

**УДОСКОНАЛЕННЯ ТЕХНОЛОГІЇ МОДЕЛЮВАННЯ
ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ
З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ФАЗ ЕРЛАНГА**

Волочій Б.Ю., д.т.н., професор; Озірковський Л.Д., к.т.н., доцент;

Кулик І.В., аспірант

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів, Україна

Вступ

Для побудови моделей поведінки складних технічних систем у вигляді дискретно-неперервної стохастичної системи (ДНСС) в [1] запропоновано метод формування графа станів та переходів, ступінь формалізації якого дозволив автоматизувати цей процес. На основі цього методу розроблено програмний модуль ASNA, призначений для визначення показників надійності (ймовірність безвідмовної роботи та середнє значення тривалості безвідмовної роботи) відмовостійких систем [6]. Програмний модуль ASNA здійснює безпомилкову побудову графа станів та переходів для об'єкта дослідження з великою кількістю станів і є особливо ефективним при його багатоваріантному аналізі. За допомогою графа, який представляє марковську ДНСС [2] формується математична модель об'єкта дослідження у вигляді системи диференціальних рівнянь Колмогорова-Чепмена. Така модель накладає обмеження на об'єкт дослідження, а саме тривалості всіх процесів в ньому вважаються розподіленими за експоненційним законом. Однак в дійсності для частини процесів в об'єкті дослідження може бути прийнятним такий закон розподілу, а для іншої - ні. Так для процесів старіння та технічного обслуговування у відмовостійких системах та для процесів надходження та обслуговування заявок в системах масового обслуговування актуальним є використання закону розподілу Ерланга.

В практиці системного аналізу є відомий метод фаз Ерланга [2-5], який дозволяє немарковський дискретно-неперервний процес з розподілом для його тривалостей за законом Ерланга апроксимувати марковським процесом. Це означає, що марковською ДНСС можна представити стохастичну систему немарковського типу. Для цього необхідно трансформувати граф станів і переходів введенням для відповідних станів ланцюжків фіктивних станів. Однак використання цього методу без засобів автоматизації для об'єктів дослідження з великою кількістю станів є дуже трудомісткою задачею.

В роботі показано розв'язання задачі удосконалення відомого [1] методу формування графа станів та переходів для ДНСС немарковського типу при наявності процесів з тривалостями, які необхідно представляти законом розподілу Ерланга.

Модифікація методики побудови структурно-автоматних моделей об'єктів дослідження

В технологію [1] внесено ряд доповнень, які стосуються формування вербальної та побудови структурно-автоматної моделі. Внесені доповнення дозволяють здійснювати автоматизовану побудову моделі поведінки стохастичної системи у вигляді графа станів та переходів, з використанням методу ФЕ. Основні принципи використання модифікованої технології представлено у вигляді послідовності етапів:

Формування вербальної моделі. Вербальна модель дає описове представлення об'єкту дослідження. Для її побудови необхідно здійснити опис всіх подій, які можуть відбуватися в досліджуваній системі та провести їх класифікацію на базові та супутні. Для кожної базової події необхідно описати умови та обставини, які визначають її виникнення.

Вхідними даними при побудові моделей поведінки стохастичних систем немарковського типу, окрім представлення структури та поведінки цих систем, є відомості про математичні моделі законів розподілу ймовірності (густина розподілу $f(t)$, математичне очікування m_c , дисперсія σ^2) для процесів, які протікають в досліджуваних системах. Зазвичай це є процеси старіння апаратури, технічного обслуговування, надходження і обробки повідомлень, дія зовнішніх чинників тощо. Для використання цих даних при побудові моделей поведінки стохастичної системи за допомогою методу ФЕ, задані закони розподілу необхідно апроксимувати за допомогою закону розподілу Ерланга або композиції кількох законів розподілу Ерланга, що дасть змогу визначити кількість додаткових ланцюжків та кількість фіктивних станів в цих додаткових ланцюжках.

Для використання методу фаз Ерланга, при моделюванні систем немарковського типу, за допомогою удосконаленої технології моделювання ДНСС з обраних базових подій необхідно визначити ті події, які спричиняють процеси, тривалість яких описується відмінним від експоненціального законом розподілу ймовірності.

Побудова структурно-автоматної моделі. Побудова структурно-автоматної моделі здійснюється на основі вербальної моделі, яка задає вхідні дані у вигляді переліку базових подій та умов і обставин, при яких ці події відбуваються. Для автоматизованого формування додаткових ланцюжків фіктивних станів згідно методу ФЕ, необхідно внести деякі зміни в етапи формування структурно-автоматної моделі.

Формування вектора станів полягає у виборі компонент, які визначають стан системи в кожен момент часу. Кількість компонент в описі поточного стану повинна відповідати кількості параметрів, зміна яких визначає поведінку об'єкта дослідження.

При використанні методу ФЕ необхідно призначити додаткові компоненти вектора станів, які визначають перебування стохастичної системи у

фіктивних станах додаткових ланцюжків.

Визначення множини формальних параметрів для моделі. При формуванні множини формальних параметрів необхідно задати значення інтенсивності потоків подій, константи, які визначають структуру об'єкта дослідження та початкові значення компонент вектора станів.

Побудова дерева правил та модифікацій. Згідно технології [1], у відповідній табличній формі, здійснюється математичний опис поведінки системи, а саме виникнення вибраних базових подій. За допомогою логічних функцій та математичних операцій над компонентами вектора станів проводиться опис умов та обставин, при яких відбуваються встановлені базові події. Для базових подій, які спричиняють появу немарковських процесів в стохастичній системі необхідно сформулювати допоміжні умови та обставини, які будуть описувати перебування системи у фіктивних станах додаткових ланцюжків. Для математичного опису умов та обставин, які спричиняють появу базової події необхідно скомпонувати формули розрахунку інтенсивностей переходів із стану в стан та формули розрахунку ймовірностей альтернативних переходів, а також встановити правила модифікації компонент вектора станів.

Побудова графа станів та переходів. Розроблена структурно-автоматна модель вноситься в програмний модуль ASNA. Програмний модуль ASNA формує модель об'єкта дослідження у вигляді графа станів та переходів для якого складає систему диференціальних рівнянь Колмогорова-Чепмена та здійснює їх розв'язання.

Перевірка точності апроксимації. На основі, отриманого в результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь Колмогорова-Чепмена, розподілу ймовірностей перебування системи в станах, проводиться розрахунок апроксимуючих еквівалентних інтенсивностей, які повинні описувати відповідний процес (старіння, відновлення тощо). Здійснюється порівняння параметрів реального закону розподілу та розрахованих параметрів апроксимуючого закону розподілу. Якщо точність апроксимації не відповідає заданому критерію, то необхідно провести корегування значення інтенсивності переходів між додатковими станами в еквівалентних ланцюжках. Корекцію значень інтенсивностей переходів необхідно здійснювати до забезпечення необхідної точності апроксимації.

Формування показників надійності ефективності досліджуваної системи. З отриманого розподілу перебування системи у станах формують необхідні показники ефективності системи.

Приклад застосування удосконаленої технології моделювання

Вербальна модель. В даній роботі об'єктом розгляду є система обробки інформації, моделлю якої є система масового обслуговування (СМО) з обмеженою чергою та одноканальним, однофазним і ненадійним обслуговуванням $E3|M|1|2$ рис 1. [1].

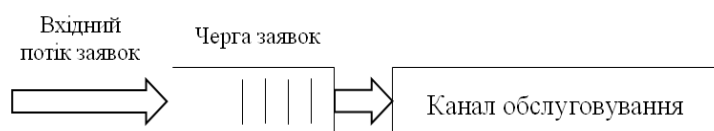


Рис. 1

Досліджувана система працює наступним чином: заявка, яка надходить в СМО при відсутності черги і незайнятому

та працездатному каналі обслуговування поступає до нього на обслуговування. Якщо канал обслуговування зайнятий або несправний і в черзі є вільне місце, заявка яка надходить стає в чергу. Якщо канал обслуговування зайнятий або несправний і в черзі немає вільного місця, заявка яка надходить втрачається.

Тривалість надходження заявок, для розглянутої СМО, розподілена за законом розподілу Ерланга 3-го порядку з інтенсивністю $\alpha_{er}(t)$ та функцією густини розподілу $f_{er}(t)$.

$$\alpha_{er}(t) = \frac{\alpha \cdot (\alpha \cdot t)^{n-1}}{(n-1)! \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha \cdot t)^k}{k!}} \quad (1)$$

$$f_{er}(t) = \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \frac{(\alpha \cdot t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (2)$$

де α – параметр масштабу; n – параметр форми.

Канал обслуговування може виходити з ладу, причому втрата працездатності може статися коли канал є вільним, а може статися коли канал зайнятий обслуговуванням заявки. Заявка, яка обслуговується в момент появи порушення працездатності каналу, повертається в чергу, якщо в ній є вільне місце. Якщо вільного місця немає, вона втрачається. Порушення працездатності каналу обслуговування виявляється засобами контролю і після цього починається ремонт каналу обслуговування, який покладено на ремонтний орган. Кількість ремонтів каналу обслуговування не обмежено, причому ремонт завжди є успішним. Функція контролю стану працездатності каналу обслуговування виконується бездоганно, тобто ймовірність виявлення порушення працездатності рівна одиниці.

Опис базових подій. Для даної СМО притаманними є наступні базові події:

Подія 1. «Прихід заявки на обслуговування»

Подія 2. «Завершення обслуговування заявки»

Подія 3. «Втрата працездатності каналу обслуговування»

Подія 4. «Завершення ремонту каналу обслуговування»

З записаних базових подій подія «Прихід заявки на обслуговування» спричиняє процес, тривалість якого описується законом розподілу Ерланга. Таким чином стани, в яких відбувається надходження в систему заявок необхідно розщепити на додатковий ланцюжок, який складається з трьох фактивних станів з інтенсивністю переходів між цими станами α .

Подія 1. «Прихід заявки на обслуговування». Дана подія може відбуватися при наступних обставинах:

Канал обслуговування є працездатним і вільним, а черга заявок є пустою. В цьому випадку заявка поступає безпосередньо в канал обслуговування.

Канал обслуговування є працездатним і зайнятий обслуговуванням заявки або несправний. В черзі є заявки, проте вона не заповнена до кінця і ще залишається місце для заявок які прибувають. В цьому випадку новоприбула заявка поповнює чергу заявок.

Канал обслуговування є працездатним і зайнятий обслуговуванням заявки або несправний, а черга заявок є заповненою. В такому випадку новоприбула заявка втрачається.

Подія 2. «Завершення обслуговування заявки». Подія 2 може відбуватися при наступних обставинах:

Заявка обслуговується в каналі обслуговування, черга заявок є пустою. В такому випадку заявка обслуговується і звільнює канал обслуговування.

Канал обслуговування зайнятий обслуговуванням заявки, а черга заявок не є пустою. По завершенні обслуговування заявки вона покидає канал обслуговування, а в нього відразу поступає наступна заявка, яка знаходилася в черзі.

Подія 3. «Втрата працездатності каналу обслуговування». Ця подія відбувається за наступних умов:

Канал обслуговування та черга є пустими. За такої обставини всі наступні заявки, які надходять будуть поповнювати чергу, а канал переходить у непрацездатний стан.

Канал обслуговування зайнятий обслуговуванням заявки, а черга є пустою або не є заповненою до кінця. При втраті каналом працездатності заявка, яка в цей час обслуговувалась поступає в чергу, а канал переходить у непрацездатний стан.

Канал обслуговування зайнятий обслуговуванням заявки, а черга є повністю заповненою. В такому випадку при втраті каналом працездатності заявка, яка в цей час обслуговувалась втрачається, а канал переходить в непрацездатний стан.

Подія 4. «Завершення ремонту каналу обслуговування». Ця подія може відбуватись при наступних обставинах:

Канал обслуговування є непрацездатним, а черга пустою. В такому випадку після закінчення відновлення каналу обслуговування він відразу готовий прийняти новоприбулу заявку.

Канал обслуговування є несправним, а в черзі є заявки. За таких обставин після закінчення відновлення каналу обслуговування він переходить у працездатний стан і відразу отримує на обслуговування заявку, яка знаходилась в черзі. Усі новоприбулі заявки поступають в чергу.

Побудова структурно-автоматної моделі. Згідно технології моделювання дискретно-неперервних стохастичних систем [1] здійснюється вибір необхідних констант та компонент вектора станів системи.

KF – кількість фаз додаткового процесу;

λ – інтенсивність відмов каналу обслуговування;

μ – інтенсивність відновлення каналу обслуговування;

α – інтенсивність надходження заявки;

β – інтенсивність обробки заявки;

m – максимальна кількість заявок в каналі обслуговування

Для даного випадку вектор станів має наступні компоненти:

$V1$ – вказує на поточну кількість заявок в черзі; в початковий момент часу $V1=0$; максимальне значення компоненти $V1=m$;

$V2$ – описує стан каналу обслуговування; 1 – канал справний і пустий; 2 – канал справний і зайнятий обслуговуванням заявки; 0 – канал несправний;

$V3$ – описує кількість втрачених заявок;

$V4$ – додаткова компонента, яка визначає перебування системи в фіктивних станах; в початковий момент часу $V4=KF$;

Частина дерева правил та модифікацій, для досліджуваної системи, представлено в табл.1

Таблиця 1

Події	Умови	ФРПП	ФРІАП	ПМВС
Прихід заявки на обслуговування	$(V1=0) \text{ AND } (V2=1) \text{ AND } (V3=0) \text{ AND } (V4 \geq 2)$	α	1	$V4:=V4-1;$
	$(V1=0) \text{ AND } (V2=1) \text{ AND } (V3=0) \text{ AND } (V4=1)$	α	1	$V4:=KF;$ $V2:=2;$
	$(V1 < m) \text{ AND } ((V2=2) \text{ OR } (V2=0)) \text{ AND } (V3=0) \text{ AND } (V4 \geq 2)$	α	1	$V4:=V4-1;$
	$(V1 < m) \text{ AND } ((V2=2) \text{ OR } (V2=0)) \text{ AND } (V3=0) \text{ AND } (V4=1)$	α	1	$V4:=KF;$ $V1:=V1+1;$
	$(V1=m) \text{ AND } ((V2=2) \text{ OR } (V2=0)) \text{ AND } (V3=0) \text{ AND } (V4 \geq 2)$	α	1	$V4:=V4-1;$
	$(V1=m) \text{ AND } ((V2=2) \text{ OR } (V2=0)) \text{ AND } (V3=0) \text{ AND } (V4=1)$	α	1	$V4:=KF;$ $V3:=V3+1$
Закінчення обслуговування заявки	$(V1=0) \text{ AND } (V2=2) \text{ AND } (V3=0) \text{ AND } (V4=KF)$	β	1	$V2:=1$
	$((V1 > 0) \text{ AND } (V1 < m)) \text{ AND } (V2=2) \text{ AND } (V3=0) \text{ AND } (V4=KF)$	β	1	$V1:=V1-1$
	$(V1=m) \text{ AND } (V2=2) \text{ AND } (V3=0) \text{ AND } (V4=KF)$	β	1	$V1:=V1-1$
	$(V1=m) \text{ AND } (V2=2) \text{ AND } (V3=1) \text{ AND } (V4=KF)$	β	1	$V1:=V1-1;$ $V3:=0$

Побудова графа станів та переходів. Сформована структурно-автоматна модель вноситься в програмний модуль ASNA, використання

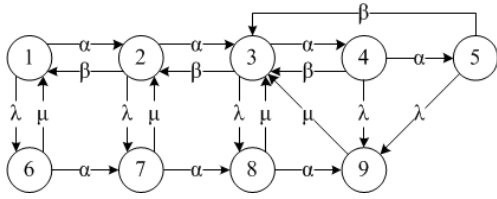


Рис. 2. Граф станів та переходів марковської моделі СМО

якого дає можливість автоматично генерувати граф станів та переходів системи та отримати розв'язок системи диференціальних рівнянь Колмогорова-Чепмена. Отриманий граф станів та переходів видається у вигляді матриці в якій вказано стани системи та інтенсивності переходів між ними. Графічне представлення графу станів та переходів даної системи зображено на рис. 2.

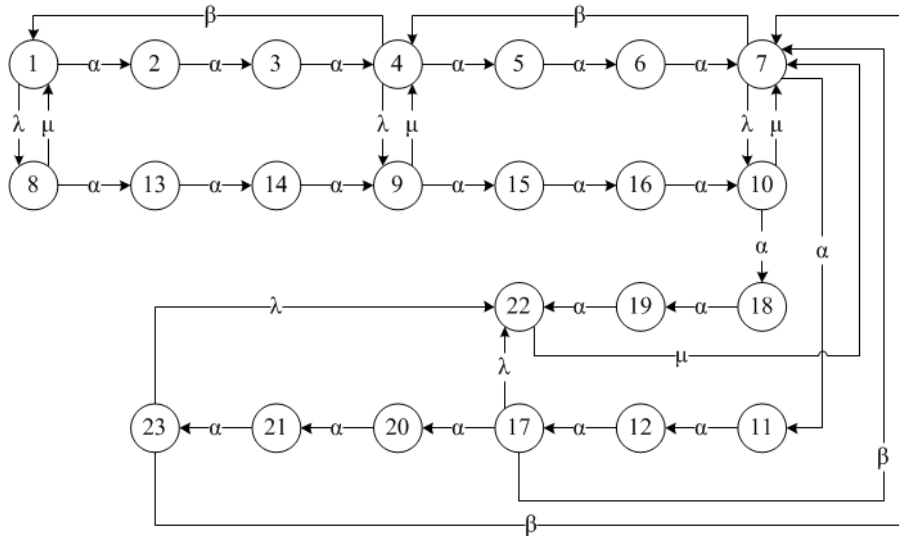


Рис. 3. Граф станів та переходів еквівалентної марковської СМО побудованої з використанням методу ФЕ

Формування показників ефективності досліджуваної системи.

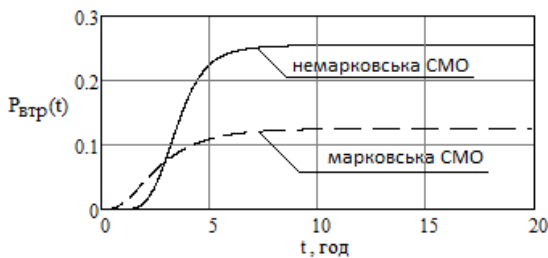


Рис. 4. Залежність ймовірності втрати заявки від часу

Результатом розв'язання системи диференціальних рівнянь Колмогорова-Чепмена є ймовірність перебування системи в станах в довільний момент часу. Маючи значення цих ймовірностей здійснюється обчислення необхідних показників ефективності.

Ймовірність втрати заявки для марковської системи (3) та немарковської системи (4):

$$P_{втр}(t) = P_5(t) + P_9(t) \tag{3}$$

$$P_{втр}(t) = P_{22}(t) + P_{23}(t) \tag{4}$$

Ймовірність перебування заявки в каналі обслуговування для марковської (5) та немарковської (6) систем:

$$P_{зав}(t) = P_2(t) + P_3(t) + P_4(t) + P_5(t) \tag{5}$$

$$P_{зав}(t) = \sum_{i=4}^7 P_i(t) + P_{11}(t) + P_{12}(t) + P_{17}(t) + P_{20}(t) + P_{21}(t) + P_{23}(t) \quad (6)$$

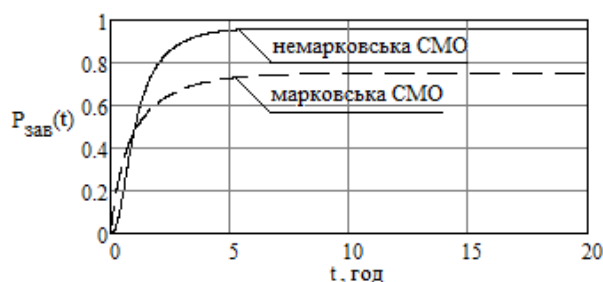


Рис. 5. Залежність ймовірності перебування заявки в каналі обслуговування від часу

Висновки

Вдосконалено техно-логію моделювання ДНСС [1], що дало змогу здій-снювати автома-тизовану побудову графа станів та переходів для систем немар-ковського типу з використан-ням методу фаз Ерланга. На від-міну від існуючої, вдоскона-лена технологія дає змогу адек-ватно враховувати процеси, що

протікають в системі та описуються за допомогою закону розподілу Ерланга.

Здійснено порівняння показників ефективності системи обробки інформації пред-ставленої марковською та немарковською ДНСС. Відмінності між результатами під-тверджують актуальність врахування реального закону розподілу при моделюванні по-ведінки системи.

Література

1. Волочій Б.Ю. Технологія моделювання алгоритмів поведінки інформаційних си-стем / Волочій Б.Ю. – Львів: НУЛП, 2004. – 220с.
2. Кочегаров В.А. Проектирование систем распределения информации. Марковские и немарковские модели / Кочегаров В.А., Фролов Г.А. – М.: Радио и связь, 1991. 216 с.
3. Иьуду К.А., Математические модели отказоустойчивых вычислительных систем / Иьуду К.А., Кривошеков С.А. – М.: МАИ, 1989. – 144 с.
4. Кениг Д. Методы теории массового обслуживания / Кениг Д., Штоян Д. / Пер. с нем. / Под ред. Климова Г.П. – М.: Радио и связь, 1981. – 128 с.
5. Райншке К. Оценка надежности систем с использованием графов / К. Райншке, И.А. Ушаков / Под ред. И.А. Ушакова– М.: Радио и связь, 1988. – 208 с.
6. Мандзій Б.А. Визначення параметрів стратегії аварійного відновлення для відмо-востійких систем на основі мажоритарної структури / Б.А. Мандзій, Б.Ю. Волочій, Л.Д. Озірковський, М.М. Змисний, І.В. Кулик // Вісник НУ «Львівська політехніка». Радіо-техніка та телекомунікації. – 2011. –№705. – С. 216–224.

Волочій Б.Ю., Озірковський Л.Д., Кулик І.В. Удосконалення технології моделю-вання дискретно-неперервних стохастичних систем з використанням методу фаз Ерланга. Об'єктом розгляду є процес побудови моделей поведінки дискретно-неперервних стохастичних систем немарковського типу за допомогою методу фаз Ер-ланга. В роботі показано принципи вдосконалення технології побудови моделей дис-кретно-неперервних стохастичних систем, що дає змогу здійснити автоматизовану побудову графа станів та переходів систем немарковського типу з використанням ме-тоду фаз Ерланга. Удосконалену технологію проілюстровано прикладом аналізу сис-теми масового обслуговування.

Ключові слова: надійність, розширена марковська модель, немарковська система, метод фаз Ерланга, система масового обслуговування.

Волочій Б.Ю., Озірковский Л.Д., Кулик И.В. Усовершенствование технологии моделирования дискретно-непрерывных стохастических систем с использованием

метода фаз Эрланга. Объектом рассмотрения есть процесс построения моделей поведения дискретно-непрерывных стохастических систем немарковского типа с помощью метода фаз Эрланга. В работе показаны принципы усовершенствования технологии построения моделей дискретно-непрерывных стохастических систем, что дает возможность осуществить автоматизированное построение графа состояний и переходов систем немарковского типа с использованием метода фаз Эрланга. Усовершенствование технологии иллюстрируется примером анализа системы массового обслуживания.

Ключевые слова: надежность, расширенная марковская модель, немарковская система, метод фаз Эрланга, система массового обслуживания.

Volochiy B., Ozirkovskyy L., Kulyk I. Improving of the Modeling Technique of the Discrete-Continuous Stochastic Systems by the Method of Erlang Phases. The construction of models of behavior of discrete-continuous stochastic systems non-Markov type by the method of Erlang phases is the object of consideration. This paper shows the principles of improving the technology of building the models of discrete-continuous stochastic systems, that allows automated to build graph of states and transitions of non-Markov type systems with using the method of Erlang phases. Improved technology is illustrated by the example of a queuing system.

Keywords: reliability, expanded Markov model, non-Markov system, method of Erlang phases, queuing system.