

# Исследование метода частотно-временного анализа сигналов на основе функций поведения и арифметических рядов

Бочарников В. П., Свешиников С. В.

Национальный университет обороны Украины имени Ивана Черняховского

E-mail: bocharnikovvp@yandex.ru

**Введение.** В статье рассмотрены результаты исследования метода частотно-временного анализа сигналов на основе использования функций поведения и арифметических рядов (метод BFAS, Behavior Function and Arithmetic Series). Приведены результаты сравнения эффективности применения метода BFAS и метода кратковременного быстрого преобразования Фурье (STFT) на примере нестационарного сигнала в диапазоне инфразвуковых частот с низкой разрешающей способностью по частоте.

**Метод BFAS.** Для решения задачи анализа нестационарных сигналов мы предложили использовать свойства функций поведения систем, которые представлены в виде распределения меры возможности. Для построения функции поведения нами использован математический базис - адического исчисления. Поведение системы, генерирующей сигнал, имеет локально-инвариантные участки, на которых спектр сигнала относительно стабилен. Для выявления этих участков мы использовали подход к идентификации метасистемы на основе анализа изменения показателя неопределенности для функции поведения системы. Моменты изменения функции поведения определяют координаты импульсной функции, которая моделирует исходный сигнал. Координаты импульсов описываются арифметическими рядами, которые используются для оценки частотного спектра исходного сигнала. Мы установили, что импульсы исследуемого сигнала формируются при наличии в его окрестности баланса импульсов от гармонических функций, формирующих данный сигнал. Мы предложили подход к определению оценок текущих спектров сигнала на основе сформированных уравнений баланса. Использование уравнений баланса в окрестностях импульсов анализируемого сигнала позволяет формировать адаптивную временную локализацию для оценки текущих спектров. Это дало возможность использовать предложенный подход для частотно-временного анализа нестационарных сигналов. Для сглаживания оценок мы использовали нечеткую фильтрацию.

**Результаты исследования.** Мы провели исследование применения разработанного метода BFAS для анализа нестационарных сигналов и сравнили их с результатами применения метода STFT. В статье мы подробно разобрали результаты исследования для дискретного сигнала инфразвуковой частоты с низкой разрешающей способностью. Такие сигналы являются наиболее сложными для частотно-временного анализа. Для количественного сравнения результатов оценки спектров мы использовали показатель спектрального угла контрастности, а для сравнения восстановленных по спектрам сигналов – коэффициент корреляции. Исследования метода BFAS показали, что точность оценки текущего спектра по косинусу спектрального угла контрастности составляет не ниже 0.9, а коэффициент корреляции восстановленного и истинного сигналов не ниже 0.87.

**Выводы.** Исследования показали, что предложенный метод BFAS является эффективным для частотно-временного анализа нестационарных сигналов и во многих случаях превосходит по точности использование метода STFT.

*Ключевые слова:* временной ряд; частотно-временной анализ;  $p$ -адические числа; функции поведения систем; мера возможности; нечёткое множество; системный анализ

DOI: [10.20535/RADAP.2019.79.5-15](https://doi.org/10.20535/RADAP.2019.79.5-15)

## Введение

Любой пространственно-временной сигнал можно описать совокупностью базисных функций [1]. Это позволяет получить спектр сигнала, который отражает долю содержания данных базисных функций в исходном сигнале. Такое разложение ока-

зывается полезным, например, для синтеза алгоритмов сжатия с минимальными потерями, при решении задач фильтрации сигналов, синтеза оптимальных регуляторов и т.д. Переход к спектру наиболее часто осуществляют с использованием разложения по ортогональным функциям [2], например, при помощи разложения в ряд Фурье [3], ряд Уолша [4]

или на основе вейвлет преобразования [5, 6]. В работе [7] были подробно рассмотрены преимущества и ограничения существующих подходов к частотно-временному анализу дискретных сигналов и выявили ряд важных моментов.

Наложённая на исходный сигнал «сетка» частотно-временной локализации может не «совпадать» с характеристиками исходной функции сигнала  $\varphi(t)$ , что приводит к искажениям частотно-временной оценки сигнала. Именно поэтому в существующих подходах особое внимание уделяют подбору базисных функций и функций оконного представления.

В ряде случаев, как, например, при использовании вейвлет преобразований, временное окно имеет нечеткие границы, что приводит к искажениям частотно-временной оценки сигнала в силу наложения окон. На оценку степени совпадения исходной и базисной функции оказывает влияние выбор в качестве меры сходства интегральной свертки функций, что на практике вносит свои погрешности, связанные с погрешностями численных методов интегрирования. В то же время мера сходства может быть построена иными и более эффективными способами.

Используемая в существующих подходах жесткая «сетка» частотно-временной локализации не адаптивна. Она не учитывает характер поведения нестационарной функции сигнала. На сегодня более эффективной является локализация, которая используется в вейвлет преобразованиях. Однако она также является жесткой, что приводит к необходимости более тщательного подбора базисных функций вейвлетов. Не жесткий подбор базисных функций используется в предложенном Н. Хуангом методе анализа сигналов (Huang-Hilbert Transform) [8]. Однако, как показали исследования, данный подход тоже имеет ряд недостатков [9].

Можно предположить, что если функция  $\varphi(t)$  ведёт себя не стационарно, то частотно-временная локализация должна быть адаптивна и подстраиваться под поведение исследуемого сигнала. Для обеспечения адаптивности частотно-временной локализации сигнала необходимо обеспечить выявление локально-инвариантных ограничений на поведение системы, которая генерирует сигнал.

В целом, исследования существующих подходов к частотно-временному анализу временных рядов показали, что, несмотря на их хорошую теоретическую и математическую проработку, широкое практическое применение, проблема анализа временных рядов остаётся актуальной. Использование в качестве меры сходства в алгоритмах разложения исходных функций по базисным функциям операций интегральной свертки приводит к естественным искажениям спектров, появлению артефактов в случае наличия сингулярности в исходных функциях, а

также в силу влияния краевых условий для выбранных окон обработки сигнала. Кроме этого остаётся весьма сложным выбор исходных параметров алгоритмов спектрального анализа (выбор функции окна или типа вейвлета), особенно для анализа нестационарных сигналов. Таким образом, разработка новых подходов, которые с одной стороны будут достаточно просты в применении, а с другой стороны до некоторой степени будут учитывать недостатки существующих подходов остаётся актуальной.

## 1 Постановка задачи исследований

В работе [7] был предложен метод BFAS для решения задачи частотно-временного анализа использующий свойства функций поведения систем [10], представленных в виде распределения меры возможности. Для построения функций поведения использовался математический базис  $p$ -адического исчисления [11]. Проведённые исследования показали, что поведение системы, генерирующей сигнал, имеет локально-инвариантные участки, на которых спектр сигнала относительно стабилен. Для выявления этих участков был использован подход к идентификации метасистемы на основе анализа изменения показателя неопределенности для функции поведения системы [12]. Моменты изменения функции поведения позволяют определить координаты импульсной функции, которая моделирует исходный сигнал. При этом для периодических функций (например, гармонических) координаты импульсов подчиняются свойствам арифметических прогрессий. Было установлено, что импульсы исследуемого сигнала формируются при наличии в его окрестности баланса импульсов от гармонических функций, формирующих данный сигнал. В работе [7] был предложен подход к определению оценок текущих спектров сигнала на основе сформированных уравнений баланса. Для сглаживания оценок использовалась нечёткая фильтрация [13]. Использование уравнений баланса в окрестностях импульсов анализируемого сигнала позволило сформировать адаптивную временную локализацию для оценки текущих спектров, что дало возможность использовать предложенный метод для частотно-временного анализа нестационарных сигналов. Проведенный на основе предложенного метода спектральный анализ стационарных [7] и нестационарных [13] сигналов показал работоспособность метода и позволил сделать положительный вывод относительно его использования для анализа сигналов.

Однако для определения эффективности использования и выявления ограничений предложенного метода BFAS необходимо провести его сравнительный анализ с известными, широко используемыми методами частотно-временного

анализа в наиболее сложных условиях. Практика показала, что одним из сложных случаев является анализ нестационарных сигналов с низкой разрешающей способностью по частоте при малых выборках наблюдения сигнала. К таким случаям относится анализ нестационарных сигналов на инфразвуковых частотах, таких, как сейсмические сигналы, сигналы от внутренних органов человека, ряд сигналов от механизмов и машин и другие. Поэтому, целью исследования было проведение сравнительного анализа предлагаемого метода и метода кратковременного быстрого преобразования Фурье (STFT), как одного из наиболее широко применяемых на практике методов, для частотно-временного анализа указанных выше сигналов. Далее будут приведены характерные результаты исследования для одного из таких сигналов. Для достижения цели исследований решались две задачи:

1. Для исследуемого сигнала определялись оценки частотных спектров для выбранных методов и сравнивались на основе метода спектрального угла контрастности по отношению к истинному спектру [19].
2. Осуществлялось восстановление сигнала по полученным оценкам спектра, и сравнивались результаты с истинным сигналом по критерию корреляции [20].

## 2 Метод частотно-временного анализа сигналов на основе функций поведения и арифметических рядов

В работах [7, 13] был предложен подход к частотно-временному анализу сигналов на основе функций поведения и арифметических рядов. Ниже полученные результаты обобщаются и представляются в виде целостного метода BFAS частотно-временного анализа, который предполагает решение задачи в три этапа:

1. *Состояние сигнала представляется в виде распределения возможности на множестве коэффициентов канонической формы  $p$  — адического числа.*

Исходный дискретный сигнал представляется временным рядом. При этом состояние дискретного сигнала описывается в виде  $p$  — адического числа [1]:

$$b(t) = \sum_{l=0}^L (\alpha_l \cdot p^l),$$

где  $p > 1$  — натуральное простое число,  $\alpha_l \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $l \in 0, \dots, L$  — уровень иерархии

$p$ —адического числа,  $L$  — количество разрядов, необходимое для представления значения состояния временного ряда  $b(t) \in Z_{ts} \subseteq N$ ,  $Z_{ts}$  — множество возможных значений временного ряда. Тогда в текущий момент времени  $t \in W$  состояние ряда в канонической форме [14] будет иметь вид вектора  $b(t) = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha(l), \dots, \alpha L$ . Каждая координата вектора  $b(t)$  считается переменной  $v_i \in V_i$ , которая описывает состояние системы, задающей исходный сигнал. Указанные переменные принимают значения на множестве состояний  $V_i = v_i 1, \dots, v_i(L+1)$ , где  $v_{ij} = \alpha_{l+1}$ ,  $j = l+1$ ,  $l = \overline{0, L}$ . Тогда состояние сигнала по времени  $W = \{t\}$  может быть задано распределением меры возможности  $\mu_t(v_{i,j}) : W \times V_i \rightarrow [0, 1]$  в виде:

$$\mu_t(v_{ij}) = \alpha_{l+1}(t) \cdot \left( \max_{l=0, L} \alpha_l(t) \right)^{-1},$$

где  $\alpha_l(t)$  — значение  $l$ -го элемента канонической формы  $p$  — адического числа.

2. *Строится функция поведения и проводится идентификация метасистемы для определения импульсной функции, моделирующей сигнал.*

Полное состояние системы  $V$  может описываться набором выборочных переменных  $s_k(t) = v_i(\xi_k(t)) \in V_i \equiv S_k$ , где  $s_k(t)$  — состояние  $k$ -й выборочной переменной при параметре  $t \in W$ ,  $v_i(\xi_k(t))$  состояние переменной  $v_i \in V_i$  при значении параметра  $\xi_k(t) = t + \rho_k$ ,  $\rho_k \in Z$ . Тогда состоянию выборочной переменной  $s_k(t)$  будет соответствовать функция  $\mu_t(s_{k,j}) = \mu_{\xi_k(t)}(v_{i,j}) \in [0, 1]$ . Множество состояний системы будет  $C = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{|M|}$ , где  $|M|$  — мощность множества  $M$  всех выборочных переменных. Пусть возможность наблюдения состояния  $c \in C$  по переменной  $s_k(t)$  в момент времени  $t \in W$  будет  $\mu_t(s_k[c]) \in [0, 1]$ . Тогда возможность наблюдения состояния  $c \in C$  на интервале времени  $\Delta W \subseteq W$  будет задаваться функцией:

$$f_{\Delta W}(c) = \left\{ \sum_{t \in \Delta W} \min_{k=1, |M|} \{ \mu_t(s_k[c]) \} \right\} \cdot \left\{ \max_{e \in C} \sum_{t \in \Delta W} \min_{k=1, |M|} \{ \mu_t(s_k[e]) \} \right\}^{-1}.$$

Функция  $f_{\Delta W}(c) : C \rightarrow [0, 1]$  является функцией поведения системы [10] на интервале  $\Delta W \subseteq W$ . Изменение частотного спектра сигнала происходит при смене поведения системы. Системы с изменяющимся поведением называют метасистемами [10]. В них объединение локальных систем с поведением, заданных на подмножествах  $\Delta W_m \subseteq W$ ,  $m \in N_W$ , осуществляется на основе процедуры замены [15]  $q : W \rightarrow F$ , где  $F$  — множество всех локальных систем с поведением.

Для полностью упорядоченного параметрического множества  $W$  идентификация функции  $q$  ба-

зируется на системных свойствах изменения показателя порождающей нечёткости системы [12] функции поведения:

$$U(f_{\Delta}W(c)) = \sum_{j=1}^{|C|} (f_{\Delta}W(c_j) - f_{\Delta}W(c_{j+1})) \cdot \log_2 j,$$

где  $f_{\Delta}W(c)$  — упорядоченная по убыванию  $\forall j, f_{\Delta}W(c_j) \geq f_{\Delta}W(c_{j+1})$  функция поведения с фиктивным элементом  $f_{\Delta}W(c_{|C|+1}) = 0$ ,  $|C|$  — мощность множества  $C$ . При этом в точках смены поведения показатель  $U(f_{\Delta}W(c))$  резко возрастает и превышает заданный порог  $\Delta_u \in [0, 1]$ ,  $u = \overline{1, N_{\Delta}}$ . Для определения точек смены поведения мы используем алгоритм идентификации метасистем, приведённый в [16].

Для каждого выбранного порога  $\Delta_u$  задаётся характеристическая функция

$$r(u, t) = \begin{cases} 1, & t = \tau_n(u) \\ 0, & t \neq \tau_n(u), \end{cases}$$

для множества точек  $\tau_n(u) \in W$ ,  $n(u) = \overline{1, N_u}$  моментов смены поведения системы и формируется взвешенная функция вида:

$$g(t) = \sum_{\Delta_u \in \{\Delta\}} \Delta_u \cdot r(u, t).$$

Далее находится импульсная функция

$$r(t) = \begin{cases} 1, & t = \tau_n; \\ 0, & t \neq \tau_n, \end{cases}$$

где  $\tau_n \in W$ ,  $n = \overline{1, N}$  координаты локальных максимумов функции  $g(t)$ . Функция  $r(t)$  моделирует исходный сигнал. Эта функция используется для оценки спектра исследуемого сигнала.

*3. Находятся коэффициенты уравнений баланса на основе арифметических рядов и оценивается частотный спектр сигнала.*

Временные координаты  $\tau_n \in W$  импульсной функции  $r(t)$  подчиняются правилу числовой последовательности с переменным шагом  $d(j)$ :

$$\tau_n = \tau_1 + \sum_{j=2}^n d(j),$$

где  $\tau_n \in W$  —  $n$ -й член ряда, задающий временную координату  $n$ -го импульса,  $d(j)$  — переменный шаг ряда, определяющий интервалы стабильного поведения исследуемого сигнала. В работах [7, 13] было показано, что для периодических сигналов (например, гармонических) координаты импульсов соответствующих импульсных функций подчиняются правилам арифметических прогрессий. То есть координата  $m$ -го импульса  $k$ -й синусоиды определяется соотношением  $a_m^k = a_1^k + (m-1) \cdot d_k$ , где  $a_m^k \in W$ ,  $d_k$  — шаг арифметической прогрессии. Параметры

данной арифметической прогрессии четко определяют фазово-частотные характеристики синусоиды. В частности, период будет  $T = 2 \cdot d_k \cdot \Delta t$ ; круговая частота  $\omega = \pi \cdot (d_k \cdot \Delta t)^{-1}$ , а фаза  $\varphi = \pi/d_k \cdot (0.5 \cdot d_k - a_1^k)$ , где  $\Delta t$  — интервал дискретизации сигнала. Импульсные функции с координатами импульсов, удовлетворяющими соотношению арифметической прогрессии, будем называть импульсными синусами, и обозначать  $si_k(t)$ ,  $t \in W$  или  $si_k(t|a_1^k, d_k)$ .

Было установлено, что на появление импульса  $r(\tau_n)$  импульсной функции  $r(t)$  исследуемого сигнала в точке  $\tau_n \in W$  влияют импульсы функций  $si_k(t)$ , попадающие в окно  $LR_n \subseteq W$  (подобласть  $L \subseteq W$  слева и подобласть  $R \subseteq W$  справа от точки  $\tau_n$ ), которое может быть определено интервалом [13]:

$$LR_n = \left[ \tau_n - 0.25 \cdot (\tau_{n+1} - \tau_{n-1}); \right. \\ \left. \tau_n + 0.25 \cdot (\tau_{n+1} - \tau_{n-1}) \right] \subseteq W.$$

Функции импульсных синусов, которые могут определять исходный сигнал, образуют множество базисных функций  $\Phi = si_k(t)$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Для оценки влияния функций из множества  $\Phi$  на появление результирующих импульсов  $r(\tau_n)$  в каждом окне  $LR_n$  мы учитываем их степень влияния  $x_k(\tau_n) \in [0, 1]$ . В работе [7] было показано, что для формирования импульса в координате  $\tau_n$  в идеальном случае должно выполняться условие баланса:

$$\sum_{k=1}^K x_k(\tau_n) \cdot \Lambda_k(\tau_n) = 0,$$

где

$$\Lambda_k(\tau_n) = \beta_k(\tau_n) \cdot \tau_n - S_k(LR_n), \\ \beta_k(\tau_n) = \sum_{a_m^k \in LR_n} (-1)^{m-1} \in \{-1, 0, 1\},$$

а  $S_k(LR_n)$  — частичная сумма знакопеременного числового ряда, полученного из арифметической прогрессии для импульсного синуса  $si_k(t)$ , которая определяется как:

$$S_k(LR_n) = \sum_{a_m^k \in LR_n} (-1)^{m-1} \cdot a_m^k.$$

Уравнение баланса в точке  $\tau_n$  является однородным линейным уравнением с неизвестными коэффициентами  $x_k(\tau_n)$ , которые соответствуют нормированным к единице амплитудам синусоидальных функций, формирующих исследуемый сигнал. Величина  $\Lambda_k(\tau_n)$  есть невязка, обратно пропорциональная вкладу  $k$ -го импульсного синуса в результирующий импульс  $r(\tau_n)$ . Коэффициенты  $x_k(\tau_n) \in [0, 1]$  задают функцию  $\omega_n(k) : \Phi \rightarrow [0, 1]$ , где  $\omega_n(k) = x_k(\tau_n)$  в окне  $LR_n \subseteq W$ , которая является аналогом мгновенного спектра сигнала [17]. В работе [7] было показано, что коэффициенты  $x_k(\tau_n)$  для всех точек  $\tau_n$  могут быть получены при решении задачи

линейного программирования на основе симплекс метода [18]:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^K x_k(\tau_n) \cdot \Lambda_k(\tau_n) \rightarrow \min_{x_k(\tau_n)} \square, \\ \sum_{k=1}^K x_k(\tau_n) = 1, \forall k, x_k(\tau_n) \geq 0. \end{cases}$$

Для получения коэффициентов  $x_k(\tau_n)$  без решения оптимизационной задачи в работе [8] было предложено использование приближенных формул:

$$\begin{aligned} x_k(\tau_n) &= \\ &= \begin{cases} |\beta_k(\tau_n)| \cdot \left[1 - \frac{2 \cdot |\Lambda_k(\tau_n)|}{\varepsilon_R(n) + \varepsilon_L(n)}\right], & S_k(LR_n) \neq 0, \\ x_k(\tau_n) = \Lambda_k \cdot x(\tau_{n-1}), & S_k(LR_n) = 0, \Lambda_k \in [0, 1]. \end{cases} \\ \Lambda_k &= \begin{cases} 0, & |\tau_n| > \max_{j \in \{1, n-1\}} LR_j (a_m^k) + 0.5 \cdot d_k \\ 1, & |\tau_n| \leq \max_{j \in \{1, n-1\}} LR_j (a_m^k) + 0.5 \cdot d_k \\ [0, 45; 0.85] & \left[ \begin{array}{l} \tau_n \leq \max_{j \in \{1, n-1\}} LR_j (a_m^k) + 0.5 \cdot d_k \\ \nexists k', \{S_{k'}(LR_n) \neq 0\} \wedge \Lambda_{k'}(\tau_n) = 0 \end{array} \right] \end{cases} \end{aligned}$$

Снижение погрешностей при оценке спектра  $\hat{\omega}(k): \Phi \rightarrow [0, 1]$  на интервале  $\Delta W \subseteq W$  обеспечивается за счёт использования нечеткой фильтрации [13]:

$$\hat{\omega}_n(k) = \hat{\omega}_{n-1}(k) + \alpha \cdot \{[\omega_n(k) \wedge \varphi_n^R(k)] - \hat{\omega}_{n-1}(k)\},$$

где  $\wedge = \min$ ,  $\varphi_n^R(k)$  — фильтрующая функция на пространстве состояний в окрестности точки  $\tau_n$ , вид и параметры которой детально рассмотрены в приведённых выше работах,  $\alpha \in [0, 1]$  — коэффициент усиления фильтра. Функцию  $\hat{\omega}_n(k)$  используют для частотно-временного анализа и восстановления исследуемого сигнала. Восстановленный сигнал находится как сумма синусоидальных функций, соответствующих импульсным синусам из множества  $\Phi$  с амплитудами, умноженными на величину  $\hat{\omega}_n(k)$ .

### 3 Результаты сравнительного анализа методов частотно-временного анализа нестационарного сигнала инфразвуковой частоты с низкой разрешающей способностью

#### 3.1 Описание исследуемого сигнала

Критерии сравнения результатов. Ниже приведены результаты исследования нестационарного дискретного сигнала  $\varphi_n$  с интервалом дискретизации  $\Delta t = 0.1$  с. Время наблюдения сигнала  $W = 10$  с. Исходный сигнал был сформирован сложением

дискретных синусоидальных сигналов  $f_n^i, i = \overline{1, 4}$  с частотами 0.159 Гц, 0.334 Гц, 0.446 Гц, 0.637 Гц и разными амплитудами на интервалах времени  $W_1 = [0; 5]$  и  $W_2 = [5; 10]$ . Сигнал с такими характеристиками является характерным для сигналов получаемых при медицинских исследованиях внутренних органов человека. Значения амплитудно-частотных характеристик для сигналов  $f_n^i$  на интервалах  $W_1$  и  $W_2$  приведены на рис. 1. Частотная структура сигнала изменяется резко в середине интервала наблюдения.

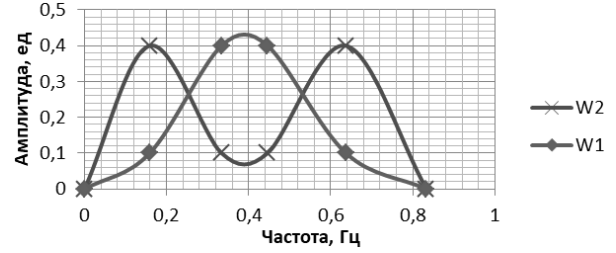


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики сигналов  $f_n^i$ , формирующих истинный сигнал

На рис. 2 приведены графики исследуемого сигнала и его составляющих  $f_n^i, i = \overline{1, 4}$ .

Для сравнения качества оценки спектра сигнала использовался подход спектрального угла контрастности [19], который рассчитывается по формуле:

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{\sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N y_i^2}} \right),$$

где  $\theta$  — спектральный угол контрастности (если  $\theta = 0^\circ$ , то спектры совпадают, а если  $\theta = 90^\circ$ , то спектры полностью не совпадают),  $\cos^{-1}$  — обратная функция,  $x_i, y_i, i = \overline{1, N}$  — амплитуды спектров сравниваемых сигналов в  $i$ -м частотном фильтре анализатора спектра параллельного действия с прямоугольной АЧХ и полосой пропускания равной  $f_\Phi \cong \Delta f_p$  [21], где  $\Delta f_p$  — разрешающая способность по частоте для сигнала. Для исследования совпадения спектров мы выбрали  $f_\Phi = 0.2$ . Для сравнения восстановленных по оценённым спектрам сигналов использовался коэффициент корреляции [20].

#### 3.2 Сравнение частотно-временного анализа нестационарного сигнала на основе кратковременного быстрого преобразования Фурье и на основе использования функций поведения и арифметических рядов.

В качестве исходных данных для исследования метода на основе функций поведения и арифметических рядов были выбраны следующие параметры:

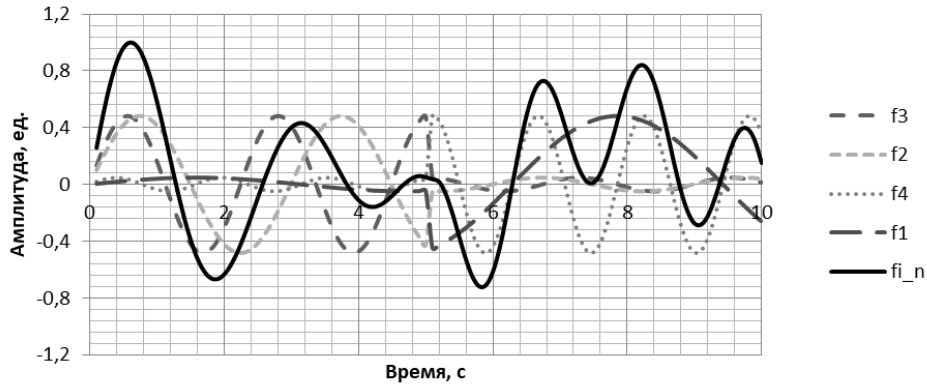
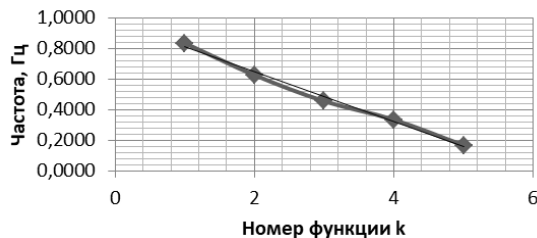


Рис. 2. Временные ряды исследуемого сигнала и его составляющих

Табл. 1 Характеристики множества базисных функций

$k$	$a_1^k$	$d_k$	Период, с	Фаза, град	Частота, Гц	Круговая частота
1	6	6	1.2	-90.00	0.8333	5.2360
2	6	8	1.6	-45.00	0.6250	3.9270
3	6	11	2.2	-8.18	0.4545	2.8560
4	6	15	3	18.00	0.3333	2.0944
5	6	30	6	54.00	0.1667	1.0472

1. Для метода STFT в качестве окна использовалось прямоугольное окно Дирихле [22]. Разрешающая способность по частоте для быстрого преобразования Фурье напрямую зависит от размера окна  $N_W$ . Увеличение окна при STFT повышает разрешающую способность по частоте, но снижает возможность определения текущего спектра для частотно-временного анализа нестационарного сигнала. Исследования показали, что наиболее рациональным для исследуемого сигнала является выбор размера окна  $N_W = 32$ . В этом случае интервал наблюдения сигнала включает три окна.
2. Множество базисных функций  $\varphi$  описывались импульсными синусами  $si_k(t|a_1^k, d_k)$ ,  $k = \overline{1, 5}$  с характеристиками, представленными в табл. 1, что обеспечивает относительную линейность распределения частот рис. 3.

Рис. 3. Частоты базисных функций из множества  $\varphi$ 

3. Для представления дискретного сигнала использовались характеристики восьмибитного аналого-цифрового преобразователя. В нём

используются  $p$ -адические числа с  $p = 2$ . Мощность множества значений сигнала составляет  $Card(Z_{ts}) = 128$ , а количество блоков канала наблюдения  $L = 7$ .

4. Для определения множества выборочных переменных и построения функции поведения системы использовалась маска с параметром сдвига  $\rho = 0$  для всех переменных системы  $v_{i,\xi_k(t)} \in V_i$ . В алгоритме идентификации метасистемы [16] множество значений порогов отсека определялось на основе зависимости  $\Delta_u = \Delta_1 + (u - 1) \cdot \delta$ , где  $u = \overline{1, 11}$ ,  $\Delta_1 = 0.175$ ,  $\delta = 0.03$ .
5. В уравнениях баланса использовалось симметричное окно  $LR_n$  с усреднённой величиной отклонения [13]. Формула для расчёта параметров окна представлена выше.
6. Коэффициенты  $x_k(\tau_n)$  для  $k$ -й функции импульсного синуса из множества базисных функций  $\Phi$  мы рассчитывали на основе приближенного подхода.

На основании приведенных исходных данных для исследуемого сигнала была получена система данных в виде матрицы  $V \times W$  размерности  $7 \times 100$ . В табл. 2 приведен фрагмент данной матрицы на первой секунде.

Табл. 2 Фрагмент матрицы данных для исследуемого временного ряда

$t$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$v_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$v_2$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$v_3$	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
$v_4$	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
$v_5$	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
$v_6$	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
$v_7$	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1

В результате использования алгоритма идентификации метасистемы [16] для различных  $\Delta_u$  была получена полная двумерная импульсная функция  $r(u, t)$  и соответствующая ей функция  $g(t)$ , на базе которой была определена импульсная функция исследуемого сигнала  $r(\tau_n)$  (рис. 4).

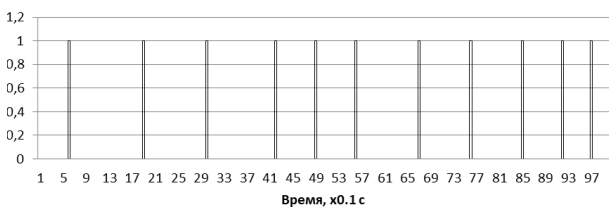


Рис. 4. Импульсная функция исследуемого сигнала  $r(\tau_n)$

На основании полученной функции  $r(\tau_n)$  для заданного множества базисных функций  $\Phi = \{si_k(t)\}$ ,  $k = \overline{1, 5}$  рассчитывались коэффициенты  $x_k(\tau_n)$  уравнения баланса для всех координат импульсов  $\tau_n, n = \overline{1, N}$ . В табл. 3 и на рис. 5 представлены оценки коэффициентов  $x_k(\tau_n)$  (нормированных к единице) полученные после фильтрации с коэффициентом усиления  $\alpha = 0.55$ .

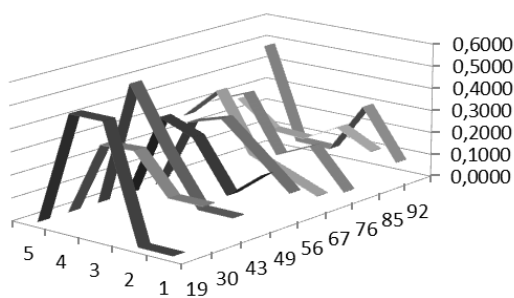
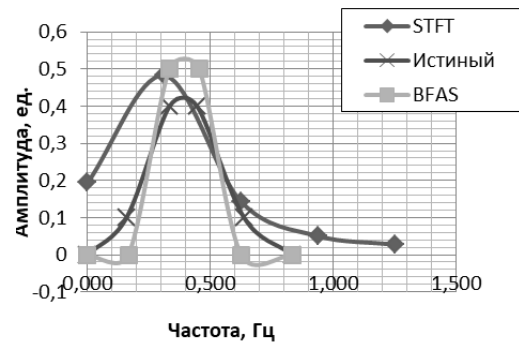


Рис. 5. Динамика изменения коэффициентов  $x_k(\tau_n)$  спектра сигнала

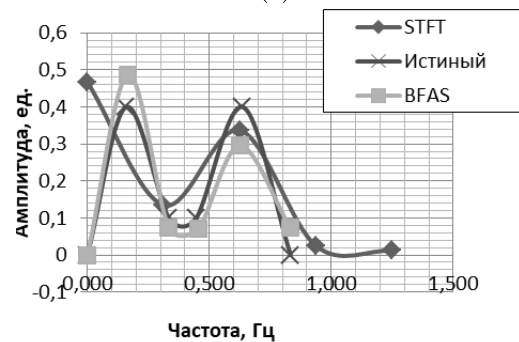
Полученные результаты были сравнены с истинным спектром сигнала и с оценкой спектра по STFT с размером окна  $N_W = 32$ . На рис. 6 приведены спектры для моментов времени  $t_1 = 1.9$  с (рис. 6 а) и  $t_2 = 9.2$  с (рис. 6 б)

Для количественной оценки совпадения спектров использовался спектральный угол контрастности. На рис. 7 представлены спектры сигналов для моментов времени  $t_1 = 1.9$  с (рис. 7 а) и  $t_2 =$

9.2 с (рис. 7 б) на множестве частотных фильтров анализатора спектра.

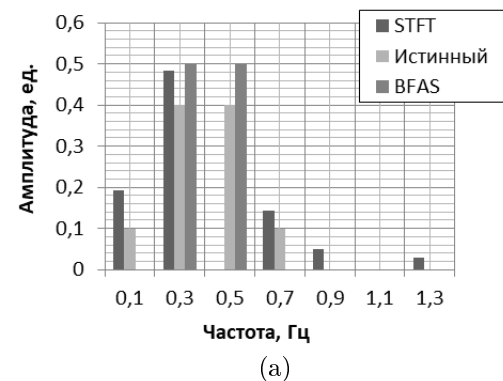


(а)

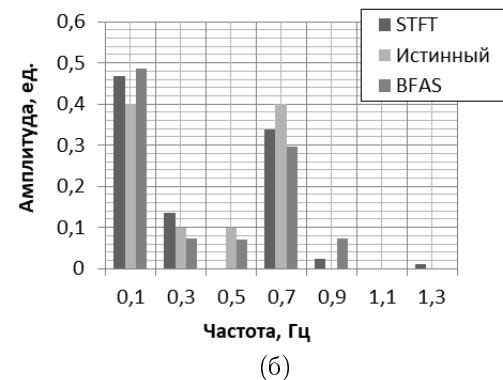


(б)

Рис. 6. Сравнение с истинным спектром сигнала оценок спектров, полученных при STFT и предложенном методе BFAS



(а)



(б)

Рис. 7. Спектры сигналов на множестве частотных фильтров анализатора спектра (частота указана для центров полос пропускания фильтров)

Табл. 3 Оценки коэффициентов  $x_k(\tau_n)$  спектра сигнала, полученные на основе приближённых формул

k	$\tau_n \times 0.1$ с								
	19	30	43	49	56	67	76	85	92
1	0.0000	0.1673	0.0753	0.2172	0.0977	0.0440	0.0198	0.1621	0.0730
2	0.0000	0.1673	0.0753	0.0950	0.2300	0.1035	0.1908	0.2391	0.2953
3	0.5000	0.3366	0.2931	0.3152	0.3595	0.1618	0.1209	0.1566	0.0704
4	0.5000	0.3288	0.5563	0.3726	0.3128	0.4157	0.3659	0.1647	0.0741
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2750	0.3026	0.2775	0.4872

На рис. 8 показаны спектральные углы контрастности для приведенных спектров.

Из расчётов видно, что оценка спектра по методу BFAS в целом оказывается более точной, чем оценки спектров по методу STFT (на начальном этапе  $\theta_{BFAS} = 14.03^\circ$ ,  $\theta_{STFT} = 49.98^\circ$ , на конечном этапе  $\theta_{BFAS} = 15.72^\circ$ ,  $\theta_{STFT} = 18.85^\circ$ ). В целом исследование показали, что оценка спектра по методу BFAS на всём интервале наблюдения сигнала удовлетворяет условию  $\cos(\theta_{BFAS}) \geq 0.9$ , что говорит о хорошей точности оценки спектра.

Для оценки качества полученных спектров на всем интервале наблюдения был восстановлен сигнал на основе спектров, полученных по методу STFT и BFAS, и проведено сравнение восстановленных сигналов с истинным сигналом по критерию коэффициента корреляции [20]. Восстановление сигнала осуществлялось для каждого окна наблюдения, определённого для соответствующего метода, по текущим оценкам спектра в этом окне. На рис. 9 представлены восстановленные по оценочным спектрам сигналы для методов STFT и BFAS и истинный сигнал.

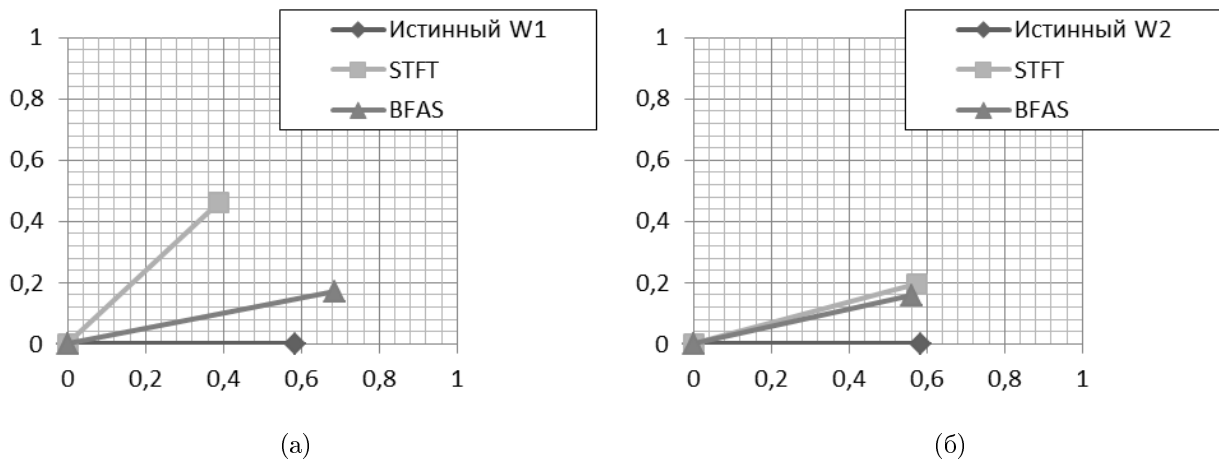


Рис. 8. Спектральные углы контрастности для спектров, полученных на основе методов STFT и BFAS по отношению к истинному спектру рис. 6 а при  $t_1 = 1.9$  с, и рис. 6 б при  $t_2 = 9.2$  с

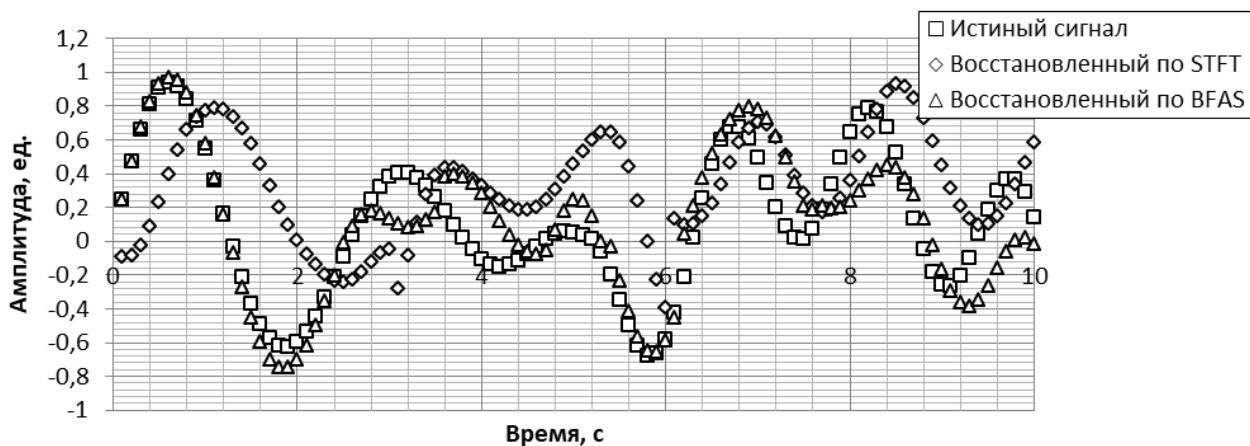


Рис. 9. Истинный сигнал и восстановленные по оценочным спектрам сигналы



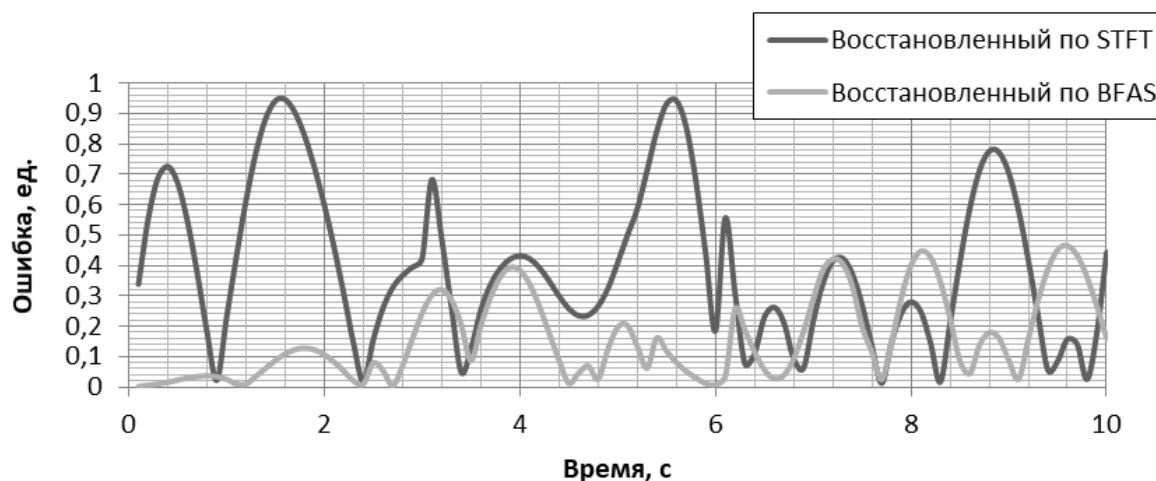


Рис. 10. Ошибка восстановления сигнала

Коэффициент корреляции истинного сигнала и сигнала, восстановленного по методу BFAS, составляет 0.872, что соответствует высокому уровню корреляции. Эта оценка существенно превосходит оценку корреляции для сигнала, восстановленного по методу STFT (коэффициент корреляции 0.314). Средняя ошибка по расстоянию Хемминга для метода BFAS составляет около 0.15, для метода STFT — около 0.4. На рис. 10 показаны абсолютные ошибки восстановления сигнала.

Из графика видно, что при использовании метода BFAS ошибки восстановления нестационарного сигнала существенно ниже, чем при использовании метода STFT.

## Выводы

Были выполнены исследования, разработанного метода частотно-временного анализа на основе использования функций поведения и арифметических рядов (метод BFAS) на примерах нестационарных сигналов и проведён сравнительный анализ данного метода с методами оконного преобразования Фурье (в частности с методом STFT). В статье подробно разобраны результаты исследования для дискретного сигнала инфразвуковой частоты с низкой разрешающей способностью. Такие сигналы являются наиболее сложными для частотно-временного анализа. Для количественного сравнения результатов оценки спектров использовался показатель спектрального угла контрастности, а для сравнения восстановленных по спектрам сигналов — коэффициент корреляции. Исследования показали, что предложенный метод BFAS является эффективным для частотно-временного анализа рассматриваемых сигналов и во многих случаях превосходит по точности подход на основе STFT. В частности оценка спектра по методу BFAS на различных интервалах измерения сигнала по косинусу спе-

ктрального угла контрастности на 5–25 % точнее, чем по методу STFT. Восстановленный сигнал по полученным спектрам на всем интервале наблюдения сигнала для метода BFAS по коэффициенту корреляции на 20 - 27 % точнее, чем при использовании метода STFT. Таким образом, можно сделать вывод, что метод BFAS для частотно-временного анализа нестационарных сигналов даже в условиях низкой разрешающей способности по частоте является эффективным. Он позволяет получить оценки текущих спектров и обеспечить восстановление на их основе сигнала более точно, чем при использовании метода STFT. Проведенные исследования являются одним из первых шагов в анализе эффективности метода BFAS. В дальнейшем необходимо продолжение исследований на конкретных сигналах различных систем, сравнение с другими подходами к частотно-временному анализу сигналов, в частности с вейвлет анализом.

## References

- [1] Hippenstiel R.D. (2017) Estimation. *Detection Theory*, pp. 217-242. DOI: 10.1201/9781420042047-8
- [2] Boashash B. (2016) *Time-Frequency Signal Analysis and Processing*, Academic Press, 1056 p.. DOI: 10.1016/b978-0-12-398499-9.09988-x
- [3] Vetterli M., Kovačević J. and Goyal V.K. (2014) *Foundations of Signal Processing*. DOI: 10.1017/cbo9781139839099
- [4] Ashrafi A. (2017) Walsh–Hadamard Transforms: A Review. *Advances in Imaging and Electron Physics*, pp. 1-55. DOI: 10.1016/bs.aiep.2017.05.002
- [5] Percival D.B. and Walden A.T. (2006) Orthonormal Transforms of Time Series. *Wavelet Methods for Time Series Analysis*, pp. 41-55. DOI: 10.1017/cbo9780511841040.004
- [6] Holighaus N., Koliander G., Prusa Z. and Abreu L.D. (2019) Characterization of Analytic Wavelet Transforms and a New Phaseless Reconstruction Algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 67, Iss. 15, pp. 3894-3908. DOI: 10.1109/tsp.2019.2920611

- [7] Bocharnikov V.P. (2018) Chastotno-chasovyi analiz syhnaliv na osnovi funktsii povedinky i arifmetychnykh riadiv. Chastyna 1. Analiz pidkhodiv ta opys metodu [Frequency-time analysis of signals based on behavioral functions and arithmetic rows. Part 1. Analysis of approaches and description of the method]. *Proceedings of the center of military and strategic studies NUDU named after I. Chernyakhovsky*, no. 3 (64), pp. 98-115.
- [8] Huang N.E. (2005) *Hilbert-Huang Transform and Its Applications*, World Scientific Publishing Company Co. Pte. Ltd., 311 p.
- [9] Wu Z. and Huang N.E. (2009) Ensemble empirical mode decomposition: A noise-assisted data analysis method. *Advances in Adaptive Data Analysis*, Vol. 01, Iss. 01, pp. 1-41. DOI: 10.1142/s1793536909000047
- [10] Klir G. (1985) *Architecture of Systems Problem Solving*. New York, Plenum Press, 539 p.
- [11] Schikhof W.H. (1985) *Ultrametric Calculus*. DOI: 10.1017/cbo9780511623844
- [12] Higashi M. and Klir G.J. (1982) Measures of uncertainty and information based on possibility distributions. *International Journal of General Systems*, Vol. 9, Iss. 1, pp. 43-58. DOI: 10.1080/03081078208960799
- [13] Bocharnikov V. (2019) The Problem Solving Algorithm Time-Frequency Signals Analysis Based on Behavior Functions and Arithmetic Series. *Global Journal of Researches in Engineering: F Electrical and Electronics Engineering*, Vol. 19, Issue 1 (Ver. 1.0), pp. 25-39.
- [14] Katok S. (2007) *p*-adic Analysis Compared with Real. *The Student Mathematical Library*. DOI: 10.1090/stml/037
- [15] Uyttenhove, H.J. (1978) *Computer-Aided Systems Modelling: An Assemblage of Methodological Tools for Systems Problem Solving*. Ph.D. Dissertation. Binghamton, N.Y., School of Advanced Technology, SUNY-Binghamton.
- [16] Cornstock F.L. and Uyttenbove H. J. (1979) Computer-Implemented Grading of Flight Simulator Students. *Journal of Aircraft*, Vol. 16, Iss. 11, pp. 780-786. DOI: 10.2514/3.58604
- [17] Shumway R.H. and Stoffer D.S. (2017) Time Series Analysis and Its Applications. *Springer Texts in Statistics*. DOI: 10.1007/978-3-319-52452-8
- [18] Luenberger D.G. and Ye Y. (2016) Primal Methods. *Linear and Nonlinear Programming*, pp. 357-396. DOI: 10.1007/978-3-319-18842-3\_12
- [19] Kruse F., Lefkoff A., Boardman J., Heidebrecht K., Shapiro A., Barloon P. and Goetz A. (1993) The spectral image processing system (SIPS)—interactive visualization and analysis of imaging spectrometer data. *Remote Sensing of Environment*, Vol. 44, Iss. 2-3, pp. 145-163. DOI: 10.1016/0034-4257(93)90013-n
- [20] Sharma A. K. (2005) *Text Book of Correlations and Regression*. DPH mathematics series. New Delhi, Discovery Publishing House, 212 p.
- [21] Nefyodov V.I., Sigov A.S., Bitukov V.K., eds. (2006) *Metrologiya i radioizmereniya* [Metrology and radio measurements]. Moscow, Higher Sc., 526 p.
- [22] Khanna V.K. *Digital Signal Processing*. Ram Nagar, New Delhi, S. Chand, 2009, 319p.

## Дослідження методу частотно-часового аналізу сигналів на основі функцій поведінки і арифметичних рядів

Бочарніков В. П., Свешніков С. В.

**Вступ.** У статті розглянуті результати дослідження методу частотно-часового аналізу сигналів на основі використання функцій поведінки і арифметичних рядів (метод BFAS, Behavior Function and Arithmetic Series). Наведено результати порівняння ефективності застосування методу BFAS і методу короткочасного швидкого перетворення Фур'є (STFT) на прикладі нестационарного сигналу в діапазоні інфразвукових частот з низькою роздільною здатністю по частоті.

**Метод BFAS.** Для вирішення завдання аналізу нестационарних сигналів ми запропонували використовувати властивості функцій поведінки систем, які представлені у вигляді розподілу міри можливості. Для побудови функції поведінки нами використаний математичний базис  $p$ -адичного числення. Поведінка системи генеруючої сигнал, має локально-інваріантні ділянки, на яких спектр сигналу відносно стабільний. Для виявлення цих ділянок ми використовували підхід до ідентифікації метасистем на основі аналізу зміни показника невизначеності для функції поведінки системи. Моменти зміни функції поведінки визначають координати імпульсної функції, яка моделює вихідний сигнал. Координати імпульсів описуються арифметичними рядами, які використовуються для оцінки частотного спектра вихідного сигналу. Ми встановили, що імпульси досліджуваного сигналу формуються при наявності в його околиці балансу імпульсів від гармонійних функцій, які формують даний сигнал. Ми запропонували підхід до визначення оцінок поточних спектрів сигналу на основі сформованих рівнянь балансу. Використання рівнянь балансу в околицях імпульсів аналізованого сигналу дозволяє формувати адаптивну часову локалізацію для оцінки поточних спектрів. Це дало можливість використовувати запропонований підхід для частотно-часового аналізу нестационарних сигналів. Для згладжування оцінок ми використовували нечітку фільтрацію.

**Результати дослідження.** Ми провели дослідження застосування розробленого методу BFAS для аналізу нестационарних сигналів і порівняли їх з результатами застосування методу STFT. У статті ми детально розібрали результати дослідження для дискретного сигналу інфразвукової частоти з низькою роздільною здатністю. Такі сигнали є найбільш складними для частотно-часового аналізу. Для кількісного порівняння результатів оцінок спектрів ми використовували показник спектрального кута контрастності, а для порівняння відновлених за спектрами сигналів - коефіцієнт кореляції. Дослідження методу BFAS показали, що точність оцінки поточного спектра по косинусу спектрального кута контрастності складає не нижче 0.9, а коефіцієнт кореляції відновленого та істинного сигналів не нижче 0.87.

**Висновки.** Дослідження показали, що запропонований метод BFAS є ефективним для частотно-часового аналізу нестационарних сигналів і в багатьох випадках перевершує за точністю використання методу STFT.

*Ключові слова:* часовий ряд; частотно-часовий аналіз; метод STFT;  $p$ -адичні числа; функції поведінки систем; міра можливості; нечіткі множини; системний аналіз; ідентифікація; арифметичні ряди; частотні спектри

## Research of the method the time-frequency signal analysis based on the behavior functions and arithmetic series

*Bocharnikov V. P., Sveshnikov S. V.*

**Introduction.** The study results of the method of time-frequency signal analysis are shown in the article. The study of the method was carried out based on the behavior functions and arithmetic series (BFAS method). Also, the article presents the comparison results of the BFAS method and the short-term Fourier transform method (STFT). The non-stationary signal in the infrasonic frequency range with low frequency resolution was used for comparison.

**BFAS method.** We've proposed to use the properties of the systems behavior functions, which are represented as the distribution of the possibility measure to solve the problem of non-stationary signals analyzing. We've used the mathematical basis of the  $p$ -adic calculus to construct the behavior function. The behavior of a system that generates a signal has locally invariant areas in which the signal spectrum is relatively stable. To identify these areas, we've used a method for identifying the metasytem. It is based on the changes analysis in the uncertainty index of system behavior function. The change moments in the behavior function are determine the coordinates of the impulse function that models the original signal. The coordinates of the pulses are described by arithmetic series, which are used

to estimate the frequency spectrum of the original signal. The pulses of the signal under study are formed when there is a balance of pulses in signal vicinity. The balance is caused by the harmonic functions that form this signal. Based on the formed balance equations, we have proposed an approach to determining the estimates of the current signal spectra. The use of balance equations in the vicinity of the pulses of the analyzed signal allows to form adaptive temporal localization that allows to estimate current spectra. This made it possible to use the proposed approach for time-frequency analysis of non-stationary signals. To smooth the estimates, we've used fuzzy filtering.

**The results of the study.** We have conducted a studies of the BFAS method usage for the analysis of non-stationary signals and compared the obtained results with the results of using the STFT method. In the article, we analyzed in detail the results of a discrete low-resolution infrasonic signal study. Such signals are the most difficult for time-frequency analysis. We've used the spectral contrast angle to quantitatively compare the results of spectra estimation and to compare reconstructed signals we've used the correlation coefficient. Studies of the BFAS method showed that the estimation accuracy of the current spectrum using the cosine of the contrast spectral angle is not lower than 0.9, and the correlation coefficient of the reconstructed and true signals is not lower than 0.87.

**Conclusions.** Studies have shown that the BFAS method is effective for time-frequency analysis of non-stationary signals and in many cases exceeds in accuracy the use of the STFT method.

*Key words:* time series; time-frequency analysis; method STFT;  $p$ -adic numbers; system behavior functions; measure of possibility; fuzzy set; system analysis; identification; arithmetic series; frequency spectra