Дельта-моделі реактивних радіоелементів та фільтрів нижніх частот

Нелін Є. А., Шульга А. В., Зінгер Я. Л.

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

E-mail: a.liashok@kpi.ua

Запропоновано моделі реактивних радіоелементів, названі б-моделями, які на відміну від традиційних не мають частотних обмежень. Виконано порівняння характеристик традиційних моделей реактивних радіоелементів та б-моделей. Представлено б-моделі фільтрів нижніх частот. Виходячи з б-моделі показана можливість підвищення вибірності фільтрів.

Ключові слова: реактивний радіоелемент; дельта-модель; фільтр нижніх частот

Вступ

У теорії систем розрізняють два загальних класи систем: 1) системи на основі елементів із зосередженими параметрами; 2) системи на основі елементів із розподіленими параметрами [1]. Відповідно до прийнятої термінології самі елементи і системи називають зосередженими та розподіленими. Моделі зосереджених і розподілених систем використовують при моделюванні різноманітних за своєю природою систем: електричних, електромагнітних, механічних, біологічних, комунікаційних, соціальних і т. д. Останнім часом значного розвитку набули мікро- і наноелектромеханічні системи [2].

Функціонування зосередженого елемента повністю визначається його зовнішніми характеристиками в термінах вхідних-вихідних співвідношень [3]. Сукупність пов'язаних зосереджених елементів утворює зосереджену систему. Лінії, що зв'язують елементи, вказують лише на топологічні співвідношення. Фізичні розміри та місця розташування елементів не враховуються. Математично така система описується системою звичайних диференціальних рівнянь, а динамічний режим її функціонування — за допомогою єдиної незалежної змінної — часу.

При необхідності врахування особливостей внутрішнього функціонування елемента він розглядається як розподілений. Відповідно, аналізується розподілена система або вирішується польова задача. У розподіленій системі просторовий розмір елемента стає складовою системи і новою незалежною змінною. Розподілена система описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Значний розвиток зосереджені і розподілені системи мають в радіотехніці як кола з зосередженими та розподіленими параметрами. Крім моделей зосереджених реактивних радіоелементів (далі елементів) використовуються також моделі квазізосереджених реактивних елементів на основі відрізків лінії передачі [4]. Як перші, так і другі моделі наближені та обмежені по частоті, оскільки довжина елемента повинна бути значно меншою довжини хвилі. В теоретичному і прикладному плані значний інтерес становить можливість точного моделювання реактивних елементів без обмежень по частоті.

Ціль статті полягає у розробці моделей реактивних елементів, названих δ -моделями, без частотних обмежень, у застосуванні цих моделей для фільтрів нижніх частот, у порівнянні комп'ютерним моделюванням частотних характеристик запропонованих та традиційних моделей.

1 Традиційні моделі реактивних елементів

Моделі зосереджених реактивних елементів використовуються в колі з зосередженими параметрами. У такому колі індуктивність та ємність зосереджені на окремій ділянці завдовжки l. У колі з розподіленими параметрами (довгій лінії (ДЛ)) за певних умов реактивний елемент може вважатися квазізосередженим на окремому відрізку ДЛ. На рис. 1 наведено ланки, еквівалентні відрізку ДЛ. Елементи Π - і T-подібної ланок визначаються виразами [4]:

$$X_{\Pi} = iZ \sin \varphi,$$

$$B_{\Pi} = iZ^{-1} \tan \varphi/2,$$

$$X_{T} = iZ \tan \varphi/2,$$

$$B_{T} = iZ^{-1} \sin \varphi,$$

(1)

де індекси «П»- і «Т»- відповідають «П»- і «Т»подібній ланкам; і = $\sqrt{-1}$; Z - хвильовий імпеданс відрізка; $\varphi = kl, l$ - довжина відрізка; $k = 2\pi/\lambda, \lambda$ довжина хвилі.



Рис. 1. П- і Т-подібні ланки, еквівалентні відрізку ДЛ.

Оскільки для традиційних моделей зосереджених і квазізосереджених реактивних елементів виконується умова

$$l \ll \lambda, \tag{2}$$

ці моделі наближені і їх застосування обмежене верхньою граничною частотою.

У разі виконання умови (2) вирази (1) приймуть вигляд

$$X_{\Pi} \approx i Z \varphi,$$

$$B_{\Pi} \approx i Z^{-1} \varphi/2,$$

$$X_{T} \approx i Z \varphi/2,$$

$$B_{T} \approx i Z^{-1} \varphi.$$

(3)

У випадках $Z \ll Z_0$ і $Z \gg Z_0$, де Z_0 хвильовий імпеданс ДЛ, в Π і T-подібній ланках не враховуються ємності та індуктивності відповідно. У результаті залишається лише послідовна індуктивність і паралельна ємність, які згідно з (3) визначаються виразами

$$L \approx \frac{Zl}{\nu}, \quad C \approx \frac{l}{Z\nu},$$
 (4)

де ν — фазова швидкість хвилі.

2 Дельта-моделі реактивних елементів

Розглянемо еквівалентну схему нескінченно короткого відрізка ДЛ завдовжки dl (рис. 2a) [5].

Тут dL, dC, dr i dg — зосереджені нескінченно малі елементи: індуктивність, ємність, опір і провідність відповідно. Опір і провідність враховують втрати. Для індуктивності і ємності маємо

$$dL = L'dl, \quad dC = C'dl, \tag{5}$$

де L', C' — погонні індуктивність та ємність.

Хвильовий імпеданс та фазова швидкість хвилі в ДЛ без втрат дорівнюють [5]

$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{1}{L'C'}}.$$
 (6)

Виходячи з (6) отримаємо



Рис. 2. Еквівалентна схема нескінченно короткого відрізка ДЛ (а), імпедансні бар'єр та яма скінченних розмірів (б), б-бар'єр та б-яма (в).

У результаті підстановки (7) в (5) маємо

$$dL = \frac{Zdl}{\nu}, \quad dC = \frac{dl}{Z\nu}.$$
(8)

На рис. 2б показано імпедансні неоднорідності скінченних розмірів завширшки, які, враховуючи характер імпедансної залежності, назвемо імпедансними бар'єром та ямою. Малими буквами «z» позначено нормовані до Z_0 імпеданси, індекси «в» та «н» відповідають високому та низькому (відносно 1) імпедансам. Нормування виконано для спрощення подальших перетворень.

Спрямуємо $l \to dl$, $z_{\rm B} \to \infty$ і $z_{\rm H} \to 0$, причому $z_{\rm B} dl = \alpha_L$, а $z_{\rm H}^{-1} dl = \alpha_C$, де $\alpha_{L,C}$ — константи. Ці умови відповідають властивостям δ -функції. Бар'єр та яма скінченних розмірів приймуть вид δ -бар'єра та δ -ями (рис. 2в). У цьому випадку в правих і лівих частинах співвідношень (8) величини скінченні і ці співвідношення приймуть вигляд:

$$L = \frac{\alpha_L Z_0}{\nu}, \quad C = \frac{\alpha_C}{Z_0 \nu}.$$
 (9)

Як бачимо з (9), δ -бар'єр еквівалентний послідовній індуктивності, а δ -яма — паралельній ємності; тут і далі індекси «L» та «C» відповідають індуктивності та ємності. Назвемо ці моделі реактивних елементів δ -моделями. Дельта-модель зосереджена в точці, тому на відміну від традиційних моделей реактивних елементів δ -моделі точні без обмежень по частоті.

Константа α визначає «міру реактивності» реактивного елемента. У графічному зображенні δмоделі реактивного елемента довжина δ-функції прямо пропорційна значенню константи α , а, отже, і величині індуктивності або ємності. На відміну від звичайних графічних позначень реактивних елементів δ -моделі дозволяють відобразити співвідношення між значеннями реактивностей схеми.

Дельта-моделі реактивних елементів доповнюють модель імпедансних δ -неоднорідностей [6] та дозволяють скористатися зручними модельними властивостями δ -функції.

Для реактивних елементів скінченних розмірів константи $\alpha_{L,C}$ дорівнюють $\alpha_L = z_B l$, і $\alpha_C = z_H^{-1} l$; у формулах (9) знак зміниться з «=» на знак « \approx » і вони співпадуть з виразами (4).

Виходячи з (9) нормовані вхідні імпеданс і адмітанс δ -моделей індуктивності та ємності визначаються виразами

$$\mathbf{z}_{\delta} = 1 + \mathrm{i}\eta_L, \quad \mathbf{g}_{\delta} = 1 + \mathrm{i}\eta_C, \tag{10}$$

де $\eta_{L,C} = \alpha_{L,C}k$.

Коефіцієнт відбиття від реактивних елементів в рамках δ -моделей дорівнює

$$r = \frac{1 - \mathbf{z}_{\delta}}{1 + \mathbf{z}_{\delta}}.\tag{11}$$

Підставивши в (11) вирази (10), отримаємо

$$r_L = \frac{-i\eta_L}{2 + i\eta_L},$$

$$r_C = \frac{i\eta_C}{2 + i\eta_C}.$$
(12)

Як видно з (12), при $\alpha_L = \alpha_C$ та однаковому значенні δ -бар'єр і δ -яма мають однакову ефективність, яка визначається модулем коефіцієнта відбиття.

Коефіцієнт проходження реактивних елементів дорівнює $t = \sqrt{1 - |r|^2}$. Виходячи з (12) для δ -моделі отримаємо

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\eta/2\right)^2}},$$

де $\eta = \eta_{L,C}$.

Для моделювання розподіленого характеру реактивних властивостей зосередженого реактивного елемента скінченних розмірів представимо його коротким відрізком ДЛ, замінивши в схемі рис. 2а нескінченно малу величину dl скінченною малою величиною l. Цією ж моделлю будемо моделювати і квазізосереджений реактивний елемент.

З формули для вхідного імпедансу відрізка ДЛ можна показати, що реактивна складова вхідних імпедансу і адмітансу відрізка (для індуктивності і ємності відповідно) дорівнює

$$im = \frac{\pm (\mathbf{z} - \mathbf{z}^{-1}) \tan \varphi}{1 + \mathbf{z}^{\mp 2} \tan^2 \varphi}$$

де верхні знаки з «±» і «∓» відносяться до індуктивності, нижні — до ємності, а коефіцієнт проходження відрізка ДЛ визначається формулою





Рис. 3. Залежності реактивних складових вхідних імпеданса та адмітанса (а) та коефіцієнта проходження (б) реактивних елементів згідно δ -моделі (im_{δ} та t_{δ} , суцільні лінії) і моделі відрізка ДЛ (штрихові лінії) та відносної похибки моделі відрізка ДЛ (з урахуванням знака відхилення) для реактивної складової і коефіцієнта проходження (δ_{im} , δ_t штрихпунктирні лінії). $\hat{l} = l/\lambda$, 1 - z = 2,5 або 0, 4, 2 - z = 5 або 0.2.

Залежності на рис. З ілюструють взаємну відповідність реактивних складових вхідних імпеданса та адмітанса і коефіцієнта проходження реактивних елементів згідно δ -моделі і моделі відрізка ДЛ. Параметри δ -моделі та моделі відрізка ДЛ зв'язані співвідношеннями $\alpha = z^{\pm 1}l$ і $\eta = z^{\pm 1}\varphi$, де знак «+» з «±» відповідає z > 1, а знак «-» — z < 1. Як бачимо, зі збільшенням частоти похибки δ_{im} і δ_t , як правило, зростають. При $\hat{l} = 0, 1$ і значеннях z, що дорівнюють 2,5 і 5, значення δ_{im} і δ_t становлять 10 і 7 % і 33 і 12 % відповідно.

На рис. 4 представлено залежності l(z). При заданому значенні δ_t зі збільшенням z гранична частота зростає за умовою (2).



Рис. 4. Залежності нормованої довжини реактивного елемента скінченних розмірів при $\delta_t = 10, 20$ і 30% (1, 2 і 3 відповідно) $0 \le \varphi \le \pi/2$.

Вертикальна лінія І відповідає нижньому і верхньому граничним значенням хвильових імпедансів традиційних мікросмужкових квазізосереджених реактивних елементів, а лінії II і III—нижньому і верхньому граничним значеннням еквівалентних хвильових імпедансів мікросмужкових квазізосереджених реактивних елементів на основі тривимірних неоднорідностей [7, 8]. Традиційні елементи секції мікросмужкової лінії з широким і вузьким мікросмужковим провідником ($Z_0 = 50$ Ом, граничні значення імпедансів 20 і 125 Ом). Тривимірні неоднорідності – отвори: глухий металізований в основі та наскрізний з нависним вузьким провідником (граничні значення імпедансів 4 і 400 Ом). Як бачимо, для традиційних елементів $\delta_t > 20, \%$. При $\delta_t = 30, \%$ граничним значенням імпедансів цих елементів відповідає лише $\hat{l} = 0,04$. Тривимірні елементи мають помітно меншу похибку і більш високу граничну частоту, оскільки вони ближчі до δ -моделей.

3 Дельта-моделі фільтрів нижніх частот

Розглянемо використання δ -моделей реактивних елементів для моделювання фільтрів нижніх частот. На рис. 5 приведено схеми багатоланкового фільтрапрототипу нижніх частот [4]. Величина g_i , i = 1...nявляє собою індуктивність послідовної котушки індуктивності або ємність паралельного конденсатора, n — число реактивних елементів. Якщо g₁ ємність або індуктивність, то g_0 відповідає опору або провідності джерела сигналу. Аналогічно, якщо g_n — ємність або індуктивність, то g_{n+1} відповідає опору або провідності навантаження. Величини де $F = f/f_c$.

елементів нормовано так, що $g_0 = 1$ і кутова гранична частота смуги пропускання фільтра-прототипу $\Omega_c = 1.$





Значення індуктивностей і ємностей фільтра зв'язані зі значеннями g_i формулами [4]:

$$L_i = \gamma_0 \frac{\Omega_c}{\omega_c} \mathbf{g}_i, C_i = \gamma_0^{-1} \frac{\Omega_c}{\omega_c} \mathbf{g}_i, \tag{13}$$

де $\gamma_0 = Z_0/g_0$, якщо $g_0 -$ опір, $\gamma_0 = Z_0 g_0$, якщо g_0 провідність, Z_0 — опір джерела сигналу (у даному випадку хвильовий імпеданс ДЛ); $\omega_c = 2\pi f_c, f_c$ гранична частота смуги пропускання фільтра.

З урахуванням (9), з (13) отримаємо

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{g}_i}{k_c},\tag{14}$$

де k_c — хвильове число на частоті f_c . Таким чином, δ -моделі реактивних елементів безпосередньо зв'язані з моделлю фільтра-прототипу.

На рис. 6 зображено δ-моделі фільтрів для схеми рис. 56 при n = 3 і n = 5. Відстані між δ -моделями реактивних елементів показано умовно. Значення g_i для цих випадків наведено в табл. 1 [4].



Рис. 6. Дельта-моделі фільтрів з характеристиками Баттерворта (а) та Чебишова (б). z₁ i z₂ — вхідні імпеданси на лівій межі б-моделей реактивних елементів фільтра.

Оскільки $\eta_i = \alpha_i k$, то виходячи з (14) маємо

$$\eta_i = g_i F, \tag{15}$$

Табл. 1

Тип характеристики	n	g1	g_2	g ₃	g4	g_5
Баттерворта	3	1,0000	2,0000	1,0000		
	5	0,6180	1,6180	2,0000	1,6180	0,6180
Чебишова, рівень пульсацій 0,1 дБ	3	1,0316	1,1474	1,0316		
	5	1,1468	1,3712	1,9750	1,3712	1,1468

Знайдемо вираз для коефіцієнта проходження δ моделі фільтра при n = 3 у загальному випадку. Виходячи з (10), для вхідних імпедансів z_1 і z_2 (рис. 6a) отримаємо

$$z_1^{-1} = \frac{1}{1 + i\eta_L} + i\eta_C,$$

$$z_2 = z_1 + i\eta_L.$$
(16)

Зі співвідношень

$$R = \frac{1 - z_2}{1 + z_2},$$

$$T = \sqrt{1 - |R|^2}$$

де *R* і *T* — коефіцієнти відбиття і проходження, виходячи з (16) у результаті перетворень маємо

$$T = \frac{2}{\sqrt{4 + (2\eta_L - \eta_C)^2 + \eta_L^2 \eta_C [\eta_C (2 + \eta_L^2) - 4\eta_L]}}.$$
(17)



Рис. 7. АЧХ фільтра Чебишова (1, 2) та його δ моделі (3). 1 — $z_{\rm H} = 0, 4, 2 - z_{\rm H} = 0, 2$. Параметри δ -моделі: $\alpha_C = z_{\rm H}^{-1}l, \, \alpha_L = p\alpha_C, \, p = g_1/g_2$. Для елементів скінченних розмірів відношення однакове.

У разі характеристики Баттерворта виходячи з (14) і табл. 1 маємо $\alpha_C = 2\alpha_L$. При цьому $\eta_C = 2\eta_L$ і з виразу (17) отримаємо

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_{\rm L}^6}}.$$
 (18)

Згідно (15), для характеристики Баттерворта $\eta_L = F$. Як і очікувалося, вираз (18) відповідає характеристиці Баттерворта при n = 3. На рис. 7 наведено амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) фільтра Чебишова та його δ -моделі (відповідно до виразу (17)) для схеми рис. 76. З урахуванням впливу ємностей в «П»-подібній ланці та індуктивностей в «Т» — подібній, які не враховуються в моделях квазізосереджених елементів, імпеданси реактивних елементів скориговано: індуктивних зменшено на 6,7 %, а ємнісного збільшено на 13,6 %. У смузі пропускання АЧХ збігаються (див. врізку на рис. 7).

Дельта-моделі реактивних елементів «підказують» рішення, що дозволяють підвищити вибірність фільтра: реактивні елементи мають бути ближчі до їх δ -моделей. Як випливає з залежностей рис. 4, для цього необхідно зменшити значення $z_{\rm H}$. Такій умові відповідає АЧХ 2 на рис. 7. У цьому випадку корекція імпедансів така: імпеданс індуктивних елементів зменшено на 8, 6 %, а ємнісного збільшено на 2, 9 %. В АЧХ 2 у порівнянні з АЧХ 1 частота мінімуму у смузі подавлення збільшується з 3, 44 до 6, 85, а значення мінімуму зменшується з –15, 6 дБ до –34, 1 дБ. При цьому розміри фільтра менші в два рази.



Рис. 8. Залежності похибки АЧХ δ -моделі. $1 - z_{\text{H}} = 0, 4; 2 - z_{\text{H}} = 0, 2.$

Рис. 8 ілюструє похибку АЧХ δ -моделі відносно АЧХ фільтра. Як бачимо, діапазон застосування δ моделі при $z_{\rm H} = 0, 2$ істотно ширший у порівнянні з випадком $z_{\rm H} = 0, 4$. Значенню $\delta_{\rm H} = 20\%$ при $z_{\rm H} = 0, 4$ і $z_{\rm H} = 0, 2$ відповідають частоти 1, 23 і 5, 27.

Висновки

Запропоновані б-моделі реактивних елементів на відміну від традиційних моделей не мають частотних обмежень. У графічному зображенні δ -моделі реактивного елемента суміщені позначення характеру реактивності і її чисельне значення. Дельтамоделі «підказують» рішення, що дозволяють підвищити вибірність фільтрів нижніх частот.

Перелік посилань

- 1. Doebelin E. O. System dynamics: modeling, analysis, simulation, design / E. O. Doebelin. N. Y. : CRC Press. 1998. 759 p.
- Leondes C. T., ed. Mems/Nems: handbook techniques and applications, Vol. 1 / C. T. Leondes, ed. - N. Y.: Springer. - 2006. - 387 p.
- Vemuri V. Modeling of complex systems: an introduction / V. Vemuri. - N. Y.: Academic Press, Inc. - N. Y.: Springer. - 1978. - 447 p.
- Hong J.-S. Microstrip Filters for RF/Microwave Applications / J.-S. Hong. - N. Y. : Wiley. - 2011. - 656 p.
- 5. Зернов Н. В. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. Л. : Энергия. 1972. 816 с.
- Нелін Є. А. Водолазская М. В. Модель импедансных дельта-неоднородностей для микро- и наноструктур / М. В. Водолазская, Е. А. Нелин // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2014. — Т. 57, № 5. — С. 25-34.
- Назарько А. И. Двухфазный электромагнитный кристалл / А. И. Назарько, Е. А. Нелин, В. И. Попсуй, Ю. Ф. Тимофеева // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37, № 4. С. 81-86.
- Нелин Е. А. Высокоэффективные электромагнитнокристаллические неоднородности / Е. А. Нелин, А. И. Назарько // ЖТФ. — 2013. — Т. 83, № 4. — С. 146-148.

References

- Doebelin E. O. (1998) System dynamics: modeling, analysis, simulation, design, CRC Press, 759 p.
- [2] Leondes C. T., ed. (2006) Mems/Nems: handbook techniques and applications, Vol. 1, Springer, 387 p. DOI: 10.1007/b136111
- [3] Vemuri V. (1978) Modeling of complex systems: an introduction, Academic Press Inc., 447 p. DOI: 10.1016/B978-0-12-716550-9.50010-8
- [4] Hong J.-S. (2011) Microstrip Filters for RF/Microwave Applications, Wiley, 656 p. DOI: 10.1002/9780470937297.scard
- Zernov N. V. and Karpov V. G. (1972) Teoriya radiotekhnicheskikh tsepei [The Theory of Radio Engineering Chains], Leningrad, Energy, 816 p.
- [6] Vodolazka M. V. and Nelin E. A. (2014) Model of impedance delta-inhomogeneities for micro- and nanostructures. *Radioelectronics and Communications Systems*, Vol. 57, No. 5, pp. 208-216. DOI: 10.3103/s0735272714050033

- [7] Nazarko, A. I., Nelin, E. A., Popsui V. I. and Timofeeva Yu. F. (2011) Two phase electromagnetic crystal. *Techni*cal Physics Letters, Vol. 37, No. 2, pp. 185–187. DOI: 10.1134/s1063785011020283
- [8] Nelin E. A. and Nazarko A. I. (2013) Effective electromagnetocrystalline inhomogeneities. *Techni*cal Physics, Vol. 58, No. 4, pp. 612–614. DOI: 10.1134/s1063784213040166

Дельта-модели реактивных радиоэлементов и фильтров нижних частот

Нелин Е. А., Шульга А. В., Зингер Я. Л.

Предложены модели реактивных радиоэлементов, названные δ -моделями, в отличие от традиционных не имеющие частотных ограничений. Проанализировано взаимное соответствие характеристик традиционных и δ -моделей. Представлены δ -модели фильтров нижних частот. Исходя из δ -модели показана возможность повышения избирательности фильтров нижних частот.

Ключевые слова: реактивный радиоэлемент; дельтамодель; фильтр нижних частот

The delta-models of reactive elements and low-pass filters

Nelin, E. A., Shulha, A. V., Zinher, Ya. L.

Frequency limitations of lumped and distributed reactive elements traditional models are considered. Based on equivalent ciruit of infinitely short transmission line section inductance and capacitance models with properties correspond to delta-function are received. These models called delta-models are without frequency restrictions. In the delta-model graphic designation delta-function length is directly proportional to inductance or capacitance value. Unlike to ordinary graphic designations delta-models allow to represent scheme reactivities values ratios. Traditional models and delta-models reactive elements frequency characteristics are compared. It is found that because of frequency limitations traditional planar microstrip quasilumped reactive elements characteristics have substantial errors. Considerable reduction of errors is ensured by microstrip quasi-lumped reactive elements on the basis of three-dimensional inhomogeneities. Based on reactive elements delta-models Butterworth and Chebyshev low-pass filters delta-models are presented. Low-pass filter delta-model "prompt" possibility of filter selectivity increasing. Frequency characteristics of Chebyshev low-pass filter designed on traditional planar microstrip quasi-lumped reactive elements and three-dimensional inhomogeneities are given.

 $Key \ words:$ reactive element; delta-model; low-pass filter