

РЕЗУЛЬТАТИ ОЦІНКИ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ТРЬОМА МЕТОДАМИ

*Шановалов Ю.І., к.т.н. доцент; Смаль Д.Р.
Національний університет
«Львівська політехніка», м. Львів, Україна*

Вступ

Задача оцінки стійкості лінійних параметричних систем є і актуальною, і складною задачею одночасно. Актуальність визначається, з одного боку, потребами проектування параметричних радіоелектронних пристроїв, зокрема, параметричних підсилювачів, з іншого, – необхідністю синтезу, наприклад, робастно стійких систем керування лінійними об'єктами. У обох випадках такі задачі є достатньо складними, оскільки об'єкти проектування та синтезу описуються системами лінійних диференціальних рівнянь з періодично змінними у часі коефіцієнтами.

У роботі наведені результати оцінки стійкості трьома методами: розробленим нами частотним символьним методом [1] (ЧСМ), методом повільних амплітуд (МПА) [2] та методом, оснований на другому методі Ляпунова [3] (МДМЛ). Вибір досліджуваних рівнянь продиктовано наявністю результатів оцінки їх стійкості у літературі за МПА та МДМЛ, а за ЧСМ їх найлегше було повторити, оскільки останній реалізовано у пакеті програм аналізу лінійних параметричних кіл SAPC [4] з простим інтерфейсом.

Короткий опис ЧСМ

Частотний символьний метод полягає у визначенні коренів знаменника $\Delta(s)$ нормальної передавальної функції $G(s, \xi)$ [1] інерційної частини лінійного параметричного кола (s - комплексна змінна, ξ - момент подачі на коло дельта-імпульсу), яка визначається з диференціального рівняння, побудованого за диференціальним рівнянням, що описує систему у часовій області, згідно відомих правил [5]. Розташування коренів у лівій півплощині комплексної площини $\rho j\omega$ свідчить про асимптотичну стійкість такого кола. Результати обчислювальних експериментів за частотним символьним методом наведені у роботі [1].

Результати

1. Оцінка стійкості рівняння Мат'є. Рівняння описує коливання у параметричному послідовному коливальному контурі з елементами R , L , $C(t)$ з гармонічним накачуванням $1/C(t) \approx 1/C_0(1 + m \cdot \cos(\Omega t))$ і має вигляд:

$$q'' + 2 \cdot \delta \cdot q' + \omega_0^2(1 + m \cdot \cos(\Omega \cdot t)) = 0 \quad (1)$$

де q - залежна змінна (заряд ємності $C(t)$), $\delta = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = 1/L \cdot C_0$, t - змінна на час, Ω - частота накачування, m - глибина модуляції. Нехай $\omega_0^2 = 1, \delta = 0,025$.

Метод повільних амплітуд. При дотриманні умов $m < 1$, $\delta < \omega_0$, $\omega = \Omega/2$ зона нестійкості рівняння Мат'є визначається виразами [2]:

$$\frac{m \frac{\Omega}{2}}{4} > \sqrt{\delta^2 + \Delta^2}, \text{ або } m > \sqrt{\frac{(4 \cdot \delta)^2}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2} + \frac{(4 \cdot \Delta)^2}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2}}, \quad (2)$$

$$\text{або } m > m_{cr} \equiv \frac{4\delta}{\Omega} \text{ при } \frac{2\omega}{\Omega} = 1 \quad (3)$$

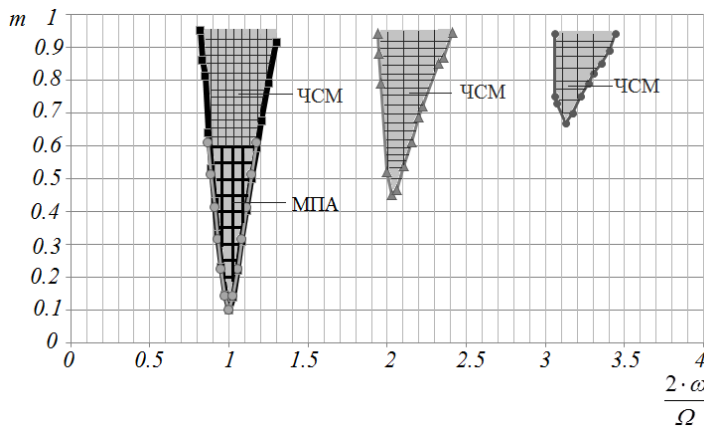


Рис.1. Зони нестійкості рівняння Мат'є:
ЧСМ – зони 1, 2 і 3; МПА – зона 1

де m_{cr} - межа зони нестійкості у точці $\frac{2\omega}{\Omega} = 1$ (див. рис.1), $\Delta = \omega_0 - \omega$.

Значення m , при яких виконуються умови (2) та (3), показані на рис.1 заштрихованою зоною, а у стовпчику 3 табл.1 наведені значення меж цієї зони.

Частотний символічний метод. З рівняння (1) витікає наступне рівняння відносно нормальної передавальної функції $G(s, \xi)$ [1,5] інерційної частини коливального контуру у частотній області:

$$\begin{aligned} & (\omega + \omega \cdot m \cdot \cos(\Omega \cdot \xi) + 2 \cdot \delta \cdot s + s^2) \cdot G(s, \xi) + \\ & + (-2 \cdot \delta - 2 \cdot s) \cdot G'(s, \xi) + 1 \cdot G''(s, \xi) = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Розв'язок рівняння (4) при апроксимації функції $G(s, \xi)$ комплексним рядом Фур'є з однією гармонічною складовою ($k = 1$) буде:

$$G(s, \xi) = \frac{g_{-1}(s)}{\Delta(s)} \exp(-j\Omega\xi) + \frac{g_0(s)}{\Delta(s)} + \frac{g_{+1}(s)}{\Delta(s)} \exp(j\Omega\xi), \quad (5)$$

де $\Delta(s)$ при символічних значеннях s , m та Ω має вигляд степеневого полінома від змінної s 6-го степеня:

$$\Delta(s) = \Delta(s, m, \Omega) = 799/400 \cdot \Omega^2 - 1/2 \cdot m^2 \cdot \Omega^2 - \Omega^4 + 1/2 \cdot m^2 - 1 - 3/20 \cdot s - 1/8000 \cdot \Omega^2 \cdot s + 1/40 \cdot m^2 \cdot s - 1/20 \cdot \Omega^4 \cdot s - 3/400 \cdot \Omega^2 \cdot s^2 - 1203/400 \cdot s^2 + 1/2 \cdot m^2 \cdot s^2 - \Omega^4 \cdot s^2 - 1/5 \cdot \Omega^2 \cdot s^3 - 2401/8000 \cdot s^3 - 2 \cdot s^4 \cdot \Omega^2 - 1203/400 \cdot s^4 - 3/20 \cdot s^5 - s^6. \quad (6)$$

Корені полінома (6) визначають критичні значення параметра m , що формують межу зон нестійкості. Зони нестійкості, визначені за ЧСМ, показані на рис. 1, а у стовпчиках 2, 5, 8 табл.1 наведені значення межі цих зон.

Таблиця 1

$\frac{2\omega}{\Omega}$	Значення m для межі зони 1		$\frac{2\omega}{\Omega}$	Значення m для межі зони 2		$\frac{2\omega}{\Omega}$	Значення m для межі зони 3	
	ЧСМ	МПА		ЧСМ	МПА		ЧСМ	МПА
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,82	0,95	-	1,942	0,94	дані відсутні	3,06	0,94	дані відсутні
0,833	0,86	-	1,95	0,88		3,06	0,75	
0,851	0,81	-	1,961	0,79		3,07	0,73	
0,87	0,64	0,608	2	0,52		3,125	0,67	
0,889	0,53	0,51	2,03	0,45		3,17	0,7	
0,909	0,43	0,412	2,06	0,465		3,22	0,75	
0,93	0,329	0,316	2,105	0,54		3,27	0,79	
0,952	0,23	0,224	2,151	0,61		3,3	0,82	
0,976	0,145	0,141	2,2	0,687	3,35	0,85	дані відсутні	
1	0,1	0,1	2,222	0,72	3,4	0,89		
1,026	0,14	0,141	2,326	0,85	3,44	0,94		
1,053	0,22	0,224	2,353	0,87	-	-		
1,081	0,31	0,316	2,41	0,945	-	-		
1,111	0,403	0,412	-	-	-	-		
1,143	0,499	0,51	-	-	-	-		
1,176	0,594	0,608	-	-	-	-		
1,205	0,675	-	-	-	-	-		
1,25	0,79	-	-	-	-	-		
1,299	0,915	-	-	-	-	-		

2. Оцінка стійкості параметричного паралельного коливального контуру. Схема контуру і параметри його елементів наведені на рис.2.

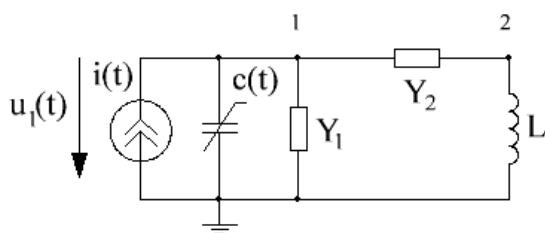


Рис.2. Паралельний параметричний контур

$$c(t) = c_0 \cdot (1 + m \cdot \cos(\Omega \cdot t)); c_0 = 1\Phi; \Omega = 20 \text{ рад/с}; L = 0.1 \text{ Гн}; Y_1 = 0.1 \text{ См}; Y_2 = 10 \text{ См}; i(t) = A_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi); A_m = 1 \text{ А}; \omega = 10 \text{ рад/с}; \phi = \pi/4.$$

Метод, оснований на другому методі Ляпунова. У роботі [6] виведено критерій асимптотичної стійкості контуру з рис.2:

$$1 + 2 \cdot Y_1 \cdot \frac{1}{Y_2} > \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{r^2} \right), \quad (7)$$

де $r = \sqrt{\frac{L}{c_0}}$ - нормуючий опір, $\rho = \sqrt{L/c(t)}$ - характеристичний опір контуру, $c(t) = c_0 \cdot (1 + m \cdot \cos(\Omega \cdot t))$. На основі виразу (7) за МДМЛ визначимо критичні значення m_{cr} параметра m , які формують границі зони нестійкості заданого контуру.

Можемо показати, що при $m \ll 1$ згідно алгоритму з [3] критерій (7) визначає зону нестійкості контуру:

$$1 + 2 \cdot Y_1 \cdot \frac{1}{Y_2} < 1 + m, \quad (8)$$

яка при обраних параметрах елементів контуру (рис.2) приймає вигляд

$$m > 0,02 \quad (9)$$

Значення m , при яких виконується умови (9), показана на рис.3 заштрихованою зоною.

Частотний символний метод. Коло з рис. 3 відносно вхідного струму $i(t)$ та вихідної напруги $u_1(t)$ описується диференціальним рівнянням:

$$\begin{aligned} & (-Y_2 \cdot (c'(t) + Y_1 + Y_2 + Y_2 \cdot L \cdot c''(t)) / L) \cdot u_1(t) + (-y_2 \cdot (c(t) / L + (2Y_2 \cdot L \cdot c'(t)) / L \\ & + (Y_2 \cdot L \cdot Y_1) / L)) \cdot u_1'(t) + (-Y_2^2 \cdot c(t)) \cdot u_1''(t) = i(t) \cdot (-1 / L \cdot Y_2) + i'(t) \cdot (-Y_2^2) \end{aligned} \quad (10)$$

З рівняння (10) витікає наступне рівняння відносно нормальної передавальної функції $G(s, \xi)$ [1,5] інерційної частини коливального контуру у частотній області:

$$\begin{aligned} & (Y_1 + Y_2 + (c(\xi) + Y_2 Y_1 \cdot L) s + Y_2 \cdot L \cdot c(\xi) s^2) \cdot G(s, \xi) + (-c(\xi) - Y_2 Y_1 \cdot L - \\ & - 2Y_2 \cdot L \cdot c(\xi) s) \cdot G'(s, \xi) + (Y_2 \cdot L \cdot c(\xi)) \cdot G''(s, \xi) = 1 \end{aligned} \quad (11)$$

Розв'язок рівняння (11) при апроксимації функції $G(s, \xi)$ комплексним рядом Фур'є з однією гармонічною складовою ($k = 1$) буде:

$$G(s, \xi) = \frac{g_{-1}(s)}{\Delta(s)} \exp(-j\Omega\xi) + \frac{g_0(s)}{\Delta(s)} + \frac{g_{+1}(s)}{\Delta(s)} \exp(j\Omega\xi), \quad (12)$$

де $\Delta(s)$ при символних значеннях s , m та Ω має вигляд степеневого полінома від змінної s 6-го степеня:

$$\begin{aligned} \Delta(s) = \Delta(s, m) = & -9191.10 + (0.50 \cdot 10^{-3} m^2 - 0.10 \cdot 10^{-2}) s^6 + \\ & + (0.20 \cdot 10^{-2} m^2 - 0.60 \cdot 10^{-2}) s^5 + (-1.12 + 0.45 m^2) s^4 + (-4.42 + 1.10 m^2) s^3 + \\ & + (-196.62 + 60.85 m^2) s^2 + (-384.41 + 60.20 m^2) s. \end{aligned} \quad (13)$$

Корені полінома (13) визначають критичні значення параметра t , що формують межу зони нестійкості. Зона нестійкості, визначена за ЧСМ, показана на рис. 3, а у стовпчику 2 табл.2 наведені значення межі цієї зони.

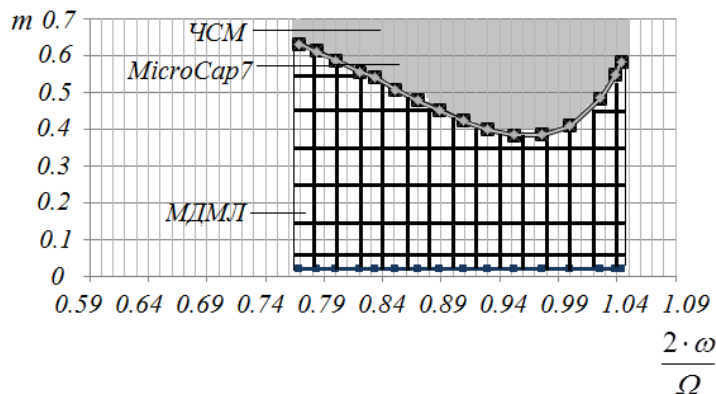


Рис.3. Зона нестійкості паралельного контуру за ЧСМ, за МДМЛ, за програмою MicroCap7.

Зона нестійкості параметричного контуру з рис.2 також була побудована за допомогою програми числового аналізу MicroCap7. Ця зона наведена на рис.3, а значення її межі наведені у стовпчику 3 табл. 2.

Висновки

З представленого матеріалу витікають наступні висновки.

1. МПА та МДМЛ, на відміну від ЧСМ, вимагають формування критерію оцінки стійкості кожної досліджуваної лінійної параметричної системи, що не є зручним при їх практичному застосуванні.

2. ЧСМ, за аналогією з методами оцінки стійкості лінійних систем з постійними параметрами, передбачає обчислення коренів відповідних поліномів, що дозволило порівняно просто будувати алгоритми та програми.

3. Застосування МПА до оцінки стійкості рівняння Матьє вимагає формування відповідних критеріїв для кожної нестійкої зони у той час, коли ЧСМ формує поліноми з символічними параметрами, подальша зміна яких дозволяє виявляти такі зони.

4. Результати оцінки стійкості за МПА та ЧСМ для першої зони нестійкості рівняння Матьє достатньо близькі, для інших зон дані застосування МПА відсутні.

5. Результати оцінки стійкості за МДМЛ виявились не оправдано песимістичними у той час, коли результати за ЧСМ та програмою

Таблиця 2

$\frac{2\omega}{\Omega}$	Значення t для межі зони нестійкості		
	ЧСМ	MicroCap7	МДМЛ
1	2	3	4
0,769	0,6321	0,6325	0,02
0,784	0,6129	0,6105	0,02
0,8	0,5872	0,587	0,02
0,82	0,5561	0,5565	0,02
0,833	0,5422	0,5419	0,02
0,851	0,5081	0,5078	0,02
0,87	0,4785	0,479	0,02
0,889	0,4521	0,451	0,02
0,909	0,4236	0,424	0,02
0,93	0,4	0,4	0,02
0,952	0,3838	0,385	0,02
0,976	0,3855	0,386	0,02
1	0,41	0,41	0,02
1,026	0,4845	0,485	0,02
1,039	0,5501	0,55	0,02
1,044	0,5846	0,585	0,02

MicroCAP7, практично, збіглися. Вважаємо, що програма MicroCAP забезпечує достатньо точний результат.

Література

1. Шаповалов Ю. И. Об оценке устойчивости линейных параметрических цепей при частотном символьном анализе / Ю. И. Шаповалов, Б. А. Мандзий, С. В. Маньковский // Изв. Вузов: Радиоэлектроника. – 2010. – № 9. – С 11-17.
2. Анісімов І.О. Коливання та хвилі/Анісімов І.О.; Київський національний університет імені Тараса Шевченка.- К., 2001 – 218 с.
3. Белоглазов В.В. Анализ устойчивости параметрического контура вторым методом Ляпунова/ Н.Д. Бирюк, В.В. Белоглазов //Вестник ВГУ, №1, 2003.-30-35 с.
4. Шаповалов Ю. І. Результати тестування програми символьного аналізу лінійних параметричних кіл / Ю.І. Шаповалов, С. В. Маньковський // Зб. наук. пр. ПІМЕ НАН України : Моделювання та інформаційні технології. – К. : 2008. – Вип. 49. – С.257-265.
5. Солодов А.В. Линейные автоматические системы с переменными параметрами /А.В.Солодов,Ф.СПетров /-М.:Наука, 1971.-620 с.
6. Нечаев Ю.Б. Функции Ляпунова в задаче об устойчивости параметрического контура / Ю.Б. Нечаев, Н.Д. Бирюк, Е.В. Латышева // Вестник ВГУ, №11, 2007.- С,152-157.

Шаповалов Ю.І., Смаль Д.Р. Результати оцінки стійкості лінійних параметричних систем трьома методами. У роботі наведені порівняння результатів оцінки стійкості лінійних параметричних систем трьома методами: частотним символьним методом, методом повільних амплітуд та методом, основаним на другому методі Ляпунова. Оцінка стійкості проведена для систем другого порядку з періодично змінними параметрами.

Ключові слова: частотний символьний метод, асимптотична стійкість, зона нестійкості

Шаповалов Ю.И., Смаль Д.Р. Результаты оценки устойчивости линейных параметрических систем тремя методами. В работе приведено сравнение результатов оценки устойчивости линейных параметрических систем тремя методами: частотным символьным методом, методом медленноменяющихся амплитуд и методом, основанном на втором методе Ляпунова. Оценка устойчивости проведена для систем второго порядка с периодически изменяющимися параметрами.

Ключевые слова: частотный символьный метод, асимптотическая устойчивость, зона неустойчивости

Shapovalov Yu., Smal D. The Results of the assessment of stability of linear parametric systems by three methods. This paper contains the comparison of results of the assessment of stability of linear parametric systems by three methods: frequency symbolic method, the method of slow amplitudes and the method based on Lyapunov's second method. The Assessment of stability done for systems of second order with periodically varying parameters.

Keywords: symbolic frequency method, asymptotic stability, zone of instability.