

**ПРИСТРОЇ ТА СИСТЕМИ РАДІОЗВ'ЯЗКУ,
РАДІОЛОКАЦІЇ, РАДІОНАВІГАЦІЇ**

УДК 621.396.96

**УСТРАНЕНИЕ РАСХОДИМОСТИ РАСШИРЕННОГО
КАЛМАНОВСКОГО ФИЛЬТРА ДЛЯ СОПРОВОЖДЕНИЯ ЦЕЛИ
ПО ДАННЫМ ИМПУЛЬСНО-ДОПЛЕРОВСКОЙ РЛС**

Неуймин А.С., аспирант; Жук С.Я., д.т.н., профессор.

*Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина*

Для повышения эффективности обнаружения целей, замаскированных мешающими отражениями от поверхности земли, широкое применение находят импульсно-доплеровские РЛС (ИД РЛС), в которых кроме пространственных координат цели (дальность r , азимут β , угол места ε), также измеряется и радиальная скорость \dot{r} . При решении задач вторичной обработки радиолокационной информации, как правило, требуется определять параметры движения цели в декартовой системе координат (СК). Кроме того, линейная модель движения цели в сферической СК неприменима при сопровождении цели на малых дальностях.

Для оценивания координат цели по данным ИД РЛС в декартовой системе координат используется расширенный фильтр Калмана, который часто является расходящимся [1], что обусловлено нелинейным характером уравнения измерения ИД РЛС. В статье предполагается простой способ устранения расходимости расширенного фильтра Калмана для сопровождения цели по данным ИД РЛС на основе «загрубления» канала измерения радиальной скорости.

Постановка задачи

Модель движение цели в декартовой СК описывается уравнением [1,2]

$$u_k = F_{k,k-1}u_{k-1} + G_k\omega_k, \quad (1)$$

где $u_k = (x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k, z_k, \dot{z}_k)^T$ - вектор, включающий координаты положения и скорости цели по соответствующим осям декартовой СК;

$$F_{k,k-1} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad G_k = \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T^2/2 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T^2/2 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix};$$

T - темп поступления данных; ω_k - шум возбуждения с корреляционной

матрицею $Q_k = \text{diag}(\sigma_{ax}^2, \sigma_{ay}^2, \sigma_{az}^2)$.

В моделі (1) изменение параметров движения цели по каждой оси декартовой СК описывается дискретной динамической системой второго порядка, вектор состояния которой содержит координаты положения и скорости изменения положения.

Уравнение наблюдения ИД РЛС имеет вид [1]

$$Z_k^u = f_k(u_k) + v_k,$$

где $Z_k^u = (r_k^u, \beta_k^u, \varepsilon_k^u, \dot{r}_k^u)^T$ - вектор наблюдения, включающий измеренные координаты цели в полярной системе координат и радиальной скорости; $v_k = (\tilde{r}_k, \tilde{\beta}_k, \tilde{\varepsilon}_k, \tilde{\dot{r}}_k)^T$ - вектор некоррелированных гауссовских ошибок измерения положения и радиальной скорости цели в полярной СК с нулевым математическими ожиданиями и дисперсиями составляющих σ_r^2 , σ_β^2 , σ_ε^2 , $\sigma_{\dot{r}}^2$ соответственно; $f_k(u_k)$ - нелинейная функция, значением которой является вектор $(r_k, \beta_k, \varepsilon_k, \dot{r}_k)^T$. Координаты цели в сферической и декартовой СК связаны следующими выражениями

$$r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}; \beta_k = \arctg\left(\frac{y_k}{x_k}\right);$$

$$\varepsilon_k = \arctg\left(\frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}\right); \dot{r}_k = \frac{x_k \dot{x}_k + y_k \dot{y}_k + z_k \dot{z}_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}}.$$

Теоретическое обоснование

Следуя методике, приведенной в работе [2], линеаризованное по пространственным координатам уравнение измерения ИД РЛС можно представить в виде

$$u_k^u = h_k(u_k) + \mathcal{G}_k, \tag{2}$$

где $u_k^u = (x_k^u, y_k^u, z_k^u, \dot{r}_k^u)^T$ - вектор наблюдения, включающий измеренные координаты положения цели в декартовой системе координат и радиальную скорость; $h_k(u_k)$ - нелинейная векторная функция, значением которой является вектор истинных координат положения в декартовой СК и радиальной скорости цели $(x_k, y_k, z_k, \dot{r}_k)^T$; $\mathcal{G}_k = (\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k, \tilde{\dot{r}}_k)^T$ - вектор ошибок измерения положения в декартовой СК и радиальной скорости цели с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей

$$R_k = \begin{bmatrix} \sigma_{x,k}^2 & \sigma_{xy,k}^2 & \sigma_{xz,k}^2 & 0 \\ \sigma_{xy,k}^2 & \sigma_{y,k}^2 & \sigma_{yz,k}^2 & 0 \\ \sigma_{xz,k}^2 & \sigma_{yz,k}^2 & \sigma_{z,k}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{r},k}^2 \end{bmatrix}.$$

Элементы R_k определяются по формулам [2]

$$\sigma_{x,k}^2 = \sigma_r^2 \cos^2 \beta_k \cos^2 \varepsilon_k + r_k^2 \sigma_\beta^2 \sin^2 \beta_k \cos^2 \varepsilon_k + r_k^2 \sigma_\varepsilon^2 \cos^2 \beta_k \sin^2 \varepsilon_k; \quad (3)$$

$$\sigma_{y,k}^2 = \sigma_r^2 \sin^2 \beta_k \cos^2 \varepsilon_k + r_k^2 \sigma_\beta^2 \cos^2 \beta_k \cos^2 \varepsilon_k + r_k^2 \sigma_\varepsilon^2 \sin^2 \beta_k \sin^2 \varepsilon_k; \quad (4)$$

$$\sigma_{z,k}^2 = \sigma_r^2 \sin^2 \varepsilon_k + r_k^2 \sigma_\varepsilon^2 \cos^2 \varepsilon_k; \quad (5)$$

$$\sigma_{xy,k}^2 = 0.5 \sin 2\beta_k (\sigma_r^2 \cos^2 \varepsilon_k - r_k^2 \sigma_\beta^2 \cos^2 \varepsilon_k + r_k^2 \sigma_\varepsilon^2 \sin^2 \varepsilon_k); \quad (6)$$

$$\sigma_{xz,k}^2 = 0.5 \cos \beta_k \sin 2\varepsilon_k (\sigma_r^2 - r_k^2 \sigma_\varepsilon^2); \quad (7)$$

$$\sigma_{yz,k}^2 = 0.5 \sin \beta_k \sin 2\varepsilon_k (\sigma_r^2 - r_k^2 \sigma_\varepsilon^2). \quad (8)$$

Выполнив линеаризацию уравнения измерения радиальной скорости в (2), а также с учетом модели движения цели (1), можно показать [3], что квазиоптимальный алгоритм оценивания параметров движения цели в декартовой СК описывается расширенным фильтром Калмана

$$u_k^* = F_{k,k-1} u_{k-1}; \quad (9)$$

$$P_k^* = F_{k,k-1} P_{k-1} F_{k,k-1}^T + G_k Q_k G_k^T; \quad (10)$$

$$K_k = P_k^* H_k^T (H_k P_k^* H_k^T + R_k)^{-1}; \quad (11)$$

$$P_k = P_k^* - K_k H_k P_k^*; \quad (12)$$

$$u_k = u_k^* + K_k (u_k^u - h_k(u_k^*)); \quad (13)$$

где u_k^* , u_k - векторы прогноза и оценки параметров движения цели в момент времени k ; P_k^* , P_k - корреляционные матрицы ошибок прогноза и оценки соответственно; $K(k)$ - коэффициент усиления фильтра Калмана; H_k - линеаризованная матрица наблюдения, которая имеет вид

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\dot{x}_k^* r_k^* - \dot{r}_k^* x_k^*}{r_k^{*2}} & \frac{x_k^*}{r_k^*} & \frac{\dot{y}_k^* r_k^* - \dot{r}_k^* y_k^*}{r_k^{*2}} & \frac{y_k^*}{r_k^*} & \frac{\dot{z}_k^* r_k^* - \dot{r}_k^* z_k^*}{r_k^{*2}} & \frac{z_k^*}{r_k^*} \end{bmatrix}.$$

Начальный вектор оценки и корреляционная матрица ошибок оценки, полученные на основе двух первых радиолокационных измерений в моменты времени $k = -1$ и $k = 0$, имеют вид

$$u_0 = (x_0^u, \frac{x_0^u - x_{-1}^u}{T}, y_0^u, \frac{y_0^u - y_{-1}^u}{T}, z_0^u, \frac{z_0^u - z_{-1}^u}{T})^T;$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{x,0}^2 & \frac{\sigma_{x,0}^2}{T} & \sigma_{xy,0}^2 & \frac{\sigma_{xy,0}^2}{T} & \sigma_{xz,0}^2 & \frac{\sigma_{xz,0}^2}{T} \\ \frac{\sigma_{x,0}^2}{T} & \frac{\sigma_{x,0}^2 + \sigma_{x,-1}^2}{T^2} + \sigma_{ax}^2 T^2 & \frac{\sigma_{xy,0}^2}{T} & \frac{\sigma_{xy,0}^2 + \sigma_{xy,-1}^2}{T} & \frac{\sigma_{xz,0}^2}{T} & \frac{\sigma_{xz,0}^2 + \sigma_{xz,-1}^2}{T} \\ \sigma_{xy,0}^2 & \frac{\sigma_{xy,0}^2}{T} & \sigma_{y,0}^2 & \frac{\sigma_{y,0}^2}{T} & \sigma_{yz,0}^2 & \frac{\sigma_{yz,0}^2}{T} \\ \frac{\sigma_{xy,0}^2}{T} & \frac{\sigma_{xy,0}^2 + \sigma_{xy,-1}^2}{T} & \frac{\sigma_{y,0}^2}{T} & \frac{\sigma_{y,0}^2 + \sigma_{y,-1}^2}{T^2} + \sigma_{ay}^2 T^2 & \frac{\sigma_{yz,0}^2}{T} & \frac{\sigma_{yz,0}^2 + \sigma_{yz,-1}^2}{T} \\ \sigma_{xz,0}^2 & \frac{\sigma_{xz,0}^2}{T} & \sigma_{yz,0}^2 & \frac{\sigma_{yz,0}^2}{T} & \sigma_{z,0}^2 & \frac{\sigma_{z,0}^2}{T} \\ \frac{\sigma_{xz,0}^2}{T} & \frac{\sigma_{xz,0}^2 + \sigma_{xz,-1}^2}{T} & \frac{\sigma_{yz,0}^2}{T} & \frac{\sigma_{yz,0}^2 + \sigma_{yz,-1}^2}{T} & \frac{\sigma_{z,0}^2}{T} & \frac{\sigma_{z,0}^2 + \sigma_{z,-1}^2}{T^2} + \sigma_{az}^2 T^2 \end{bmatrix}.$$

Анализ полученного алгоритма фильтрации (9)-(13) выполнен с помощью статистического моделирования. На рис. 2 (кривые 1) непрерывной линией показана зависимость СКО ошибки оценки положения цели $p_x^{1/2}$ по оси X от дискретного времени k , рассчитанная фильтром Калмана, а штриховой линией - СКО фактической ошибки оценки положения σ_x , полученная методом Монте-Карло. СКО фактической ошибки σ_x превышает СКО $p_x^{1/2}$ в 5-10 раз на начальном этапе работы фильтра, что свидетельствует о его расходимости. На рис.3 приведены аналогичные зависимости СКО ошибки оценки скорости цели $p_{Vx}^{1/2}$ и σ_{Vx} (кривые 1). Эффект расходимости фильтра обусловлен наличием неучтенных ошибок, появляющихся в результате линеаризации уравнения измерения радиальной скорости.

Для устранения расходимости калмановских фильтров широко используются эвристические методы [4], которые заключаются в увеличении значений корреляционных матриц шумов возмущения траектории или ошибок оценки, что приводит к некоторому «загрублению» фильтров, однако позволяет устранить их расходимость.

В работе предлагается для устранения расходимости расширенного фильтра Калмана (9)-(13) увеличивать дисперсию ошибки измерений радиальной скорости на величину, пропорциональную дисперсии ошибки экстраполяции радиальной скорости $p_{\dot{r},k}^*$

$$R'_{4,4,k} = R_{4,4,k} + \gamma p_{\dot{r},k}^*,$$

где γ - коэффициент, регулирующий величину вносимой дополнительно составляющей дисперсии ошибки измерения; $p_{\dot{r},k}^*$ - вычисляется по формуле

$$p_{\dot{r},k}^* = \sum_{j=1}^6 \left(\sum_{i=1}^6 H_{4,i} P_{i,j}^* \right) H_{j,4}^T.$$

Для определения значения параметра γ используется методика [4], в которой проверяется гипотеза о гауссовском законе распределения вектора ошибок оценки $\Delta u_k = u_k - \hat{u}_k$. С использованием метода Монте-Карло для каждого момента времени k по множеству траекторий $i = \overline{1, M}$ рассчитывается усредненный нормированный квадрат ошибок оценки траекторных параметров $\bar{\delta}_k^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (u_{k,i} - \hat{u}_{k,i})^T P_{k,i}^{-1} (u_{k,i} - \hat{u}_{k,i})$,

Если вычисленная фильтром корреляционная матрица P_k соответствует действительной корреляционной матрице ошибок оценки траекторных параметров, то эта статистика подчиняется χ^2 -распределению с b степенями свободы (b – размерность вектора траекторных параметров). Тогда величина $M \bar{\delta}_k^2$ будет иметь χ^2 -распределение с $l = Mb$ степенями свободы. Гипотеза об отсутствии расходимости калмановского фильтра принимается, если эта статистика попадает в заданный доверительный интервал $M \bar{\delta}_k^2 \in [c_1, c_2]$ на исследуемом временном интервале. Границы двухстороннего доверительного интервала определяются для допустимой вероятности ошибки α квантилями соответствующего χ^2 -распределения $c_1 = \chi_l^2(\alpha/2)$, $c_2 = \chi_l^2(1 - \alpha/2)$.

Результаты моделирования

Для определения параметра γ допустимая вероятность ошибки полагалась $\alpha = 0.003$, $M = 100$, размерность вектора траекторных параметров $b=6$, число периодов обзора полагалось равным 100. При изменении параметра γ от 0 до 1 с шагом 0.1, вычислялся усредненный нормированный квадрат ошибки оценки траекторных параметров $M \bar{\delta}_k^2$ на каждом временном шаге k . Границы доверительного интервала $c_1 = 502, c_2 = 708$. На рис. 1 сплошной линией показаны зависимости статистики $M \bar{\delta}_k^2$, а штриховыми линиями границы доверительного интервала c_1, c_2 для разных значений γ . При $\gamma = 0$ статистика $M \bar{\delta}_k^2$ приблизительно в 500 раз превышает значения границ доверительного интервала на начальном этапе работы фильтра. При $\gamma \geq 0.8$ статистика $M \bar{\delta}_k^2$ находится внутри доверительного интервала.

С учетом определенного значения параметра $\gamma = 0.8$ был проведен анализ точностных характеристик расширенного фильтра Калмана (9)-(13). Начальные параметры движения цели в декартовой системе координат $u = (100 \text{ км}, -250 \text{ м/с}, 100 \text{ км}, -250 \text{ м/с}, 8 \text{ км}, 0 \text{ м/с})$. СКО интенсивностей маневра по осям прямоугольной системы координат полагались $\sigma_{ax} = 1 \text{ м/с}^2$,

$\sigma_{ay}=1$ м/с², $\sigma_{az}=0$ м/с². Ошибки измерения $\sigma_r=300$ м, $\sigma_\varepsilon=1$ град., $\sigma_\beta=1$ град., $\sigma_{\dot{r}}=10$ м/с, а темп поступления информации $T=1$ с. Число периодов обзора полагалось равным 300. Испытания проводились по ста реализациям.

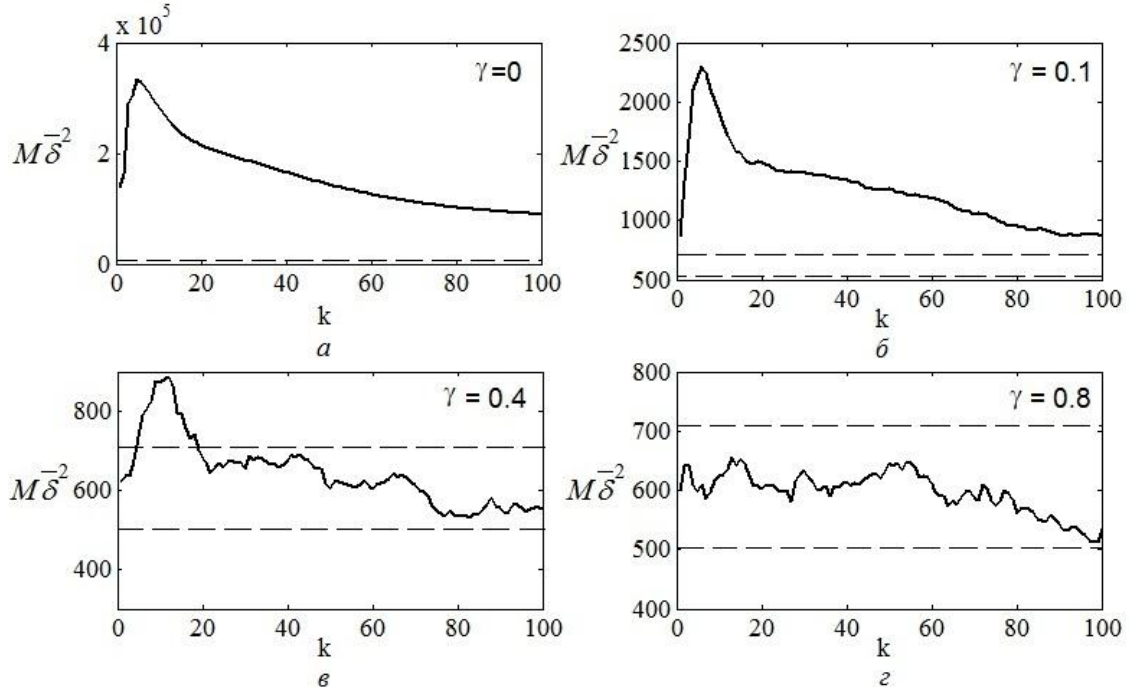


Рис.1.

На рис. 2 непрерывной линией показана зависимость СКО ошибки оценки положения цели $p_x^{1/2}$ по оси X, рассчитанной фильтром, а штриховой линией - СКО фактической ошибки оценки положения σ_x , полученной методом Монте-Карло при $\gamma = 0.8$ (кривые 2).

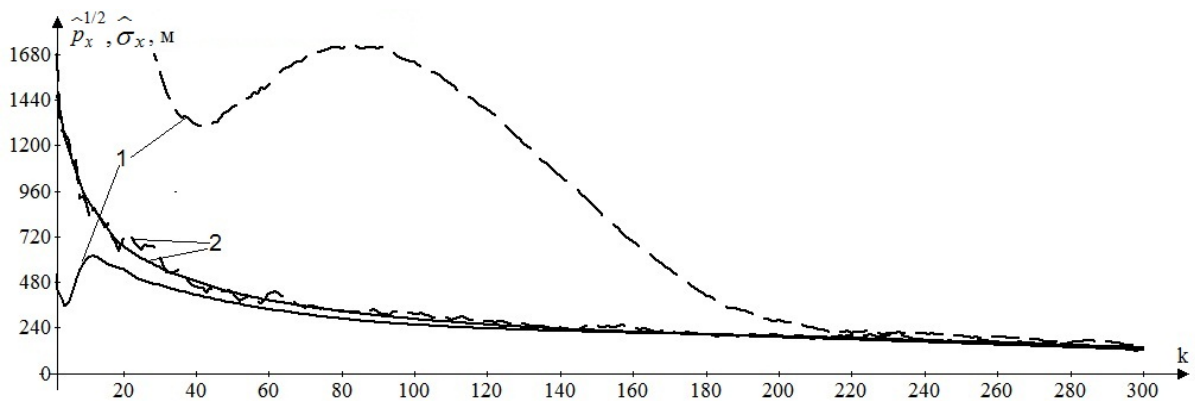


Рис.2.

На рис. 3 приведены аналогичные зависимости СКО ошибки оценки скорости цели $p_{Vx}^{1/2}$ и σ_{Vx} (кривые 2).

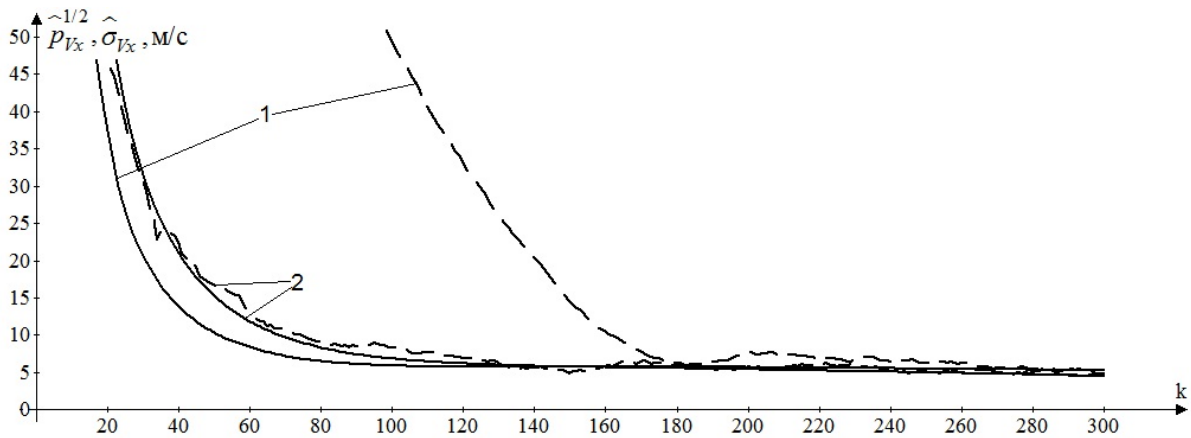


Рис.3.

Как следует из полученных результатов, рассчитанные фильтром СКО ошибок оценки хорошо согласуются с их фактическими значениями. Таким образом, предложенный способ позволяет устранить расходимость расширенного фильтра Калмана для сопровождения цели по данным ИД РЛС. При этом на начальном участке работы фильтра, СКО фактической ошибки оценки положения цели уменьшаются в 3-5 раз, а оценки скорости цели - на порядок, по сравнению с аналогичными характеристиками расширенного фильтра Калмана.

Выводы

Расширенный фильтра Калмана для сопровождения цели по данным ИД РЛС является расходящимся, что обусловлено наличием неучтенных ошибок, появляющихся в результате линеаризации уравнения измерения радиальной скорости. Для рассмотренного примера, достаточная статистика $M\bar{\delta}_k^2$, позволяющая определить гауссовский характер ошибок оценки, приблизительно в 500 раз превышает значения границ доверительного интервала на начальном этапе работы фильтра.

Для устранения расходимости расширенного фильтра Калмана предложен простой способ устранения расходимости, заключающийся в увеличении дисперсии ошибки измерений радиальной скорости на величину, пропорциональную дисперсии ошибки экстраполяции радиальной скорости. Значение коэффициента пропорциональности γ определяется с помощью статистического моделирования путем проверки гипотезы о гауссовском законе распределения ошибок оценок вектора параметров движения цели.

Для рассмотренного примера наименьшее значение, при котором ошибки оценки являются гауссовскими на всем интервале наблюдения, равно $\gamma=0.8$. На начальном участке работы фильтра, СКО фактической ошибки оценки положения цели уменьшается в 3-5 раз, а оценки скорости цели - на порядок, по сравнению с аналогичными характеристиками рас-

ширеного фільтра Калмана.

Література

1. Duan Z. Sequential Nonlinear Tracking Filter with Range-rate Measurements in Spherical Coordinates / Zhansheng Duan, Chongzhao Han, X. Rong Li // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems.— 2007.— Vol. 43.— no.1.— pp. 239-250.

2. Жук С.Я. Адаптивна фільтрація параметрів руху маневруючого об'єкта в прямокутній системі координат / С.Я. Жук, В.И. Кожешкурт, В.В. Юзефович // Реєстрація, зберігання і обробка даних.— 2009.— Т.11.— №2.— С.12— 24.

3. Сейдж Э. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / Э. Сейдж, Дж. Мелс / Пер. с англ. / Под ред. проф. Б. Р. Левина. — М.: Связь, 1976.— 496 с.

4. Информационные технологии в радиотехнических системах : учеб. пособие для вузов / [Васин В.А., Власов И.Б., Егоров Ю.М. и др.]; под ред. И.Б. Федоров.— М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.— 671 с. — ISBN 5-7038-2263-7

Неуймин А.С., Жук С.Я. Устранение расходимости расширенного калмановского фильтра для сопровождения цели по данным импульсно-доплеровской РЛС. Расширенный фильтр Калмана для сопровождения цели по данным импульсно-доплеровской РЛС часто является расходящимся, что обусловлено наличием неучтенных ошибок, появляющихся в результате линеаризации уравнения измерения радиальной скорости. Предложен простой способ устранения расходимости расширенного фильтра Калмана, заключающийся в увеличении дисперсии ошибки измерений радиальной скорости на величину, пропорциональную дисперсии ошибки её экстраполяции. Значение коэффициента пропорциональности определяется с помощью статистического моделирования путем проверки статистической гипотезы о гауссовском законе распределения ошибок оценки вектора параметров движения цели. Анализ способа выполнен на примере сопровождения цели по данным импульсно-доплеровской РЛС в декартовой системе координат с помощью статистического моделирования.

Ключевые слова: сопровождение цели, импульсно-доплеровская РЛС, расширенный фильтр Калмана, расходимость.

Неуймин А.С., Жук С.Я. Усунення розбіжності розширеного калманівського фільтру для супроводу цілі за даними імпульсно-доплеровської РЛС. Розширений фільтр Калмана для супроводження цілі за даними імпульсно-доплеровської РЛС часто розходиться, що обумовлює наявність неврахованих помилок, які з'являються в результаті линеаризації рівняння вимірювання радіальної швидкості. Запропоновано простий спосіб усунення цього явища, який полягає в збільшенні дисперсії помилки вимірювань радіальної швидкості на величину, пропорційну дисперсії помилки її екстраполяції. Значення коефіцієнту пропорційності визначається за допомогою статистичного моделювання шляхом перевірки статистичної гіпотези про гауссовський закон розподілення помилок оцінки вектора параметрів руху цілі. Аналіз способу виконано на прикладі супроводження цілі за даними імпульсно-доплеровської РЛС в декартовій системі координат за допомогою статистичного моделювання.

Ключові слова: супроводження цілі, імпульсно-доплеровська РЛС, розширений фільтр Калмана, розходимість.

Neuimin O.S., Zhuk S.Ya. Divergence elimination of the extended Kalman filter for target tracking due to Pulse-Doppler radar measurements. Extended Kalman filter for target tracking due to Pulse-Doppler radar measurements is often divergent, which is caused by the

presence of unaccounted errors which appear in the result of the equation of the range rate measurement linearization. In the article a simple way of the extended Kalman filter divergence elimination is suggested and consists in the variance of value measurement error increase by an amount proportional to the value extrapolation error variance. The coefficient of proportionality is determined by means of statistical modeling by testing the statistical hypothesis of Gaussian distribution of the errors of estimation of the target's parameters vector. The suggested method analysis is carried out as an example of target tracking due to Pulse-Doppler radar measurements in the Cartesian coordinates using the statistical modeling.

Keywords: *target tracking, Pulse-Doppler radar, extended Kalman filter, divergence.*