Visnyk NTUU KPI Seriia – Radiotekhnika Radioaparatobuduvannia, 2017, Iss. 69, pp. 78–85

УДК 621.396:519.15

Моделі оптимальних багатовимірних сигналів в просторових системах координат

Різник В. В.

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

E-mail: *rvv@polynet.lviv.ua*

Розглядаються моделі оптимальних багатовимірних дискретних сигналів для вдосконалення методів опрацювання векторних даних, які визначаються функціями двох і більше змінних, залежних від просторових координат. Досліджено зв'язок розглянутих моделей з класичними комбінаторними конфігураціями, теорією циклічних груп та обертовою симетрією. Описані моделі переважають класичні аналоги за чисельністю та різноманітністю тонкої структури, що дає змогу розширити сферу їх практичного застосування в багатовимірних системах керування, системах зв'язку, векторних інформаційних технологіях.

Ключові слова: векторний ІКВ-простір; обертова симетрія; базисний вектор; розгортка поверхні тору; оптимальний векторний код; векторні дані; розмірність простору; багатовимірна система керування; векторні інформаційні технології

Вступ

В сучасній науці і техніці все ширшого застосування набувають багатовимірні дискретні сигнали, що в загальному випадку є багатовимірними функціями просторових незалежних змінних. Наприклад, в системах автоматичного керування такими функціями можуть бути векторні поля, де взаємодія між ланками системи здійснюється на контактних полях відповідної розмірності, у фізиці — просторовий розподіл енергії квантового потоку вздовж напрямку випромінювання і т.п., де керування відбувається в просторовій системі координат. При цьому під координатами багатовимірного сигналу розуміють будь-які аргументи, на числових осях яких фіксується динаміка його зміни, що дає змогу керувати одночасно двома й більшим числом взаємопов'язаних параметрів якогось фізичного процесу. Специфіка багатовимірних систем керування полягає в тому, що поведінка кожної керованої координати визначається не лише керуючим діянням, а й усією сукупністю цих діянь, які утворюють вектор керування, та вектором збурювань. Яскравими прикладами можуть фігурувати система стабілізації частоти й напруги генераторів в енергосистемах, система керування швидкістю обертання й температурою газів у турбореактивних двигунах і т.п. Стрімкий розвиток інформаційних технологій та глобальна комп'ютеризація суспільства вимагає розроблення концептуально нових підходів до швидкісного опрацювання великих масивів даних та надійного їх пересилання каналами зв'язку, використовуючи багатовимірні дискретні сигнали. Тому синтез та використання оптимальних моделей багатовимірних сигналів в просторових системах координат набуває важливого значення.

1 Огляд моделей оптимальних багатовимірних сигналів

Дослідження моделей оптимальних багатовимірних сигналів пов'язано з використанням властивостей математичних структур, таких як блок-схеми [1], різницеві множини [2], скінченні геометрії й проективні геометрії Зінґера [3], матриці Адамара [4], ортогональні латинські квадрати [5] та інші комбінаторні конфігурації, які представляють собою системи розподілу елементів серед заданого числа множин за правилами появи певних наборів елементів визначене число разів. Не зважаючи на численні форми інтерпретацій, такі конфігурації взаємопов'язані певними математичними залежностями. Відомо, що поле Ґалуа $\mathrm{GF}(p^s)$ [6] можна зобразити як множину всіх класів лишків за модулем довільного полінома степеня s незвідного над $\mathrm{GF}(p)$. Поліном $f(x)$ степеня $s \geq 1$ з коефіцієнтами із поля $\mathrm{GF}(p)$ є незвідним над $\mathrm{GF}(p)$, якщо його не можна записати у вигляді $f(x) = A(x)B(x)$, де $A(x)$ і $B(x)$ - поліноми над $\mathrm{GF}(p)$. У $\mathrm{GF}(p^s)$ всі його $p^s - 1$ ненульові елементи різні та утворюють циклічну групу за операцією множення [7]. За теоремою Зінґера [3] гіперплощини геометрії $\mathrm{PG}(s, q^s)$, де q — степінь простого числа p, які розглядаються як блоки, і точки як елементи, утворюють симетричну блок-схему з параметрами:

$$v = \frac{q^{s+1}-1}{q-1}, \quad k = \frac{q^s-1}{q-1}, \quad \lambda = \frac{q^{s-1}-1}{q-1}. \qquad (1)$$

В [2] показано, що PG(s,q) визначають циклічну різницеву множину з параметрами v, k, λ, де PG(s,q^s) має v точок і стільки ж гіперплощин, кожна з яких містить k точок, і дві різні гіперплощини пересікаються по підпростору розмірності $(s-2)$, який має λ точок, а точки у будь-якій гіперплощині визначають (v,k,λ) — різницеву множину у вигляді лишків її елементів за модулем v. Там же наводиться перелік деяких сімей різницевих множин з коротким їх описом. До типу S належать зінґерові різницеві множини з параметрами (1), які є гіперплощинами в PG(s,q), $q = p^r$; тип Q (квадратичні лишки в GF(p^s), $p^r \equiv 3(mod4)$ з параметрами $v = p^r = 4t-1, k = 2t-1, \lambda = t-1$; тип $H_6(p = 4x^2+27)$, p- просте число; тип T (прості числа-близнюки); тип B — біквадратичні лишки простих чисел виду $p = 4x^2+1$, де x — непарне число; тип B_0 — біквадратичні лишки і нуль за модулем простих чисел виду $p = 4x^2+9$, де x — непарне число; тип O_0 — восьмиричні лишки і нуль за модулем простих чисел виду $p = 8a^2+49 = 64b^2+441$, де a — непарне, а b — парне; тип W_4 — узагальнення типу Т, де p і q такі, що $(p-1, q-1) = 4$.

В роботі [8] запропоновано об'єднати різновиди комбінаторних конфігурацій в математичну конструкцію, у якій відображені спільні для великого класу класичних комбінаторних конфігурацій властивості у вигляді послідовності цілих додатних чисел $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_n$, де число k_n знаходиться поруч числа k_1, утворюючи замкнену кільцеву схему, причому усі її числа, включно з усіма сумами з двох, трьох і т.д. поруч розміщених чисел вичерпують натуральний ряд від 1 до $(S-1)$ рівно по R разів, де S — сума усіх чисел цієї послідовності. Така комбінаторна структура дістала назву «ідеальна кільцева в'язанка» (ІКВ). Відзначено, що циклічній v, k, λ — різницевій множині будь-якого типу взаємно однозначно відповідає ІКВ з параметрами $S = v, n = k, R = \lambda$, а також циклічна блок-схема з такими ж параметрами, де S — сума елементів ідеальної кільцевої в'язанки, n- кількість елементів, R — число кільцевих сум з однаковими числовими сумами. Крім того, ІКВ з параметрами $S, n, R = 1$ відповідає циклічній проективній площині $(n-1)$-го порядку і приводить до генерації множини $(n-2)$ попарно ортогональних латинських квадратів порядку $(n-1)$. Там же описані методи та алгоритми побудови повних множин ІКВ, визначення умов існування та обчислення кількості ізоморфних варіантів ІКВ з фіксованими параметрами, а також методи побудови дво- та тривимірних ІКВ. Багатовимірні ІКВ мають значно більше ізоморфних різновидів порівняно з одновимірними ІКВ і можуть перетворюватися з однієї конструкції в іншу внаслідок операцій зміщення, доповнення, інверсії, перестановок або упорядкування, не змінюючи своїх комбінаторних властивостей. Параметри t -вимірної ІКВ взаємопов'язані формулами:

$$\begin{aligned} &\prod\nolimits_{\imath=1}^{t} m_i = \frac{n(n-1)}{R}, \\ &\text{або} \\ &\prod\nolimits_{i=1}^{t} m_i = \frac{n(n-1)}{R} + 1; \\ &(m_1, m_2, \ldots, m_t) = 1. \end{aligned} \qquad (2)$$

Комбінації утворюються послідовним додаванням векторів з урахуванням відповідних модулів $m_1, m_2, \ldots, m_t$. У статті [9] розглядається метод оптимізації багатовимірних систем за допомогою векторних ІКВ, який ґрунтується на використанні взаємозв'язку обертової симетрії S-го порядку та закодованою в ній асиметричними ІКВ- структурами. Створена за цим методом оптимізована t -вимірна система з кільцевою структурою дає змогу здійснювати керування нею на множині $N = n(n-1)$ її фіксованих станів за допомогою n базових сигналів. Метод передбачає використання оптимальної вагової системи n —позиційного двійкового коду, позиціям якого присвоєні значення відповідних ваг базисних векторів t — вимірної ІКВ.

2 Постановка задачі

Задача полягає в розробленні вдосконалених методів побудови моделей оптимальних багатовимірних дискретних сигналів з поліпшеними якісними показниками за надійністю, завадостійкістю, роздільною здатністю та захищеністю від несанкціонованого доступу для систем радіозв'язку, інформаційних технологій швидкісного опрацювання масивів з великим числом атрибутів набору даних і надійного їх пересилання каналами зв'язку, проектування багатовимірних систем керування функціями багатьох змінних в просторовій системі координат. Пряма задача оптимізації полягає у розширенні діапазону різноманітності дискретних станів багатовимірної системи керування при використанні фіксованого числа базисних кодових сигналів для керування системою. В оберненій постановці розглядається задача мінімізації числа базисних кодових сигналів для керування системою у фіксованому діапазоні її дискретних станів.

3 Метод вирішення задачі

Вирішення задачі полягає в знаходженні способу покриття множиною кільцевих t-вимірних векторсум, утворених на заданому числі n базисних векторів t -вимірного простору, множини усіх вузлових точок координатної сітки цього простору фіксованим числом різних способів. Для цього необхідно домогтися взаємно однозначного відображення множини усіх можливих кільцевих вектор-сум n - послідовності та множини координат усіх вузлових точок t-вимірної координатної сітки, утвореної n базисними векторами t-вимірного простору фіксованим числом способів.

Метод базується на використанні теорії комбінаторних конфігурацій [1] та теорії ідеальних кільцевих в'язанок (ІКВ) — комбінаторних структур, елементами яких постають числа або вектори, які на відміну від загально відомих різницевих множин та інших класичних комбінаторних конфігурацій мають ширший діапазон різновидів й багатший набір властивостей їх тонкої структури [8, 9]. Для синтезу та дослідження оптимальних багатовимірних дискретних сигналів в просторових системах координат доцільно притягнути теоретичні положення і методи t-вимірного комбінаторного аналізу.

4 Методи синтезу одно- та багатовимірних ІКВ

Один із підходів до побудови одновимірних $t = 1$ ІКВ базується на використанні властивостей полів Ґалуа та геометрій над ними. Для побудови ІКВ з параметрами υ, k, λ, де S — сума елементів ідеальної кільцевої в'язанки, n — кількість елементів, R — число кільцевих сум з однаковими числовими сумами, необхідно знайти незвідний над полем $\mathrm{GF}(p^s)$ поліном, визначити первісний елемент x цього поля з максимально можливим періодом згаданого елемента та обчислити степені $x^0, x^1, \ldots, x^z, (z = q^s - 2)$, які повинні "пробігати" усі значення ненульових елементів $\mathrm{GF}(p^s)$.

Метод побудови ІКВ [8] за допомогою апарату теорії полів Ґалуа полягає в наступному :

- за параметрами $S = \upsilon, n = k, R = \lambda$ знайти первісний незвідний над полем Ґалуа поліном відповідного степеня;
- визначити первісний поліном розширеного поля;
- обчислити усі ненульові елементи цього поля і побудувати граф, вершинами якого є елементи $x^0, x^1, \ldots, x^z, (z = q^s - 2)$;
- на побудованому графі обрати вершини, яким відповідають однакові значення коефіцієнтів при будь-якому з фіксованих степенів;
- сполучивши усі сусідні пари вершин ребрами, отримати графічне відображення ІКВ у вигляді багатокутника, вписаного в побудований граф.

Розглянемо відображення ІКВ з параметрами $n = 4, R = 1, S = 13$ на множині елементів кругового поля Ґалуа. У даному випадку первісний елемент x поля $\mathrm{GF}(3^2)$ задовольняє рівняння $f(x) = x^3 - x - 1$, де $f(x)$ — незвідний поліном над $\mathrm{GF}(3^2), p = 3, s = 2$. Елементи цього поля зведені в табл.1.

Табл. 1 Елементи $\mathrm{GF}(3^2)$, утворені за незвідним поліномом $f(x) = x^3 - x - 1$

$x^1 = x$	$x^8 = 2x^2 + 2$
$x^2 = x^2$	$x^9 = x + 2$
$x^3 = x + 1$	$x^{10} = x^2 + 2x$
$x^4 = x^2 + x$	$x^{11} = 2x^2 + x + 1$
$x^5 = x^2 + x + 1$	$x^{12} = x^2 + 2$
$x^6 = x^2 + 2x + 1$	$x^{13} = 1$
$x^7 = 2x^2 + 2x + 1$	

У кільцевий граф із $S = 13$ вершинами вписаний чотирикутник $(n = 4)$, вершинам якого x^1, x^3, x^9, x^{13} відповідають нульові коефіцієнти при степенях (рис. 1). Суміжні вершини цього чотирикутника рознесені по колу обертової симетрії 13-го $(S = 13)$ порядку на відстані, кратні числовим значенням (1,2,6,4), які є базисними векторами одновимірного ІКВ-простору.

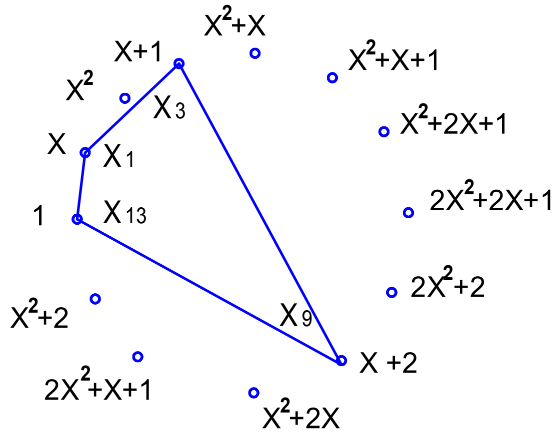

Рис. 1. Графічне зображення ІКВ (1, 2, 6, 4) у полі обертової симетрії 13-го $(S^* = 13)$ порядку

Відомо, що для побудови різних варіантів ІКВ-простору з однаковими параметрами та відповідними оптимальними структурними пропорціями можуть годитися однакові первісні поліноми, натомість різним поліномам відповідають ІКВ з однаковими параметрами. Наприклад, первісні поліноми $f_1(x) = x^2 - 2$ і $f_2(x) = x^2 + \mathrm{x} + 1$ відповідають одному з варіантів ІКВ, тоді як для решти варіантів доводиться дошукувати інші поліноми. Проблема побудови повних сімей ІКВ ускладнюється ще й наявністю численних неізоморфних варіантів ІКВ, які не вдається побудувати за допомогою математичного апарату теорії полів Ґалуа [1]. Тому виникла потреба в розробленні таких методів синтезу моделей оптимальних багатовимірних сигналів, які б могли задовольнити широке коло фахівців в області багатовимірних систем керування, векторних інформаційних технологій та радіозв'язку.

Нехай задана ІКВ $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_n$ з параметрами (S, n, R), де $S = m_1 \times m_2, (m_1, m_2) = 1$. Алгоритм побудови двовимірного ІКВ-простору включає в себе виконання наступних операцій:

- на послідовності $K_n = (k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_n)$ знайти кільцеві суми $S_j = \sum j_{i=1} k_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$;
- на множині кільцевих сум $S_j, j = 1, 2, \ldots, n$ знайти впорядковані пари чисел $(a_j, b_j), j = 1, \ldots, n$, де $(a_j \equiv S_j (\mathrm{mod}\ m_1)$, $b_j \equiv S_j (\mathrm{mod}\ m_2)$;
- впорядкувати пари чисел (a_j, b_j) за зростанням числових значень елементів b_j, й відповідно a_j;
- визначити елементи двовимірної ІКВ $((k_{1j}, k_{2j}))$; $k_{11} = a_1, k_{21} = b_1; k_{1j} \equiv a_j - a_{j-1} (\mathrm{mod}\ m_1)$, $(k_{2j} \equiv b_j - b_{j-1} (\mathrm{mod}\ m_2); j = 2, 3, \ldots, n$.

Наприклад, одновимірна ІКВ $(2, 5, 1, 3, 10)$, де $S = 21, n = 5, R = 1, m_1 = 3, m_2 = 7$ перетворюється у двовимірну ІКВ $((1, 0), (1, 1), (0, 1), (0, 2), (1, 3))$. Цей впорядкований набір є базисом двовимірного векторного ІКВ-простору, а множина усіх кільцевих вектор-сум, взятих по комплексному модулю $\mathrm{mod}\ (3, 7)$, утворює оптимальну систему кодування $n(n-1)+1 = 21$ дискретних сигналів у полі тороїдної системи координат 3×7 з використанням лише п'яти $(n = 5)$ базових кодових сигналів (табл.2).

Табл. 2 Оптимальний монолітно-груповий код на 2D-ІКВ ((1,0), (1,1), (0,1), (0,2), (1,3))

Вектор	Вагові розряди векторного коду				
	(1,0)	(1,1)	(0,1)	(0,2)	(1,3)
(0,0)	1	1	1	1	1
(0,1)	0	0	1	0	0
(0,2)	0	0	0	1	0
(0,3)	0	0	1	1	0
(0,4)	1	1	0	0	1
(0,5)	1	1	1	0	1
(0,6)	1	1	0	1	1
(1,0)	1	0	0	0	0
(1,1)	0	1	0	0	0
(1,2)	0	1	1	0	0
(1,3)	0	0	0	0	1
(1,4)	0	1	1	1	0
(1,5)	0	0	0	1	1
(1,6)	0	0	1	1	1
(2,0)	0	1	1	1	1
(2,1)	1	1	0	0	0
(2,2)	1	1	1	0	0
(2,3)	1	0	0	0	1
(2,4)	1	1	1	1	0
(2,5)	1	0	0	1	1
(2,6)	1	0	1	1	1

Такий код забезпечує оптимальне керування системою, стан якої визначається функціями двох $(t = 2)$ змінних. Множина усіх кільцевих вектор-сум, взятих по комплексному модулю $\mathrm{mod}\ (m_1, m_2, \ldots, m_t)$, утворює t — вимірну решітку $m_1 \times m_2 \times \ldots, \times m_t = \frac{n(n-1)}{R}$, або $m_1 \times m_2 \times \ldots, \times m_t = \frac{n(n-1)}{R} + 1$, яка рівночасно є множиною вузлових точок t- вимірної просторових координат цієї решітки, причому координати кожної вузлової точки зустрічаються рівно R разів [3]. Метод дає змогу здійснювати бієктивне перетворення векторного ІКВ-простору однієї розмірності в простір іншої розмірності за дотримання умови (2). Теоретично існує безліч ІКВ-просторів різної розмірності та способів їх перетворення одних в інші, причому зі збільшенням числа базових векторів ІКВ — простору багатоманітність варіантів формування таких просторів набуває швидкого темпу зростання без обмежень на число базових векторів і розмірність ІКВ — простору.

У наведених прикладах числові значення ІКВ $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_n$ є базисом одновимірного векторного ІКВ-простору, де кожен вектор можна однозначно подати у вигляді модульної (кільцевої) суми будь-якої кількості послідовно розміщених за кільцевою схемою базисних векторів ІКВ. На відміну від числових (одновимірних), ІКВ розмірності $t \geq 2$ є базисом t — вимірного векторного ІКВ-простору, де кожен вектор можна подати у вигляді кільцевої (t – модульної) суми послідовно розміщених за кільцевою схемою векторів ІКВ. За таким же принципом будується t — вимірний ІКВ-простір, де кожен t — вимірний вектор є відповідною кільцевою сумою базисних векторів цього простору.

Відносно незначна частина від загальної кількості ІКВ-просторів з фіксованими параметрами може утворюватися з досконалих циклічних υ, k, λ -різницевих множин (Perfect Cyclic Difference Sets) [2], де всі набори параметрів прив'язані до фіксованого значення порядку $S = \upsilon$ обертової симетрії, у полі якої знаходяться ці множини. На відміну від класичних різницевих множин, в ІКВ загального виду порядок симетрії S^* може набувати різних значень в деяких теоретично визначених межах при фіксованому n, і $R = 1$. Завдяки такому трактуванню ІКВ, в полі обертової симетрії порядку S^* можуть зароджуватися більше, ніж при фіксованому значенні $S = const$, варіантів багатовимірного ІКВ-простору. В контексті сказаного під одновимірною ІКВ будемо розуміти не лише послідовність цілих додатних чисел $(k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_n)$, кільцеві суми яких вичерпують натуральний ряд від 1 до $(S-1)$ рівно по R разів, де S — сума усіх чисел ІКВ, а ширше коло різновидів ІКВ, для яких вимога щодо переліку кільцевих сум є не обов'язковою. За таких умов базисом ІКВ-простору постає кільцева послідовність цілих додатних чисел $k_1, k_2, \ldots,\ k_i, \ldots, k_n$, усі кільцеві суми якої є неоднаковими за деяким фіксованим модулем. Кількість варіантів t-вимірного ІКВ-простору залежить від порядку обертової симетрії S^*, у полі якої знаходиться ІКВ n-го порядку, де $n(n-1) < S^* < n(n-1)^2$, n — число базисних векторів ІКВ-простору. В [9] показано, що зі збільшенням n зростає кількість породжених обертовою симетрією варіантів ІКВ-просторів, утворених на багатоманітності комбінацій їх базисних векторів з урахуванням різноманітних способів впорядкування модулів, причому збільшення простих дільників числа S^* приводить до зростання кількості варіантів векторних ІКВ-просторів.

Властивості векторного ІКВ-простору і відкриття великого класу векторних ІКВ-структур типу «Зірка Слава Україні!» [8], базисні вектори яких можуть змінювати взаємне розміщення всередині кільцевої структури за схемою зірки різного порядку симетрії, покриваючи координатною сіткою усі вузлові точки просторової решітки зіркового ІКВ-простору, розширює перспективи використання моделей оптимальних багатовимірних сигналів у задачах, пов'язаних із проблемою захисту інформації від несанкціонованого доступу. Нижче наводиться повний список базисних векторів для побудови двовимірного ІКВ-простору з параметрами $n = 4$, $R = 1$, S, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $12 < S < 36$ (табл. 3).

Табл. 3 Варіанти базисних векторів двовимірного ІКВ-простору з параметрами $n = 4$, $R = 1$, $12 < S < 36$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$

Варіант	Базисні вектори			
1	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(2,2)
2	(0,1)	(1,1)	(0,2)	(2,1)
3	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(2,2)
4	(0,1)	(1,2)	(0,2)	(2,0)
5	(0,1)	(1,2)	(1,1)	(2,1)
6	(0,1)	(1,2)	(2,1)	(2,3)
7	(0,1)	(1,3)	(0,2)	(2,3)
8	(0,1)	(1,3)	(1,1)	(2,2)
9	(0,2)	(1,0)	(0,3)	(2,2)
10	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(2,2)
11	(0,2)	(1,0)	(1,3)	(2,2)
12	(0,2)	(1,0)	(2,3)	(2,2)
13	(0,2)	(1,1)	(0,3)	(2,1)
14	(0,2)	(1,2)	(0,3)	(2,0)
15	(0,2)	(1,2)	(1,1)	(2,0)
16	(0,2)	(1,2)	(1,3)	(2,0)
17	(0,2)	(1,2)	(2,1)	(2,0)
18	(0,2)	(1,2)	(2,3)	(2,0)
19	(0,2)	(1,3)	(0,3)	(2,3)
20	(0,2)	(2,2)	(2,1)	(1,0)
21	(0,3)	(1,1)	(1,3)	(2,2)
22	(0,3)	(1,2)	(1,3)	(2,3)
23	(0,3)	(1,2)	(2,3)	(2,1)
24	(0,3)	(1,3)	(2,3)	(2,2)

У табл. 3 занесені усі варіанти впорядкованих за кільцевою схемою базисних векторів, кожен з яких дозволяє здійснювати відлік двовимірних векторів у просторовому полі ортогональної координатної сітки 3×4, яка покриває поверхню тору, утворюючи $n(n-1) = 12$ вузлових точок.

На відміну від класичних конфігурацій, векторний t-вимірний ІКВ-простір задається параметрами $n, R, S^*\, m_1, m_2, \ldots, m_t$, де n — число базисних t — вимірних векторів, R- кількість різних способів розкладання базисних векторів за правилами отримання кільцевих вектор-сум з урахуванням комплексного набору модулів $m_1, m_2, \ldots, m_t$, S^*- порядок обертової симетрії, яка породжує t-вимірний ІКВ-простір.

Один із методів швидкої розбудови наборів базисних векторів ґрунтується на використанні властивостей ІКВ як різновиду мультиплікативних груп, що дає змогу перетворювати одні варіанти наборів в інші за допомогою множення базисних векторів на відповідні вектор-коефіцієнти. Наприклад, з набору № 1 двовимірних $t = 2$ базисних векторів $((0,1),(1,0),(0,2),(2,2))$ можна отримати з точністю до реверсування три варіанти базисних векторів множенням векторів цього набору на вектор-коефіцієнти $(1,3),(2,1),(2,3)$. Множення здійснюється за комплексним модулем $\bmod (3,4)$: $((0,1),(1,0),(0,2),(2,2)) * (1,3) \rightarrow ((0,3),(1,0),(0,2),(2,2))$; варіант № 9 (реверс) $((0,1),(1,0),(0,2),(2,2)) * (2,1) \rightarrow ((0,1),(2,0),(0,2),(1,2))$; варіант № 4 (реверс) $((0,1),(1,0),(0,2),(2,2)) * (2,3) \rightarrow ((0,3),(2,0),(0,2),(1,2))$; варіант № 14. За допомогою цих же вектор-коефіцієнтів аналогічно можна отримати сім груп різних варіантів базисних векторів з точністю до реверсування по чотири набори в кожній з п'яти груп та по два набори у двох групах (табл. 4).

Перші п'ять рядків таблиці починаються зі схеми розміщення базисних векторів на координатній сітці 3×4 розгортки поверхні тора, над якою здійснюється операція множення на вектор-коефіцієнти $(1,3)$, $(2,1)$ та $(2,3)$ відповідно з приведенням праворуч новоутворених варіантів. У шостому рядку цієї таблиці розміщені шоста і сьома групи базисних векторів, які відрізняються від решти тим, що в кожній групі можливе взаємне перетворення варіантів №2 і №19, та №7 і №13 за допомогою двох вектор-множників — $(1,3)$ і $(2,3)$, тоді як множник $(2,1)$ лише перетворює варіанти базисних векторів всередині групи у самих себе з реверсуванням. Ці дві мультиплікативні групи є незв'язані між собою. Обираючи початок відліку координат векторів в одній із 12-ти вузлових точок координатної сітки, можна загалом отримати $24 * 3 * 4 = 288$ варіантів базисних наборів векторів, не рахуючи дзеркально симетричних відображень та можливості взаємозаміни ортогональних кільцевих осей координатної сітки, розміщеної на поверхні тору. Будь-який із 288 наборів базисних векторів створює двовимірний

Табл. 4 Варіанти базисних векторів двовимірного ІКВ-простору в полі координатної сітки 3×4 поверхні тора

Вар. №1

3			
2	×		×
1	×		
0		×	
	0	1	2

⇒

Вар. №9

3	×		
2	×		×
1			
0		×	
	0	1	2

Вар. №4

3			
2	×	×	
1	×		
0			×
	0	1	2

Вар. №14

3	×		
2	×	×	
1			
0			×
	0	1	2

Вар. №11

3		×	
2	×		×
1			
0		×	
	0	1	2

⇒

Вар. №10

3			
2	×		×
1		×	
0		×	
	0	1	2

Вар. №18

3			×
2	×	×	
1			
0			×
	0	1	2

Вар. №17

3			
2	×	×	
1			×
0			×
	0	1	2

Вар. №12

3			×
2	×		×
1			
0		×	
	0	1	2

⇒

Вар. №20

3			
2	×		×
1			×
0		×	
	0	1	2

Вар. №16

3		×	
2	×	×	
1			
0			×
	0	1	2

Вар. №15

3			
2	×	×	
1		×	
0			×
	0	1	2

Вар. №21

3	×	×	
2			×
1		×	
0			
	0	1	2

⇒

Вар. №8

3		×	
2			×
1	×	×	
0			
	0	1	2

Вар. №23

3	×		×
2		×	
1			×
0			
	0	1	2

Вар. №6

3			×
2		×	
1	×		×
0			
	0	1	2

Вар. №24

3	×	×	×
2			×
1			
0			
	0	1	2

⇒

Вар. №3

3			
2			×
1	×	×	×
0			
	0	1	2

Вар. №22

3	×	×	×
2		×	
1			
0			
	0	1	2

Вар. №5

3			
2		×	
1	×	×	×
0			
	0	1	2

Вар. №2

3	×		
2	×		
1		×	×
0			
	0	1	2

⇔

Вар. №19

3		×	×
2	×		
1	×		
0			
	0	1	2

Вар. №7

3	×	×	×
2	×		
1			
0			
	0	1	2

⇔

Вар. №13

3			
2	×		
1	×	×	×
0			
	0	1	2

Табл. 5 Характеристика 2D і 3D ІКВ-просторів

Число базисних векторів	Кількість варіантів ІКВ-простору		Розміри 2D-ІКВ простору	Розміри 3D-ІКВ простору
n	2D	3D	$m_1 \times m_2$	$m_1 \times m_2 \times m_3$
3	4	-	2×3	-
4	24	-	3×4	-
5	272	-	4×5, 3×7	-
6	384	128	2×15, 5×6, 3×10	$2 \times 3 \times 5$
7	540	180	$2 \times 21{,}6 \times 7$, 3×14	$2 \times 3 \times 7$

ІКВ-простір, який покриває $nn(n-1) = 12$ вузлових точок координатної сітки 3×4 за рахунок використання усіх можливих кільцевих вектор-сум, що дає змогу керувати системою, стан якої визначається функціями двох ($t = 2$) змінних на множині 12-ти її фіксованих станів у двовимірному просторі. Керування такою системою можна здійснювати двійковим ІКВ-кодом, позиціям якого присвоєно ваги базисних векторів ІКВ-простору, причому для цього достатньо мати систему кодування двовимірних сигналів керування із чотирьох ($n = 4$) таких векторів. Характеристика 2D і 3D ІКВ-просторів з числом базисних векторів від 3 до 7 приведена у табл. 5.

5 Обговорення

Дослідження моделей оптимальних сигналів пов'язано з використанням класичної теорії комбінаторних конфігурацій [10]. З появою векторних інформаційних технологій виникла потреба вдосконалення методів опрацювання даних за допомогою оптимальних багатовимірних кодів і сигналів в просторових системах координат. Різновидність просторової структури оптимальних багатовимірних сигналів залежить від параметрів ІКВ-простору, які взаємопов'язані формулами (2). У загальному випадку стан оптимальної t-вимірної системи керування визначається функціями t змінних на $n(n-1)$ фіксованих станах у t-вимірному фазовому просторі, де n — число базисних векторів ІКВ-простору. Це дозволяє зменшити в $(n-1)$ разів число кодових сигналів керування, водночас забезпечивши надійність, завадостійкість та роздільну здатність системи керування. Моделі оптимальних векторних сигналів в просторових системах координат доцільно використати для вдосконалення методів швидкого опрацювання великих масивів даних з t наборами атрибутів, впроваджуючи векторні технології в базисі t-вимірної системи відліку цих атрибутів. Поняття t-вимірного ІКВ-простору, породженого обертовою симетрією, відкривають можливості для дослідження, синтезу та практичного застосування цього класу моделей в радіозв'язку, векторних інформаційних технологіях та багатовимірних системах керування. Проглядається глибинний зв'язок явища «вкладених» векторних ІКВ-просторів різної розмірності з геометричним законом розподілу натуральних рядів чисел в симетричних полях обертової симетрії. Запропонована методологія оптимальних багатовимірних систем керування дозволяє зменшити інформаційну та структурну надмірності систем та поліпшити їхні технічні характеристики. Палітра різновидів векторних ІКВ-просторів стрімко зростає зі збільшенням порядку S обертової симетрії, в якій закладена інформація про неосяжну гармонію та первозданну досконалість геометричної розбудови Всесвіту.

Висновки

Моделі оптимальних багатовимірних сигналів зручно інтерпретувати у вигляді впорядкованого набору n базисних t-вимірних векторів ІКВ-просторової системи координат, утвореної на множині кільцевих (модулярних) сум цих векторів, яка перелічує усі вузлові точки координатної сітки t-вимірної системи відліку ІКВ-простору фіксованим числом R різних способів. Критерієм оптимальності постає мінімізація числа n базисних векторів для покриття множиною кільцевих t-вимірних вектор-сум усіх вузлових точок координатної сітки t-вимірного ІКВ-простору заданих розмірів фіксованим числом способів. Керування t-вимірною системою здійснюється двійковим монолітно-груповим t-вимірним ІКВ-кодом, стан якої визначається функціями t змінних в просторовому полі на множині $n(n-1)$ її фіксованих станів у t-вимірному фазовому просторі. Чисельна багатоманітність просторових структур базисів t-вимірних ІКВ дає змогу здійснювати оптимізацію, обираючи ліпші з них за потрібними ознаками, наприклад, методом відсікання або скороченням довжини коду, добором відповідних значень вагових розрядів тощо. Це дозволяє розробляти моделі оптимальних багатовимірних кодових сигналів та оптимальних багатовимірних систем керування у фазовому просторі великої розмірності встановлених розмірів. Моделі дозволяють вирішувати в прямій та оберненій остановці завдання проблему подолання інформаційної надмірності багатовимірних систем керування, систем зв'язку, опрацювання векторних масивів даних, завадостійких систем кодування та перетворення форми інформації залежно від конкретно поставленої оптимізаційної задачі.

References

[1] Weisstein E. W. *Block Design*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource

[2] Weisstein E. W. *Perfect Difference Set*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

[3] Weisstein E. W. *Plane*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

[4] Weisstein E. W. *Hadamard Matrix*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

[5] Orthogonal Latin squares. *Encyclopedia of Mathematics*.

[6] Rowland T. and Weisstein E. W. *Galois Extension Field*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

[7] Weisstein E. W. *Cyclic Group*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

[8] Riznyk V. V. (2016) Models of optimum discrete signals on the ring combinatorial configurations. *Visn. NTUU KPI, Ser. Radioteh. radioaparatobuduv.*, no. 64, pp. 10-22. (in Ukrainian)

[9] Riznyk V. (2016) Multi-modular Optimum Coding Systems Based on Remarkable Geometric Properties of Space, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, pp. 129-148. DOI: 10.1007/978-3-319-45991-2_9

[10] Weisstein E. W. *Configuration*. From MathWorld–A Wolfram Web Resource.

Модели оптимальных многомерных сигналов в пространственных системах координат

Ризнык В. В.

Рассматриваются модели оптимальных многомерных дискретных сигналов для усовершенствования методов обработки векторных данных, определяемых функциями двух и более переменных, зависящих от пространственных координат. Исследована связь рассмотренных моделей с классическими комбинаторными конфигурациями, теорией циклических групп и вращательной симметрией. Описанные модели превосходят классические аналоги по количеству и разнообразию тонкой структуры, что дает возможность расширить сферу их практического использования в многомерных системах управления, системах связи, векторных информационных технологиях.

Ключевые слова: векторное ИКВ-пространство; вращательная симметрия; базисный вектор; развертка поверхности тора; оптимальный векторный код; векторные данные; размерность пространства; многомерная система управления; векторные информационные технологии

Models of optimum multidimensional signals in the solid systems

Riznyk V. V.

Models of optimum multidimensional discrete signals using novel design based on the “perfect” vector combinatorial configurations, namely the concept of Ideal Ring Bundles (IRB)s for development of new directions in fundamental and applied research in vector information technologies presented. IRB means an n-stage cyclic sequence of semi-measured terms, e.g. integers for which the set of all circular sums enumerates row of natural numbers by fixed times. Development of vector multidimensional models and techniques, based on the remarkable geometric properties of rotational symmetry-asymmetry relationships allows configure optimum multidimensional control systems for reproduce the maximum number of combinatorial varieties in the systems with a limited number of basis vectors. The modular vector sums of connected basis vectors of an IRB-space enumerate the set of t-coordinates specified with respect to t-dimensional cyclic frame reference exactly R-times. The remarkable technical merits of IRB–space, which properties hold for the same set of the IRB-monolithic vector code in varieties permutations of its terms is demonstrated, and method for design of two- or multidimensional vector signals coded based on the optimum binary monolithic code is presented. Proposed vector models of optimum multidimensional discrete signals provide, essentially, a new approach to generalize them to great class of optimized problems in radio-telecommunications, navigation and vector information technology. Moreover, the optimization embedded in the underlying combinatorial models. The favourable qualities of the Optimum Multidimensional Ring code provides breakthrough opportunities to apply them to numerous branches of science and advanced technology, with direct applications to vector data telecommunications, vector encoded design, and optimal vector information technology.

Key words: vector IRB-space; rotating symmetry; basis vector; development of torus surface; optimum vector code; vector data; dimensionality; multidimensional control system; vector information technology