{B}_{STO} = \frac{\sigma^2}{2N} \Re \left[Tr \left\{ \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \Xi & \Xi \\ \Xi & \Xi \end{bmatrix}^T \right\} \right]^{-1} \quad (19)$$

где $\Lambda_1 = \mathbf{D}_\theta^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}_\theta$, $\Lambda_2 = \mathbf{D}_\theta^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}_\varphi$, $\Lambda_3 = \mathbf{D}_\varphi^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}_\theta$, $\Lambda_4 = \mathbf{D}_\varphi^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{D}_\varphi$, $\Xi = \mathbf{S} \mathbf{A}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}$.

Допустим, имеется направляющий вектор произвольной антенной решетки (4), тогда частные производные вектора $\mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m)$ от θ и φ :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_m, \varphi_m)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\theta_m, \varphi_m} = \left. \frac{\partial e^{j\mathbf{k}_1 \mathbf{R}^T}}{\partial \eta} \right|_{\eta=\theta_m, \varphi_m} = \\ = \left. \frac{\partial j\mathbf{k}_1 \mathbf{R}^T}{\partial \eta} e^{j\mathbf{k}_1 \mathbf{R}^T} \right|_{\eta=\theta_m, \varphi_m} \quad (20)$$

3 Исследование плоских антенных решеток

Выполним сравнительную статистическую оценку методов максимального правдоподобия (8),

MUSIC [20] и сравним их с границей Камера-Рао (19). В качестве антенных решеток, на которых будут испытываться методы, будут кольцевая, дугообразная и L-образная АР. Все АР состоят из 24 АЭ, межэлементное расстояние — 0.5λ , угол между двумя гранями L-решетки равен 45° , радиус дугообразной АР в сравнении с кольцевой увеличен в два раза. Количество отсчетов усреднения корреляционной матрицы 100, число итераций повторения 500. Для задания сигналов на АР воспользуемся выражением (5), параметры которого S и σ^2 определяют отношение сигнал-шум (ОСШ). Начальные значения для минимизации функции (12), проводимой по методу Ньютона-Гаусса [21], задавались как координаты, полученные методом MUSIC. Приводится оценка среднеквадратического отклонения (СКО) оценки пеленга по азимуту и углу места. Примем ситуацию с одним источником излучения, азимутальная координата которого $\theta = 25^\circ$, угол склонения возьмем поочередно $\varphi = 5^\circ, 45^\circ$ и 85° . Примем следующие обозначения: “о” — кольцевая АР, “◇” — дугообразная АР, “+” — L-образная АР.

Из рис. 3-5 видно, что лучшая антенная — это дугообразная антенная решетка. Следующая АР по точности — L-образная антенная решетка. Худшая из рассматриваемых по точности определения координат по азимуту и углу места — кольцевая АР.

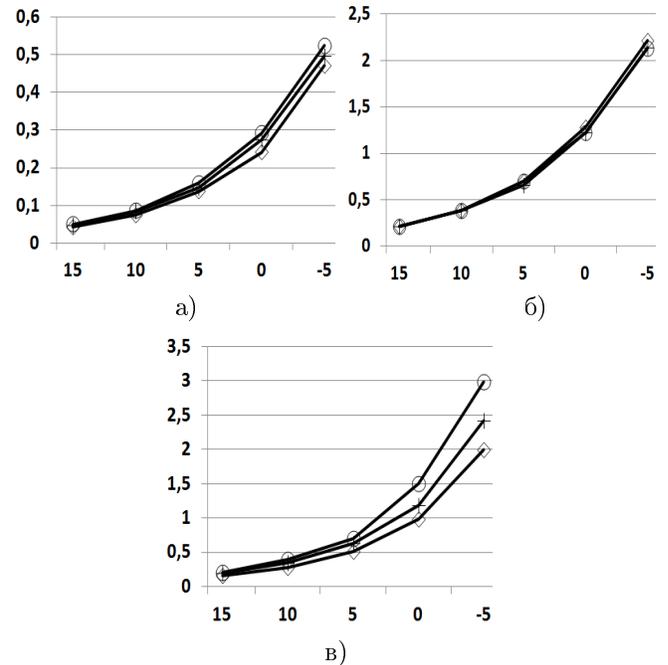


Рис. 3. Метод максимального правдоподобия а) $\varphi = 45^\circ$, б) 5° и в) $\varphi = 85^\circ$ одного сигнала

При этом разница СКО становится более выраженной, т.е. $0, 5^\circ$ и выше, если источник сигнала имеет координату относительно оси z $\varphi = 85^\circ$. Если источник расположен в середине угла места, т.е. $\varphi = 45^\circ$,

то разница между рассматриваемыми геометриями AP незначительна.

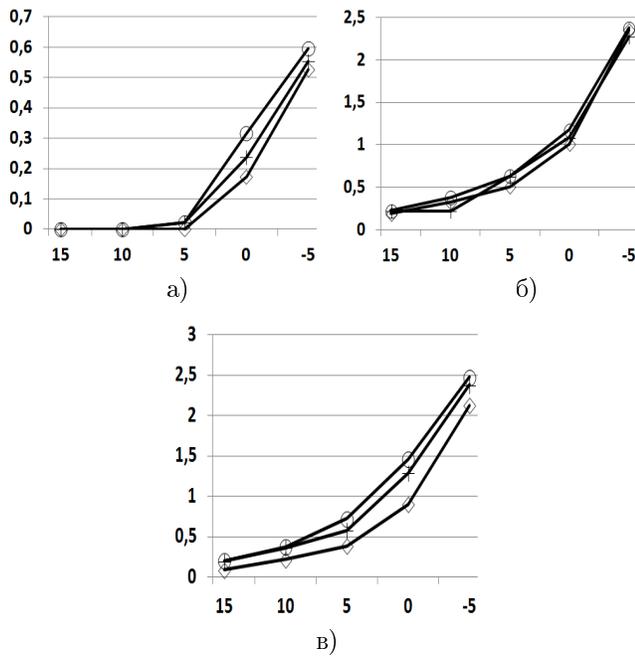


Рис. 4. Метод MUSIC а) $\varphi = 45^\circ$, б) 5° и в) $\varphi = 85^\circ$ одного сигнала

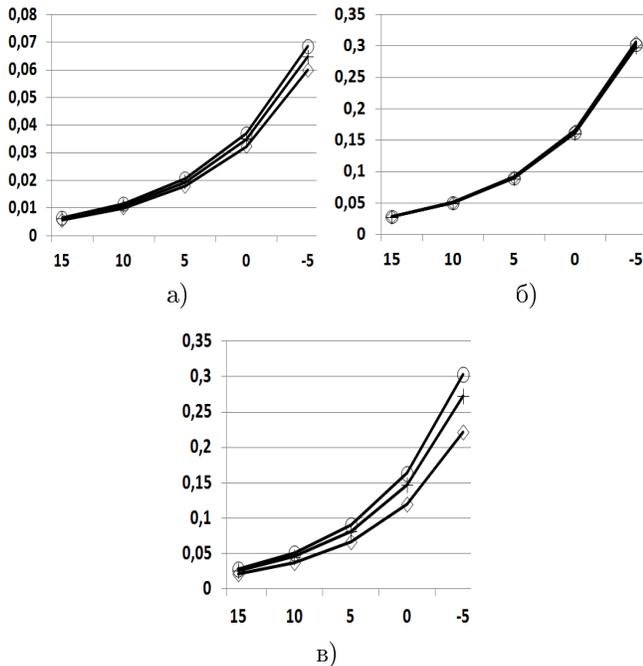


Рис. 5. Граница Крамера-Рао а) $\varphi = 45^\circ$, б) 5° и в) $\varphi = 85^\circ$ одного сигнала

Рассмотрим ситуацию с несколькими источниками сигналов. Первый сигнал имеет азимут $\theta_1 = 25^\circ$, второй — $\theta_2 = 35^\circ$, угловые координаты изменяются между $\varphi = 10^\circ, 45^\circ, 85^\circ$.

Из рис. 6-8 видно, что лучшей антенной решеткой для получения пространственных координат по

азимуту и углу места является дугообразная AP. Это видно как из результатов статистического эксперимента двух типов методов радиопеленгации со сверхразрешением, а также, что наиболее важно, из ГКР. Причем повышение точности для нескольких источников сигналов носит весьма значительные величины, 3° и выше для рассматриваемых методов. Из рис. 7б видно, что для MUSIC отсутствует СКО для ОСШ=0 дБ, это связано с появлениями ложных пиков. Причем L- и дуго-образные AP позволили получить оценки.

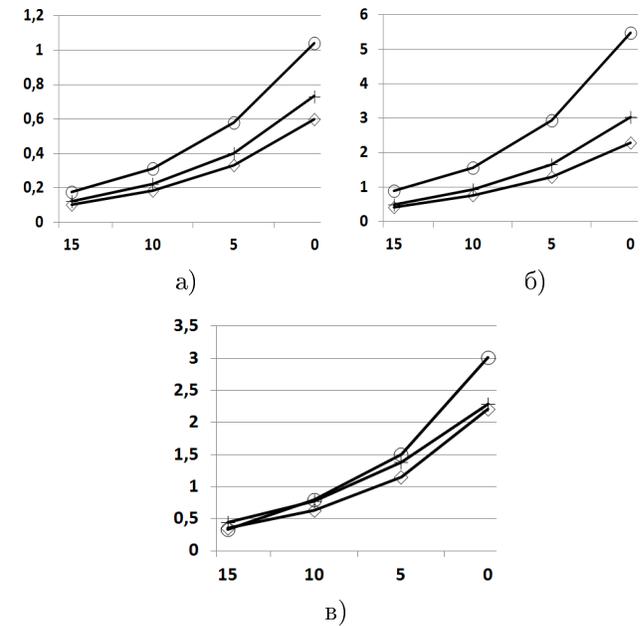


Рис. 6. Метод максимального правдоподобия а) $\varphi = 45^\circ$, б) 10° и в) $\varphi = 85^\circ$ двух сигналов

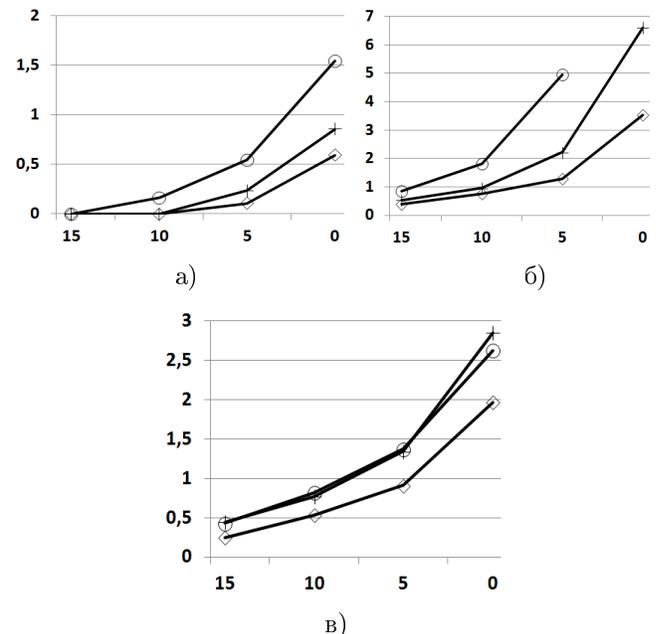


Рис. 7. Метод MUSIC а) $\varphi = 45^\circ$, б) 10° и в) $\varphi = 85^\circ$ двух сигналов

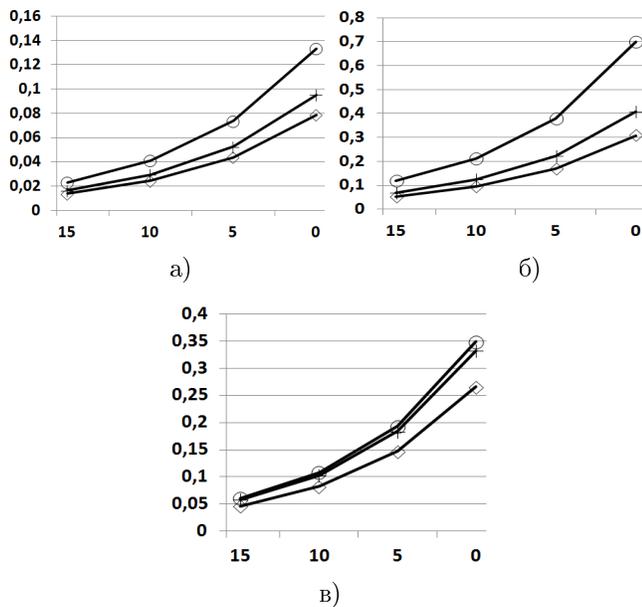


Рис. 8. Граница Крамера-Рао а) $\varphi = 45^\circ$, б) 10° и в) $\varphi = 85^\circ$ двух сигналов

Выводы

В работе проведена адаптация выражения границы Крамера-Рао для задач 2D радиопеленгации плоских АР. Проведено исследование методов радиопеленгации со сверхразрешением MUSIC, максимального правдоподобия в составе кольцевых, дугообразных и L-образных антенных решеток в различной шумовой обстановке. Установлено, что для получения более точных оценок двумерных угловых координат ИРИ, в том числе для наихудших случаев расположения источников, т.е. при удалении от середины угла склонения и в случаях появления ложных пиков, необходимо использовать метод максимального правдоподобия в составе дугообразных АР поскольку ее габариты в 2 раза больше кольцевой при том же числе элементов. Превосходство метода правдоподобия по точности связано с реализацией поиска наилучшего соответствия согласно критерию наименьшего квадратичного отклонения, как видно из (7).

References

- [1] Tuncer T. E. and Friedlander B. (2009) *Classical and Modern Direction-of-Arrival Estimation*, Academic Press, 456 p.
- [2] Godara L.C. (1997) Applications of antenna arrays to mobile communications. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 85, Iss. 8, pp. 1195-1245. DOI: 10.1109/5.622504
- [3] Nechaev Yu., Borisov D. and Peshkov I. (2011) Beamforming algorithm for circular antenna array immune to multipath propagation and non-stationary interference sources. *Radioelectronics and Communications Systems*, Vol. 54, No. 11, pp. 604-612. DOI: 10.3103/S0735272711110045
- [4] Nechaev Yu.B., Peshkov I.V., Aalmuttar Atheer Y.O. and Al Khafaji Sarmad K.D. (2016) Accuracy evaluation of super-resolution DOA estimation methods for ring and concentric antenna arrays. *Teoriya i tekhnika radiosvyazi*, Vol. 1, Iss. 2, pp. 79-86 (in Russian).
- [5] Mahmoud K. [et al.] (2007) A comparison between circular and hexagonal array geometries for smart antenna systems using particle swarm optimization. *Progress in Electromagnetics Research*, Vol.72, p. 75–90. doi:10.2528/PIER07030904
- [6] Gozasht F., Dadashzadeh G. R. and Nikmehr S. (2007) A comprehensive performance study of circular and hexagonal array geometries in the lms algorithm for smart antenna applications. *Progress in Electromagnetics Research*, Vol. 68, pp. 281-296. doi:10.2528/PIER06091002
- [7] Dessouky M., Sharshar H. and Albagory Y. (2006) Efficient sidelobe reduction technique for small-sized concentric circular arrays. *Progress in Electromagnetics Research*, Vol.65, pp. 187-200. doi:10.2528/PIER06092503
- [8] Serdar O.A. (2013) High-Resolution Direction-of-Arrival Estimation via Concentric Circular Arrays. *ISRN Signal Processing*, Vol. 2013, Article ID 859590, 8 p., DOI: 10.1155/2013/859590
- [9] Ioannides P. and Balanis C. (2005) Uniform circular and rectangular arrays for adaptive beamforming applications. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, Vol.4, No 1, pp.351–354. DOI: 10.1109/LAWP.2005.857039
- [10] Kretly L. C., Cerqueira Jr. A. S. and Tavora A. A. S. (2002) A hexagonal adaptive antenna array concept for wireless communication applications. *The 13th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio*, Vol. 1, pp. 247–249. DOI: 10.1109/PIMRC.2002.1046698
- [11] Espandar M. and Bakhshi H.R. (2009) DOA estimation for rectangular antenna array in multipath fading and MIMO channels. *2009 International Conference on Future Computer and Communication*, Kuala Lumpur, pp.122-126. DOI: 10.1109/ICFCC.2009.86.
- [12] Meenakshi A. V., Punitham V. and Gowri T. (2011) DOA Estimation for Rectangular Linear Array Antenna in Frequency Non Selective Slow Fading MIMO Channels. *Communications in Computer and Information Science*, Vol. 203, pp. 12-24. DOI: 10.1007/978-3-642-24037-9_2
- [13] Agatonovi M., Stankovic Z., Milovanovic I., Doncov N., Sit L., Zwick T. and Milovanovic B. (2013) Efficient neural network approach for 2d doa estimation based on antenna array measurements. *Progress In Electromagnetics Research*, Vol. 137, pp.741–758. DOI: 10.2528/PIER13012114
- [14] Harry L. Van Trees (2002) *Optimum Array Processing: Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory*, John Wiley & Sons, 1470 p.
- [15] Nechaev Y. and Peshkov I. (2016) Building circular, octagonal, hexagonal and rectangular antenna arrays for direction-of-arrival via superresolutional method MUSIC. *Radiotekhnika - Radioengineering*, No. 6, pp. 137-142 (in Russian).
- [16] Hua Y., Sarkar T. K. and Weiner D. D. (1991) An L-shaped array for estimating 2-D directions of wave arrival. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 39, No 2, pp. 143–146, DOI: 10.1109/8.68174
- [17] Gazzah H. and Abed-Meraim K. (2009) Optimum Ambiguity-Free Directional and Omnidirectional Planar Antenna Arrays for DOA Estimation. *IEEE Transactions on signal processing*, Vol. 57, No. 10, pp. 3942-3953. DOI: 10.1109/TSP.2009.2023943

- [18] Stoica P. and Nehorai A. (1990) Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 38, No. 10, pp. 1783-1795. DOI: 10.1109/29.60109
- [19] Chan A.Y.J. and Litva J. (1995) MUSIC and maximum likelihood techniques on two-dimensional DOA estimation with uniform circular array. *IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation*, Vol. 142, No 3, pp. 105-114. DOI: 10.1049/ip-rsn:19951756.
- [20] Schmidt R. (1986) Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 34, no. 3, pp. 276-280. DOI: 10.1109/TAP.1986.1143830
- [21] Nechaev Y., Klimov A. and Peshkov I. (2016) Investigation of iterative stochastic maximum likelihood DOA estimation in planar antenna arrays. *Radiotekhnika - Radioengineering* (in Russian, In publish)

Оцінка межі Крамера-Рао для 2D радіопеленгації в плоских антенних решітках

Нечаев Ю. Б., Пешков И. В.

В роботі розглядаються кільцеві, дугоподібні і L-подібні антенні решітки для завдання радіопеленгації з надрозріненням стохастичним методом максимальної правдоподібності і MUSIC. Обчислені межі Крамера-Рао для різних ситуацій, в т.ч. розташування сигналів по азимуту і куту місця, а також відношення сигнал-шум. Отримано залежності середньоквадратичного відхилення

для азимутального і кутомісного пеленгування методом максимальної правдоподібності в різних шумових обставинах.

Ключові слова: радіопеленгація; межа Крамера-Рао; MUSIC; метод максимальної правдоподібності

Evaluating Cramer-Rao Bound for 2D direction-finding via planar antenna arrays

Nechaev, Yu. B., Peshkov, I. V.

Evaluation of angular coordinates of radio sources is a major research interest and is mainly used for the separation of objectives. The configurations used by antenna arrays, which have been studied mainly concerned uniform linear, uniform rectangular, circular and uniform. The main advantage for the LAR-finding tasks is narrow main lobe of the directivity pattern, but scanning is only possible in the azimuth plane. In problems that require both azimuth and elevation direction finding planar AR was used. To date, the work devoted to a comparative study with superresolution direction finding performance, including estimates of the boundary of the Cramer-Rao, different configurations for the AP, touch often only one or two types of. Therefore, to obtain the optimal shape of the antenna array, which allows to obtain estimates of target coordinates with the highest accuracy is very important.

Key words: direction-finding; Cramer-Rao bound; MUSIC; maximum likelihood method