Visnyk NTUU KPI Seriia – Radiotekhnika Radioaparatobuduvannia, 2019, Iss. 77, pp. 5–12

УДК 621.396:519.15

Методи опрацювання багатовимірних сигналів у тороїдних системах координат

Різник В. В.

Національний університет "Львівська політехніка"

E-mail: *rvv@polynet.lviv.ua*

Розглядаються методи опрацювання багатовимірних сигналів у просторовому полі координатної системи тора, яка побудована на множині комбінаційних сум базових векторів комбінаторної конфігурації "зіркового" типу, і на основі використання її унікальних властивостей запропоновано два теоретично обґрунтовані підходи до формування тороїдних систем координат для оптимального кодування і перетворення векторних сигналів: монолітно-групових та ненадлишкових кодів. На конкретних прикладах окреслено переваги кожного методу кодування багатовимірних сигналів з наведенням відповідних теорем, розрахунків та ілюстративного матеріалу. Розширення класу "зіркових" комбінаторних конфігурацій відкриває нові можливості застосування методів оптимізованого кодування й опрацювання багатовимірних сигналів у тороїдних системах координат, розроблення оптимізованих векторних інформаційних технологій, вдосконалення радіотехнічних пристроїв і систем зв'язку.

Ключові слова: оптимальна тороїдна система координат; багатовимірний сигнал; оптимальний векторний монолітно-груповий код; ненадлишковий багатовимірний код; багатовимірний самокоректувальний код; "зіркова" багатовимірна конфігурація; потужність методу кодування; оптимальні векторні інформаційні технології

DOI: 10.20535/RADAP.2019.77.5-12

Вступ

Стрімкий розвиток інформаційних технологій та глобальна комп'ютеризація суспільства вимагає розроблення концептуально нових підходів до швидкісного опрацювання великих масивів даних та надійного їх пересилання каналами зв'язку, використовуючи векторні дискретні сигнали. Такі сигнали здебільшого є багатовимірними функціями просторових незалежних змінних, а керування цими функціями здійснюється в просторовій системі координат. Під координатами багатовимірного сигналу розуміють будь-які аргументи, на числових осях яких фіксується динаміка його зміни, що дає змогу керувати одночасно двома й більшим числом взаємопов'язаних параметрів фізичного процесу, поведінка кожної керованої координати якого визначається не лише керуючим діянням, а й усією сукупністю цих діянь у вигляді векторів керування та збурювань [1]. При цьому необхідно враховувати взаємозалежність та взаємопов'язаність регульованих параметрів таких систем, складність керування якими зростає зі збільшенням кількості параметрів за квадратичною залежністю.Тому опрацювання багатовимірних сигналів в просторових системах координат набуває важливого значення в радіотехнічних системах, інформаційних технологіях, обчислювальних мережах, системах зв'язку, та інших галузях науки і техніки.

1 Огляд методів опрацювання багатовимірних сигналів

Сучасні методи цифрового опрацювання сигналів базуються здебільшого на використанні алгоритмів швидкого перетворення Фур'є, класів представлення багатовимірних поліномів і двовимірних FIR-фільтрів перетворення частоти [2]. Опрацювання сигналів за цими методами спирається на маніпуляції, такі як вибірка, перетворення Фур'є на векторній основі й перетворення для стовпчиків і рядків Фур'є, фільтрація тощо. Обчислювальна складність вищезгаданих методів зростає із числом вимірювань. У статтях [3] і [4] запропоновані алгоритми декомпозиції та реконструювання багатовимірних сигналів на основі використання полігармонічних вейвлет-сплайнів, дискретизації та згортки. Робота [5] присвячена дослідженню мінливості та просторової еволюції клімату на основі багатовимірного просторово-часового аналізу з розкладанням часових рядів у кожній точці координатної сітки і наступним об'єднанням часової та просторової еволюцій мінливості клімату в природно розділених часових масштабах. У статті [6] досліджуються функції подання для багатовимірних лінійних форм, а в [7] розглядаються деякі ключові математичні обмеження, які полегшують дослідження стосовно багатовимірної вибірки і обробки сигналів, нелінійну багатовимірну фільтрацію та підходи до нелінійного багатовимірного моделювання. У статті [8] обговорюються алгоритми опрацювання багатовимірних сигналів, які підлягають квантизації на регулярних періодичних решітках спеціального типу з відповідним фільтруванням, обчисленням дискретного перетворення Фур'є, проріджуванням та інтерполяцією. Проектування двовимірних лінійно-фазових цифрових фільтрів зі скінченною імпульсною характеристикою із одновимірних обговорюється у статті [9]. В роботі [10] розглянуто приклади використання кардинальних полігармонічних сплайнів для багатовимірного аналізу і показано, що вони можуть бути застосовані у методі сумування для відновлення великого класу функцій експоненціального типу на множині вибірок цілочислових решіток. У статті [11] розглядається метод сумування сплайнів для відновлення багатовимірних зонних обмежень функцій із дискретних решітчастих вибірок, який передбачає використання полігармонічних сплайнів. Там же викладається теорія таких сплайнів і розробляється метод реконструкції, область застосування яких може рости до нескінченності. В [12] зроблено спробу поширити сингулярний розклад матриці на багатовимірні масиви. Спочатку тривимірний масив перетворюється у двовимірний, після чого досягається розклад тривимірного масиву на три виміри. Новий підхід до класифікації багатовимірних часових рядів (MTS) з двовимірною вибіркою запропоновано у [13], за яким для виділення ознак обчислюються власні вектори коваріаційних матриць рядка-рядка і стовпця-стовпця, після чого використовується класифікатор «один найближчий сусід».

Підсумовуючи огляд, можна бачити, що методи опрацювання багатовимірних сигналів ґрунтуються здебільшого на застосуванні алгоритмів швидкого перетворення Фур'є, двовимірних FIR-фільтрів перетворення частоти, класів раціонального представлення багатовимірних поліномів, використанні полігармонічних сплайнів, сингулярного розкладу в багатовимірних масивах, вейвлет-перетворень, та уживанні швидкодійних цифрових ЕОМ, що окреслює загальну тенденцію, яка зараз складається у науковому світі стосовно опрацювання багатовимірних сигналів.

Інший підхід базується на використанні класичної теорії комбінаторних конфігурацій [14], таких як блок-схеми [15], різницеві множини [16, 17], проективні площини [18] та інші. Метод, який передбачає використання розширених полів Ґалуа [19], полягає у перетворенні множини усіх класів лишків за модулем довільного полінома $f(x)$ степені s незвідного над $GF(p)$. Для побудови множини таких лишків в полі $GF(p^s)$ необхідно знайти деякий незвідний над цим полем поліном, визначити його первісний елемент x з максимально можливим періодом та обчислити степені $x_0, x_1, \dots, x_z$, $(z = q^{s-2})$, які повинні перелічувати усі значення ненульових елементів $GF(p^s)$. За теоремою Зінґера [17] гіперплощини геометрії $PG(s, q)$, де q– степінь простого числа p, які розглядаються як блоки, і точки як елементи, утворюють циклічну блок-схему, а точки у будь-якій гіперплощині визначають (υ, k, λ) — різницеву множину у вигляді лишків її елементів за модулем υ. Багатовимірне опрацювання сигналів [20] зручно здійснювати у тороїдних системах координат. Теоретичні дослідження у цій області знань вимагають ознайомлення із математичними моделями оптимального розподілу елементів у багатовимірному просторі заданих розмірів і розмірності. Пошуки загального підходу до синтезу двота багатовимірних оптимальних комбінаторних систем та опрацювання методів їх використання у системотехніці здійснено у роботах [21–23].

У монографії [21] на основі загального теоретичного підходу (теорії в'язанок) розглядаються методи оптимального синтезу, перетворення, переліку й умови існування багатовимірних в'язанок із ланцюжковою і кільцевою структурами. Встановлено теоретичний зв'язок між обертовою симетрією S-го порядку та закодованою нею асиметрією у вигляді розбиття симетричного простору на n неоднакових частин, кратних натуральному ряду [23]. Метод ґрунтується на використанні оптимальної вагової системи n–позиційного двійкового коду з t-вимірними ваговими розрядами. Комбінації утворюються послідовним додаванням базисних векторів з урахуванням відповідних модулів $m_1, m_2, \dots, m_t$, а множина цих комбінацій набуває вигляду t–вимірної координатної сітки, яка покриває поверхню $(t + 1)$–вимірного тору з розмірами $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_t$. Тороїдна модель [23] постала внаслідок опрацювання t–вимірних векторних кодових послідовностей у вигляді багатовимірних ідеальних кільцевих в'язанок (ІКВ) [21]. До кластеру ІКВ належать кільцеві n–послідовності цілочислових t–кортежів, множина значень яких, разом із множиною значень усіх кільцевих (модулярних) вектор-сум, утворених на цих t–кортежах, покриває множину вузлових точок тороїдної координатної сітки [23].

Векторні ІКВ знаходять також застосування для проектування оптимізованих антенних систем з поліпшеними якісними показниками за роздільною здатністю та іншими параметрами [21]. Вдалим кроком у цьому напрямі є патент США [24] на спосіб розміщення елементів лінійної антени у вузлах рівномірної сітки, послідовність номерів яких утворює циклічну різницеву множину [17]. Аналогічний результат можна отримати й на основі ІКВ, що випливає із однозначної відповідності між циклічною блок-схемою та ІКВ [21]. Методи побудови моделей багатовимірних систем на ІКВ з прикладами їх застосування для синтезу антенних решіток з низьким рівнем бічного випромінювання, оптимізованих векторних кодів, кібер-фізичних систем та ряду інших пристроїв описані в [21–23]. Там же розглядаються методи побудови систем кодування багатовимірних даних для їх зручного представлення та опрацювання у просторовому полі тороїдної системи координат. На сьогоднішній день фізики-теоретики в усьому світі досліджують питання багатовимірного простору-часу як природного середовища законів фізики [25]. Поруч з теоретичними дослідженнями, існує безліч суто практичних застосувань теорії багатовимірних комбінаторних конфігурацій у різних галузях науки і техніки, у тому числі й для ефективного опрацювання багатовимірних сигналів.

2 Постановка задачі

Логічним продовженням питання дослідження багатовимірних просторів є постановка задачі про підвищення ефективності методів опрацювання багатовимірних сигналів. Задача полягає у скороченні кількості базових векторів для формування багатовимірних сигналів по числу фіксованих ознак у вигляді комбінацій цих векторів, множина яких перелічує множину вузлових точок тороїдної системи координат з відповідним числом осей та кількістю точок відліку. Математичне завдання в прямій і оберненій постановках зводиться до встановлення взаємно однозначного відображення множини потрібної кількості лінійних комбінацій t-вимірних векторів, утворених на мінімізованому наборі базисних векторів, на координатній сітці t-вимірної поверхні тора.

3 Метод вирішення завдання

Метод ґрунтується на використанні теорії багатовимірних ідеальних кільцевих в'язанок (ІКВ) [21] для оптимізації опрацювання багатовимірних дискретних сигналів. При цьому множині кільцевих сум, утворених на t-вимірних векторах ІКВ, ставиться у відповідність множина дискретних станів t незалежних змінних багатовимірного сигналу у просторовому полі тороїдної системи координат [23]. Суть методу полягає у покритті координатною сіткою поверхні тора визначених розмірів і розмірності множиною кільцевих вектор-сум за допомогою мінімальної кількості базових векторів. Вирішення цього завдання пов'язується з розширенням можливостей оптимального опрацювання багатовимірних сигналів у просторовому полі тороїдної системи координат.

4 Модель опрацювання сигналів у тороїдній системі координат

Розглянемо математичну модель опрацювання сигналів у t-вимірній тороїдній системі координат, яка має вигляд кільцевої n-послідовності t-кортежів $((k_{11}, k_{12}, \ldots, k_{1t}), (k_{21}, k_{22},\ldots, k_{2t}), \ldots, (k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{it}),\ldots, (k_{n1}, k_{n2},\ldots, k_{nt}))$, де $k_{i1} \equiv k_i \pmod{m_1}$, $k_{i2} \equiv k_i \pmod{m_2}$, …, $k_{it} \equiv k_i \pmod{m_t}$.

Тороїдна система координат описується параметрами n, R, S, m_1, m_2, …, m_t, де n-число базисних t-вимірних векторів, R-кількість різних способів утворення однакових кільцевих вектор-сум на базисних векторах, S — порядок обертової симетрії координатної сітки тора [23], $m_1, m_2, \ldots, m_t$ — значення модулів, які визначають розміри тороїдної системи координат.

На рис. 1 зображена графічна схема моделі t-вимірного сигналу у вигляді кільцевої n-послідовності t-кортежів $((k_{11}, k_{12}, \ldots, k_{1t}), (k_{21}, k_{22},\ldots, k_{2t}), \ldots, (k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{it}), \ldots, (k_{n1}, k_{n2}, \ldots, k_{nt}))$, на якій зручно демонструвати метод опрацювання багатовимірних дискретних сигналів у тороїдній системі координат.

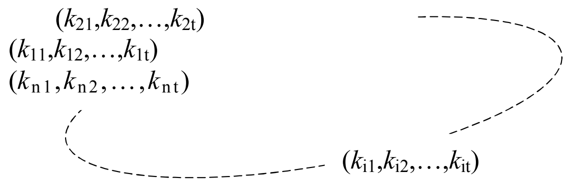

Рис. 1. Графічна схема моделі t-вимірного сигналу у вигляді кільцевої n-послідовності t-кортежів $((k_{11}, k_{12}, \ldots, k_{1t}), (k_{21}, k_{22},\ldots, k_{2t}), \ldots, (k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{it}), \ldots, (k_{n1}, k_{n2}, \ldots, k_{nt}))$ для опрацювання у тороїдній системі координат

Модель передбачає покриття множиною кільцевих сум, утворених n базисними t-кортежами, множини вузлових координат t-вимірної тороїдної решітки $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_t = n(n-1)/R$, або $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_t = n(n-1)/R+1$ [21]. Множина сум утворюється додаванням відповідних t–кортежів за комплексним модулем $(m_1, m_2, \ldots, m_t)$, причому координати кожної вузлової точки можна отримати рівно R різними способами послідовного додавання базисних векторів. Параметри моделі взаємопов'язані такою системою формул:

$$n(n-1) \le S \le n(n-1)2, \qquad (1)$$

де $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_t = n(n-1)/R$, або $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_t = n(n-1)/R+1$.

В основу методу закладено принцип комбінаторної оптимізації векторної вагової системи двійкового n-позиційного коду, розрядам якого присвоєно значення цілочислових t–кортежів. Ваги обрані так, щоб множиною усіх векторних сум, утворених комбінаційним додаванням цих вагових розрядів, можна було покрити множину вузлових координат t–вимірної решітки тора.

Наприклад, на кільцевій n-послідовності із чотирьох (n=4) 2-кортежів (t=2) із ваговими розрядами ((0,1), (1,0), (0,2), (2,2)) можна утворити $n(n-1) = 12$ кільцевих вектор-сум за комплексним модулем (3,4):

(1,1)≡((0,1)+(1,0)),	(0,0)≡((1,0)+(0,2)+(2,2)),
(1,2)≡((1,0)+(0,2),	(0,3)≡((2,2)+(0,1)+(1,0)),
(2,0)≡((0,2)+(2,2)),	(1,3)≡((0,1)+(1,0)+(0,2)),
(2,3)≡((2,2)+(0,1));	(2,1)≡((0,2)+(2,2)+(0,1)).

У цьому прикладі множина утворених кільцевих вектор-сум, разом з множиною вагових розрядів ((0,1), (1,0), (0,2), (2,2)) рівночасно є множиною координат вузлових точок двовимірної (t=2) решітки $m_1 \times m_2 = 3 \times 4$, яка покриває поверхню тора з можливістю переліку цих координат рівно по одному ($R = 1$) разу. Із (1) випливає, що для оптимізованого опрацювання багатовимірних сигналів у фазовому просторі координатної системи тора немає теоретичних обмежень щодо вимірності (кількості атрибутів), як і стосовно збільшення потужності методу кодування. Описаний метод дає змогу розв'язувати задачі багатовимірної комбінаторної оптимізації для розроблення пристроїв перетворення форми інформації та проектування сучасних пристроїв та радіоелектронних систем різного призначення [21–23].

5 Властивості векторних монолітно-групових кодів

Оптимальний векторний монолітно-груповий код — це n-розрядний двійковий код, який базується на теорії багатовимірних ідеальних кільцевих в'язанок (ІКВ) [21]. Він передбачає формування комбінацій двійкового коду з t–вимірними векторними ваговими розрядами, множина усіх можливих комбінаційних сум яких взаємно однозначно відповідає множині координат вузлових точок t–вимірної тороїдної сітки. Можна визначити два основні методи оптимального кодування у просторовому полі тороїдної системи координат. Перший метод ґрунтується на кодуванні t–вимірних сигналів у кільцевому монолітно-груповому коді [21], де будь-яка дозволена кодова комбінація складається не більше ніж із двох блоків однойменних символів. Це дає змогу миттєво виявляти помилкові комбінації за вищезгаданою ознакою групового розподілу однойменних символів, а код набуває самокоректувальних властивостей. Другий метод передбачає ненадлишкове кодування. Монолітно-груповий ІКВ-код охоплює великий клас оптимальних t–вимірних кодів з векторними ваговими розрядами [21] у вигляді t–вимірних циклічних груп та групових ансамблів. До них належить код "GlorytoUkraineStar" [23], який дає змогу покривати комбінаційними сумами векторних значень цих розрядів t–вимірну поверхню тора різноманітними способами відліку векторів за координатною сіткою відповідних розмірів під час взаємного переставляння вагових векторів.

Теорема 1. Будь-яке просте число p породжує рівно $(p-1)/2$ векторних "зіркових" ансамблів у вигляді правильних p-кутників з центральною симетрією p-го порядку.

Доведення. Напишемо на p-послідовності $1, 2, \ldots, p$ натуральних чисел $(p-1)$ впорядкованих послідовностей числових сум із двох (i=2), трьох (i=3), ... і т. д. впорядкованих за кільцевою схемою числових рядів, де p– просте число, $i = 1, 2, \ldots, p-1$:
1) 1, 2, ..., p;
2) 1+2, 2+3, ..., 2p -1, p+1;
3) 1+2+3, 1+2+3+4, ..., 2p, p+3; і т.д. ...
p-2) 1+2+...+p-2, 2+3+...+p-1,..., p+1+2+...+ p-3;
p-1) 1+2+...+p-1, 2+3+...+p,..., p+1+2+...+ p-2.

Пари вписаних у рядки таблиці впорядкованих числових рядів, які симетрично рівновіддалені від її горизонтальної середньої лінії, складаються із однаково впорядкованих у протилежних напрямах чисел, а множина числових пар, розташованих у кожному j-му стовпчику, де $j \in \{1, 2, \ldots, p \equiv 0 \pmod p\}$ на рівновіддалених від середнього стовпчика таблиці відстанях, утворюють разом з множиною їхніх числових значень відповідно прив'язані до них числові пари симетрично рівновіддалених рядів. Із вищезгаданих властивостей таблиці випливає, що записані в неї числа утворюють двовимірну центрально-симетричну систему інцидентності у вигляді p-кутної симетричної зірки, а множина числових значень впорядкованих пар (i, j) з фіксованим і є значеннями вузлових координат, множина яких покриває поверхню тора координатною сіткою з розмірами $p \times (p-1)$. Теорему 1 доведено.

На рис. 2 наведено вісім варіантів здвоєних ансамблів t–вимірних зіркових конфігурацій сьомого ($n = 7$) порядку у вигляді зв'язних графів.

Кожній із семи (n=7) вершин a,b,...,g відповідає один із t–кортежів, а кожна пара ребер, якими вершини сполучені між собою, визначає місце обміну t–кортежів під час реконструкції "зірки" від однієї кільцевої послідовності до іншої зі збереженням її унікальних властивостей. Обхід вершин по колу графа відповідає одній із "зірок" здвоєного ансамблю, а по ребрах — другій. У верхньому ряду (рис. 2) розміщені зіркові ансамблі із центральною симетрією, а у нижніх — з осьовою. Для прикладу розглянемо кодування двовимірного сигналу за графом (рис. 2, перший в другому ряду).

Нехай семи (n=7) вершинам $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f}, \mathrm{g})$ цього графа відповідають 2-кортежі послідовності ((4,4), (1,2), (4,1), (4,5), (4,2), (4,3), (4,0)), де a=(4,4),

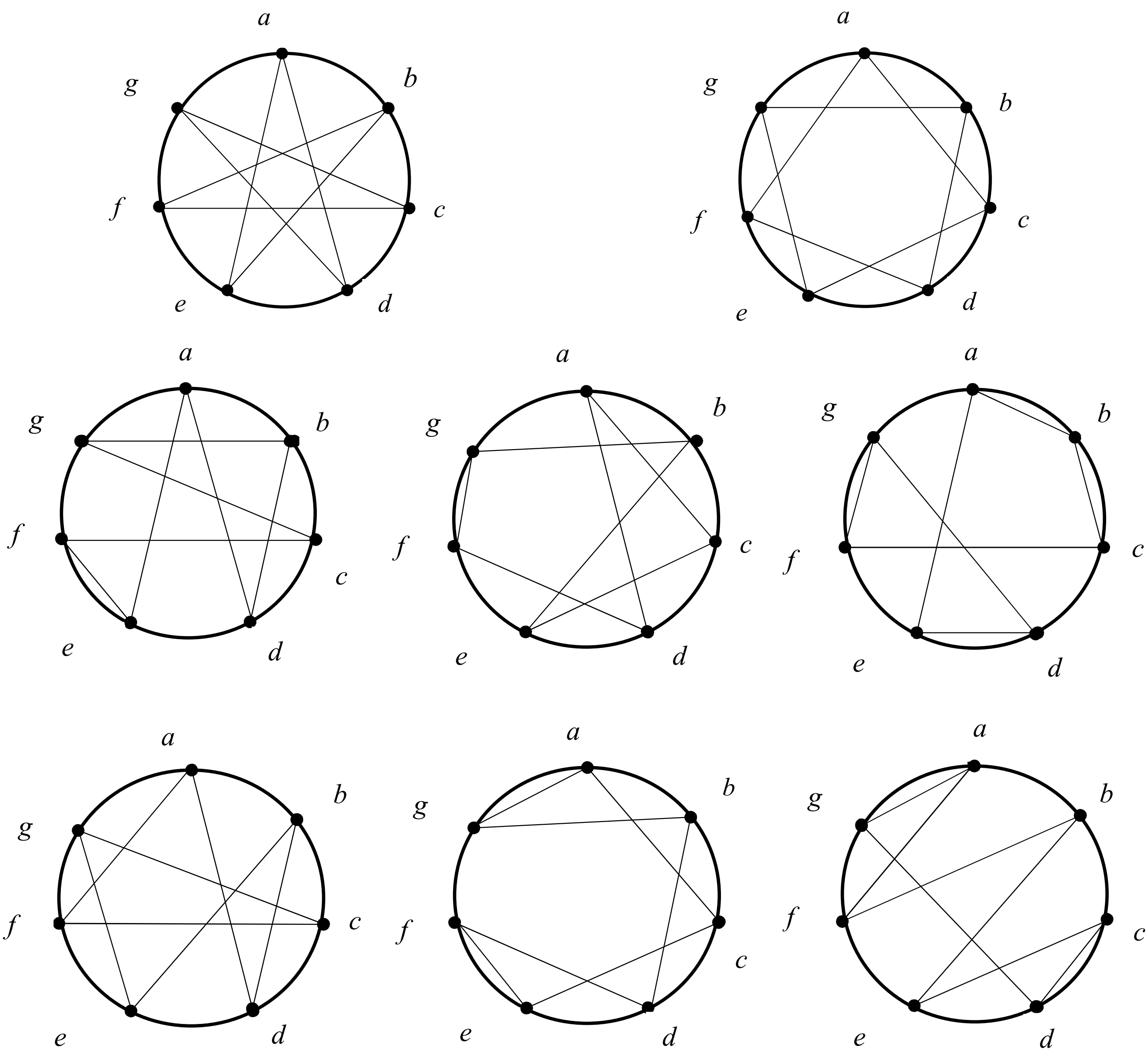

Рис. 2. Графічні зображення "зіркових" ансамблів сьомого (n=7) порядку

Табл. 1 Формування координатної сітки 7×6 на поверхні тора, утвореної за двома схемами обходу "зіркового" ансамблю (рис. 2, перший в другому ряду)

№	Координати	(a,b,c,d,e, f, g)	(a, d, b, g,c, f, e)
з/п	7×6	((4,4),(1,2),(4,1),(4,5),(4,2),(4,3),(4,0))	((4,4),(4,5),(1,2),(4,0),(4,1),(4,3),(4,2))
1	(0,0)	(4,2)+(4,3)+(4,0)+(4,4)+(1,2)+(4,1)	(1,2)+(4,0)+(4,1)+(4,3)+(4,2)+(4,4)
2	(0,1)	(1,2)+(4,1)+(4,5)+(4,2)+(4,3)+(4,0)	(4,5)+(1,2)+(4,0)+(4,1)+(4,3)+(4,2)
3	(0,2)	(4,0)+(4,4)+(1,2)+(4,1)+(4,5)+(4,2)	(4,2)+(4,4)+(4,5)+(1,2)+(4,0)+(4,1)
...	...	...	...
42	(6,5)	(4,1)+(4,5)+(4,2)+(4,3)+(4,0)	(4,5)+(1,2)+(4,0)+(4,1)

b=(1,2), c=(4,1), d=(4,5), e=(4,2), f=(4,3), g=(4,0). Легко перевірити, що множина вектор-сум, обчислених за mod(7,6), вичерпує множину координат вузлових точок тороїдної сітки з розмірами $n(n-1) = 7{\times}6$ (табл. 1, ліва колонка). Такий же результат досягається під час обходу цих вершин за схемою (a, d, b, g, c, f, e) (табл. 1, права колонка).

Кодування двовимірних сигналів у полі тороїдної системи координат 7×6 здійснюється в оптимізованому 7-розрядному двійковому коді з векторними ваговими розрядами, значеннями яких є 2-кортежі будь-якої із вищенаведених послідовностей. Загальна чисельність двовимірних ІКВ сьомого (n=7) порядку з параметрами (1) становить 180 різних варіантів без урахування циклічних перестановок, реверсування, дзеркальних відображень і способів впорядкування модулів, за якими обчислюються кільцеві вектор-суми. До цього числа входить 78 "зіркових" ІКВ, які групуються за типом симетрії (табл. 2). Згідно (2), усі векторні ІКВ сьомого порядку дають змогу побудувати тороїдну систему координат за будь-яким із чотирьох форматів: 6×7, 2×21 і 3×14, або 2×3×7. Тому побудову системи координат з параметрами (1), якщо $R = 1$ (2), можна здійснити за кожним із цих форматів, що складає 4·78=312 "зіркових", а усіх разом 4·180=720 варіантів. Векторний монолітно-груповий ІКВ-код, завдяки самокоректувальним властивостям, набуває статусу оптимального, оскільки дає змогу збалансувати інформаційну, апаратну та структурну надмірність системи, забезпечуючи завадостійке кодування та опрацювання сигналів.

За результатами теоретичних досліджень здійснено класифікацію векторних "зіркових" ансамблів за групами симетрій (табл. 2).

Табл. 2 Класифікація векторних "зіркових" ансамблів за групами симетрій

Порядок "зірки", n	Розподіл "зірок" по ансамблях за типом симетрії: кількість "зірок" × кількість ансамблів		Кількість усіх "зірок"
	Центральна	Осьова	
5	2×2	2×8	20
7	3×2	4×18	78
11	5×2	8×50	410
13	6×2	10×72	744
19	9×2	16×162	2610
23	11×2	20×242	4862
29	14×2	26×39	10220

Таблиця 2 ілюструє розбіжні темпи зростання кількості "зіркових ансамблів" зі збільшенням порядку n від 5 до 29, залежно від типу симетрії. Ансамблі з осьовою симетрією набувають значно більшої чисельності та різноманітності просторових форм у порівнянні із центрально-симетричними зірками. Обчислення базуються на теоремі 1 та особливостях просторової симетрії циклічних груп.

6 Розширення класу векторних "зіркових" конфігурацій

Обговоримо векторний "зірковий" ансамбль t-вимірних конфігурацій ІКВ n-го порядку з різноманітним розміщенням один відносно другого її векторів. Максимальна кількість неізоморфних варіантів такого розміщення дорівнює числу взаємних переставлянь $P(n)$ векторів ІКВ n-го порядку:

$$P(n) = (n-1)!/2. \qquad (2)$$

Наприклад, "зірковий" ансамбль ІКВ четвертого (n=4) порядку визначає три $P(n) = 3$ варіанти переставляння векторів: (a, b, c, d), (a, b, d, c), (a, c, b, d). Зокрема, векторний "зірковий" ансамбль двовимірної (t=2) ІКВ четвертого (n=4) порядку a=(1,2), b=(2,4), c=(1,3), d=(2,1) формує такі модульні вектор-суми m_1=3, m_2=5:

$$\begin{aligned} &a+b=(1,2)+(2,4) \equiv (0,1), && b+c=(2,4)+(1,3) \equiv (0,2),\\ &a+c=(1,2)+(1,3) \equiv (2,0), && b+d=(2,4)+(2,1) \equiv (1,0),\\ &a+d=(1,2)+(2,1) \equiv (0,3), && c+d=(1,3)+(2,1) \equiv (0,4); \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} a+b+c=(1,2)+(2,4)+(1,3) \equiv (1,4),\\ b+c+d=(2,4)+(1,3)+(2,1) \equiv (2,3),\\ c+d+a=(1,3)+(2,1)+(1,2) \equiv (1,1),\\ d+a+b=(2,1)+(1,2)+(2,4) \equiv (2,2),\\ a+b+c+d=(1,2)+(2,4)+(1,3)+(2,1) \equiv (0,0). \end{gathered}$$

Множина всіх знайдених за обраним варіантом векторів вичерпує значення координат вузлових точок двовимірної сітки $m_1 \times m_2 = 3 \times 5$ на поверхні тора. Легко перевірити, що два інші варіанти формування тороїдної системи координат на цьому "зірковому" ансамблі покажуть рівноцінні результати.

У наведеному прикладі використані усі можливі способи формування комбінаційних вектор-сум на множині двовимірних векторів "зіркових" конфігурацій, що дає змогу розширити розміри координатної сітки тороїдної системи координат до теоретично досяжних й відповідно — діапазон просторового поля для кодування даних та опрацювання багатовимірних сигналів.

Теорема 2. Множина $N = \{2^n\}$ натуральних чисел взаємно однозначно відповідає множині M вузлових точок, які покривають t-вимірну поверхню тора сіткою координат R раз $P(n) = (n-1)!/2$ різними способами їх відліку з точністю до ізоморфізму, де n - кількість натуральних чисел з основою 2, $n{>}2$.

Доведення. Перетворимо n чисел на множину $M(n)$ t-кортежів, утворених на всіх комбінаційних сумах цих чисел за комплексним модулем (m_1, m_2,. . . , m_t), множина яких перелічує множину координат вузлових точок t-вимірної поверхні тора з розмірами $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_t$. Згідно (1) існує рівно R різних способів такого переліку, а також $P(n) = (n-1)!/2$ перестановок цих кортежів, й відповідно – такій же кількості способів відліку усіх вузлових точок на t-вимірній поверхні тора. Теорему 2 доведено.

Із теореми 2 випливає, що потужність методу оптимального кодування та опрацювання t-вимірних сигналів у тороїдних просторових системах координат можна збільшити не лише завдяки використанню n-розрядного векторного монолітно-групового ІКВ-коду, але й ненадлишкового t-вимірного двійкового коду, який дає змогу отримати $P(n)$ додаткових варіантів систем кодування t-вимірних сигналів.

Зі збільшенням кількості вимірів "зіркових" кодів відповідно зростає кількість і різноманітність утворюваних ними багатовимірних тороїдних систем координат, що збагачує можливості їх практичного застосування.

Висновки

Використання тороїдних систем координат для опрацювання багатовимірних сигналів дає змогу оптимізувати процедури, пов'язані з їх кодуванням, пересиланням, збереженням, реконструкцією тощо. Оптимізація полягає у розширенні просторового поля тороїдної системи координат, завдяки використанню комбінаційних вектор-сум, утворюваних на множині фіксованої кількості базових векторів. Множина всіх дозволених двійкових комбінацій взаємно однозначно відповідає множині координат усіх вузлових точок t-вимірної тороїдної системи відліку векторів, число яких збігається з кількістю всіх комбінаційних вектор-сум, утворених на оптимізованих наборах базових векторів типу "зіркових" ІКВ-конфігурацій. Опрацювання сигналів у цій базі може здійснюватися завадостійким самокоректувальним монолітно-груповим кодом, який автоматично виявляє і виправляє помилкові кодові сигнали за ознакою появи більше однієї монолітної послідовності однойменних символів, або ненадлишковим "зірковим" векторним кодом, що дає змогу збільшити потужність методу кодування у розширеному просторовому полі тороїдної системи координат. "Зіркові" коди вигідно відрізняються від класичних за потужністю і багатоманітністю методів перетворення форми інформації. Розширення даного класу кодів розкриває нові перспективи для розвитку комбінаторних методів оптимізації багатовимірних систем опрацювання сигналів в задачах радіотехніки, зв'язку і комп'ютерних технологіях.

References

[1] Zhuk K.D.,Tunik A.A. and Chynaiev P.I. (1973) *Bahatovymirni systemy avtomatychnoho keruvannia* [Multidimensional systems of automatized control. Encyclopedia of cybernetics], Vol. 1, Kyiv, pp. 140-142.

[2] Bose N.K. (2017) Multidimensional Sampling. *Applied Multidimensional Systems Theory*, pp. 57-80. DOI: 10.1007/978-3-319-46825-9_3

[3] Bacchelli B., Bozzini M., Rabut C. and Varas M. (2005) Decomposition and reconstruction of multidimensional signals using polyharmonic pre-wavelets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol. 18, Iss. 3, pp. 282-299. DOI: 10.1016/j.acha.2004.11.007

[4] Bacchelli B., Bozzini M. and Rabut C. (2003) *A fast wavelet algorithm for multidimensional signal using polyharmonic splines*, in: Cohen A., Merrien J.L., Schumaker L.L. (Eds.) Curves and Surfaces Fitting: Saint-Malo 2002, Nashboro Press, pp. 21-30.

[5] Wu Z., Feng J., Qiao F. and Tan Z. (2016) Fast multidimensional ensemble empirical mode decomposition for the analysis of big spatio-temporal datasets. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 374, Iss. 2065, pp. 20150197. DOI: 10.1098/rsta.2015.0197

[6] Rué J. (2013) On polynomial representation functions for multivariate linear forms. *European Journal of Combinatorics*, Vol. 34, Iss. 8, pp. 1429-1435. DOI: 10.1016/j.ejc.2013.05.017

[7] Dudgeon D.E. and Mersereau R.M. (1983) *Multidimensional Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, pp. 61, 112.

[8] Mersereau R. and Speake T. (1983) The processing of periodically sampled multidimensional signals. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 31, Iss. 1, pp. 188-194. DOI: 10.1109/tassp.1983.1164018

[9] Mersereau R., Mecklenbrauker W. and Quatieri T. (1976) McClellan transformations for two-dimensional digital filtering-Part I: Design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 23, Iss. 7, pp. 405-414. DOI: 10.1109/tcs.1976.1084236

[10] Madych W.R. (1990) Polyharmonic Splines, Multiscale Analysis, and Entire Functions. *International Series of Numerical Mathematics / Internationale Schriftenreihe zur Numerischen Mathematik / Série Internationale d'Analyse Numérique*, pp. 205-216. DOI: 10.1007/978-3-0348-5685-0_15

[11] Madych W.R. (1999) Spline type summability for multivariate sampling. *Analysis of Divergence*, , pp. 477-512. DOI: 10.1007/978-1-4612-2236-1_27

[12] Nikos E. Mastorakis N.E. (1996) Singular value decomposition in multidimensional arrays. *International Journal of Systems Science*, Vol. 27, Iss. 7, pp. 647-650. DOI: 10.1080/00207729608929261

[13] Weng X. and Shen J. (2008) Classification of multivariate time series using two-dimensional singular value decomposition. *Knowledge-Based Systems*, Vol. 21, Iss. 7, pp. 535-539. DOI: 10.1016/j.knosys.2008.03.014

[14] Hall M.Jr. (1998) *Combinatorial Theory, 2nd Edition*, Wiley-Interscience, 464 p.

[15] Hughes D.R., Piper F.C. (1985) *Design theory*, Cambridge University Press. DOI: 10.1016/0012-365x(90)90123-y

[16] Moore E.H. and Pollastek H.S. (2013) *Difference Sets: Connecting Algebra, Combinatorics, and Geometry*. AMS.

[17] Singer J. (1966) Division of mathematics: perfect difference sets. *Transactions of the New York Academy of Sciences*, Vol. 28, Iss. 7 Series II, pp. 883-888. DOI: 10.1111/j.2164-0947.1966.tb02392.x

[18] Vajda S., Hughes D.R. and Piper F.C. (1974) Projective Planes.. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, Vol. 137, Iss. 2, pp. 269. DOI: 10.2307/2344563

[19] Rotman J. (1998) Galois Extensions. *Universitext*, pp. 79-82. DOI: 10.1007/978-1-4612-0617-0_15

[20] Woods J.W. (2012) *Multidimensional Signal, Image, and Video Processing and Coding*, pp. 616. DOI: 10.1016/C2009-0-62200-5

[21] Riznyk V.V. (1989) *Syntez optymalnykh kombinatornykh system* [Synthesis of optimum combinatorial systems], Lviv : Vyshcha shkola, 168 p.

[22] Riznyk V. (1998) Multi-dimensional systems based on perfect combinatorial models. *IEE Colloquium on Multidimensional Systems: Problems and Solutions*. DOI: 10.1049/ic:19980164

[23] Riznyk V.V. (2015) Multidimensional Systems Optimization Developed from Perfect Torus Groups. *International Journal of Applied Mathematics and Informatics*, Vol. 9, pp.50-54.

[24] Leeper D.G. (1978) *Thinned Aperiodic Antenna Arrays with Improved Peak Sidelobe Level Control*. Pat. USA No 4071848.

[25] Michio Kaku (1995) *Hyperspace: A Scientific Odyssey Through Parallel Universes, Time Warps, and the 10th Dimension*, Oxford University Press.

Методы обработки многомерных сигналов в тороидных системах координат

Ризнык В. В.

Рассматриваются методы обработки многомерных сигналов в пространственном поле координатной системы тора, построенной на множестве комбинационных сумм базовых векторов комбинаторной конфигурации "звездного" типа, и на основе использования ее уникальных свойств предложено два теоретически обоснованных подхода к формированию тороидных систем координат для оптимального кодирования и преобразования векторных сигналов: монолитно-групповых и безизбыточных кодов. На конкретных примерах описаны преимущества каждого метода кодирования многомерных сигналов с приведением соответствующих теорем, расчетов и иллюстративного материала. Расширение класса "звездных" комбинаторных конфигураций открывает новые возможности применения методов оптимизированного кодирования и обработки многомерных сигналов в тороидных системах координат, разработки оптимизированных векторных информационных технологий, радиотехнических устройств и систем связи.

Ключевые слова: оптимальная тороидная система координат; многомерный сигнал; оптимальный векторный монолитно-групповой код; оптимальный многомерный код; многомерный самокорректирующий код; многомерные "звездные" конфигурации; мощность метода кодирования; оптимальные векторные информационные технологии

Methods of multidimensional signal processing under toroidal coordinate systems

Riznyk V. V.

Methods of multidimensional signal processing under spatial toroidal coordinate systems configured on a set of combining sums over vector "Glory to Ukraine Star" combinatorial configurations. Base vectors are discussed, and the two theoretically grounded approaches to formation such coordinate systems in order for optimum encoding and conversion of vector signals using its unique properties, both optimum monolithic and group vector codes, and non-redundant codes are proposed. On the particular examples described the benefits of each method of coding of multidimensional signals pointing to corresponding theorems, calculations and illustrative material. Extension of the "star" combinatorial configurations opens new possibilities for the application of methods of optimized coding and processing of multidimensional signals under toroidal coordinate systems for designing modern systems of communication and development of optimized vector information technologies. The remarkable technical merits of the vector configurations, which properties hold for the same set of an optimum encoded design in varieties permutations of its terms is demonstrated, and methods for processing of two- or multidimensional vector signals based on both the optimum binary monolithic and non-redundant codes are presented. Proposed methods of multidimensional signal processing under toroidal coordinate systems provide, essentially, a new approach to generalize them to great class of optimized problems in radio-telecommunications, navigation and information technology. Moreover, the optimization embedded in the underlying combinatorial configurations. The favorable qualities of the "stars" provide breakthrough opportunities to apply them to numerous branches of science and advanced technology, with direct applications to vector data telecommunications, vector encoded design, and optimal vector information technology.

Key words: optimum toroidal coordinate system; multidimensional signal; optimal vector monolithic and group code; non-redundant multidimensional code; multidimensional self-checking code; "star" multidimensional configuration; code size; optimum vector information technologies