

**ВИЗНАЧЕННЯ ЗОНИ ОДНОРІДНОСТІ КЕРОВАНОГО
КВАЗІСТАТИЧНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ В ОБЛАСТІ
З КІЛЬЦЕВОЮ БАГАТОЗВ'ЯЗНОЮ ГРАНИЦЕЮ**

*Зіньковський Ю.Ф., д.т.н., професор,
Сидорук Ю.К., доцент
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»*

Вступ

Можливість обертання вектора напруженості квазістатичного електричного поля в внутрішній частині області, визначення зони однорідності його, а також способи розширення цієї зони при заданих допустимих відхиленнях, важливі для багатьох прикладних задач.

В роботі розглядаються способи керування (обертання) вектора напруженості електричного поля і визначається зона однорідності квазістатичного електричного поля в внутрішній частині області з кільцевою n -зв'язною границею, рівними довжинами граничних дуг та рівними проміжками між ними в залежності від кількості граничних дуг n , розподілу потенціалу між граничними дугами і відношення між довжинами граничних дуг до проміжку між дугами. Дана робота ґрунтується на результатах, одержаних в [1-3] і є фактичним продовженням матеріалів, викладених в цих роботах. В [1] приведено розв'язок задачі, де визначається напруженість електричного поля і потенціалу в відкритій комплексній площині z з n -зв'язною кільцевою границею з використанням сингулярних інтегральних рівнянь методом спряження граничних умов. Одержані в загальному вигляді вирази напруженості електричного поля та потенціалу, як функції комплексної змінної. В [2] розглянутий варіант кільцевої n -зв'язної границі з однаковими довжинами граничних дуг, $L_1 = L_2 = L_3 = \dots = L_n$ та однаковими проміжками між ними. Показано, що задача з довільним розподілом потенціалу на відрізках граничних дуг $V_{01}, V_{02}, V_{03}, \dots, V_{0n}$ може бути зведена до часткової задачі, в якій тільки $V_{ок} \neq 0$, потенціали решти дуг дорівнюють нулю. При цьому загальна задача розв'язується шляхом додавання результатів, одержаних при часткових розв'язках. Результати подані в формі функцій комплексної змінної. В [3] доведена можливість і доцільність подання напруженості електричного поля та потенціалу в відкритій комплексній площині з n -зв'язною кільцевою границею та однаковими довжинами граничних дуг в вигляді суми просторових гармонік. Приведено аналіз наявності просторових гармонік та розраховані їх амплітуди.

Постановка задачі

Вихідним виразом для розрахунку однорідності квазістатичного електричного поля, що обертається, в внутрішній частині відкритої комплексної площини з кільцевою багатозв'язною границею, рівними довжинами граничних дуг та проміжку між ними – є вираз, одержаний в [2];

$$\dot{E}(z)_k = \frac{(-1)^{k-1}}{R} Z^{*\frac{n-1}{2}} \times \sum_{i=1}^N C_i \left\{ Z^{*\frac{n-i}{2}} \exp \left[j \left(\frac{n-i}{2} \right) \frac{2\pi}{n} (k-1) \right] + Z^{*\frac{n+i}{2}} \exp \left[-j \left(\frac{n-i}{2} \right) \frac{2\pi}{n} (k-1) \right] \right\} \times \frac{1}{\sqrt{Z^{*2n} - 2Z^{*n} \cos n\varphi_1 + 1}} \quad (1)$$

де n – порядок зв'язності або кількість граничних дуг; $N = n / 2$ - для парних значень n , $N = (n - 1) / 2$ – для непарних значень n ; R – радіус граничного кола; C_i - коефіцієнти; φ_1 - половина кута, на який спирається дуга L_k ; Z^* - спряжений комплекс незалежної змінної.

Кутова складова напруженості електричного поля в проміжку між граничними дугами на граничному колі дорівнює:

$$E_\varphi(t)_k = \frac{(-1)^{k-1}}{R} \sqrt{2} \times \frac{\sum_{i=1}^N C_i \cos(n/2 - i)[\varphi - 2\pi(k-1)]}{\sqrt{\cos n\varphi - \cos n\varphi_1}}$$

Коефіцієнт C_i визначається з системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^N C_i \sin i \frac{\pi}{n} (2p-1) P_{-1/n}(\cos n\varphi_2) = \frac{nV_{b_{k+p-1}a_{k+p}}}{2\pi} \quad (2)$$

де $P_{-1/n}(\cos n\varphi_2)$ - функція Лежандра порядку $-1/n$; φ_2 - половина кута проміжку між граничними дугами; $V_{b_{(k+p-1)a_{(k+p)}}$ - різниця потенціалу між точками b_{k+h-1} і a_{k+p} , (рис. 1).

Вираз (2) – є системою рівнянь. Кожне рівняння визначається цілим числом p , яке змінюється від 1 до N . В цій системі тільки перше рівняння, для якого $p = 1$, має праву частину, тобто $V_{0k} \neq 0$, , в решті рівнянь, для яких $p > 1$, права частина дорівнює нулю.

З системи рівнянь виходить, що

$$C_i = D_i / D \quad (3)$$

де D – визначник системи; D_i - алгебраїчне доповнення i -го члену визначника.

В цій задачі необхідно: виконати аналіз можливих способів обертання вектора напруженості електричного поля в внутрішній частині відкритої комплексної площини z , визначити зону однорідності поля в залежності від значення n , розподілу потенціалу між граничними дугами L та відношення кутів φ_1 і φ_2 (рис. 1). Результати розв'язку поставленої задачі по-

даються, як в залежності від комплексної змінної, так і в формі суми просторових гармонік.

Розв'язок задачі

Для реалізації обертання вектора напруженості електричного поля в внутрішній частині області необхідно змінювати розподіл потенціалу між граничними дугами. Тут варто розглянути декілька можливих варіантів керування (обертання) вектором напруженості електричного поля шляхом зміни розподілу потенціалу між граничними дугами.

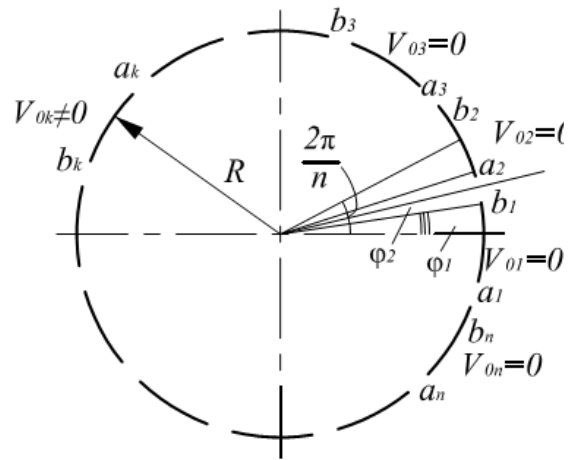


Рис. 1

Дискретне обертання поля. В першому можливому варіанті тільки одна гранична дуга L_k має потенціал $V_{0k} \neq 0$, решта граничних дуг мають нульовий потенціал і k змінюється від 1 до n . В цьому випадку поворот структури поля відбувається дискретно. Кутовий дискрет $\gamma=2\pi/n$. Розрахунок напруженості електричного поля виконується згідно виразу (1). Швидкість обертання поля визначається швидкістю перемикавання потенціалу на граничних дугах. Як свідчать розрахунки, розподіл поля в внутрішній частині області різко неоднорідне і неоднорідність збільшується з зменшенням дискрета γ . Неоднорідність можна зменшити, якщо гранична дуга L_k , буде знаходитись під потенціалом $V_{0k} \neq 0$, а діаметрально протилежна їй $L_{k+n/2}$ - під потенціалом $(-V_{0k})$, решта граничних дуг під нульовим потенціалом. В цьому випадку

$$\dot{E}(z)_{k,k+n/2} = \dot{E}(z)_k + \dot{E}(z)_{k+n/2}$$

Після виконання процедури додавання з урахуванням знаків потенціалів на граничних дугах і того, що n має бути парним

$$\dot{E}(Z)_{k,k+n/2} = \frac{(-1)^{k-1}}{R} \times \sum_{i=1}^N C_i \left\{ Z^{*2^{n-i}} \exp \left[j \left(\frac{n}{2} - i \right) \frac{2\pi}{n} (k-1) \right] + Z^{* \frac{n+i}{2}} \exp \left[-j \left(\frac{n}{2} - i \right) \frac{2\pi}{n} (k-1) \right] \right\} \quad (4)$$

$$\times Z^{*n/2-1} \frac{1}{\sqrt{Z^{*2n} - 2Z^{*n} \cos n\phi_1 + 1}}$$

де $i = 1, 3, 5, \dots$ непарні числа з ряду $1 \leq i \leq N$. При зменшенні дискрету повороту вектора E збільшується n , зменшується L , тому концентрація поля в зоні граничної дуги, що знаходиться під потенціалом V_{0k} , збільшується і, відповідно, збільшується неоднорідність в внутрішній частині області z .

Зменшити дискрет повороту поля і збільшити однорідність його можна

збільшуючи n і одночасно збільшуючи кількість сусідніх граничних дуг, на які подається потенціал V_0 , а на діаметрально протилежні $(-V_0)$. Якщо кількість дуг, що знаходяться під одним потенціалом дорівнює $l \leq N$, то вираз напруженості електричного поля, як функція комплексної змінної z , має вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{E}(Z)_{k+l, k+\frac{n}{2}+l} &= \frac{(-1)^{k+l}}{R} (2j) Z^{*n/2-1} \times \sum_{i=1}^N C_i \frac{\sin(n/2-i)\frac{\pi}{n} l}{\cos(n/2-i)\frac{\pi}{n}} \times \\ &\times \frac{\left\{ Z^{*n/2-i} \exp\left[j\left(\frac{n}{2}-i\right)\frac{2\pi}{n}\left(k+\frac{l-3}{2}\right) \right] - Z^{*n/2+i} \exp\left[-j\left(\frac{n}{2}-i\right)\frac{2\pi}{n}\left(k+\frac{l-3}{2}\right) \right] \right\}}{\sqrt{Z^{*2n} - 2Z^{*n} \cos n\varphi_1 + 1}} \end{aligned} \quad (5)$$

для l – парного,

$$\begin{aligned} \dot{E}(Z)_{k+l, k+\frac{n}{2}+l} &= \frac{(-1)^{k+l}}{R} 2Z^{*n/2-1} \times \sum_{i=1}^N C_i \frac{\cos(n/2-i)\frac{\pi}{n} l}{\cos(n/2-i)\frac{\pi}{n}} \times \\ &\times \frac{\left\{ Z^{*n/2-i} \exp\left[j\left(\frac{n}{2}-i\right)\frac{2\pi}{n}\left(k+\frac{l-3}{2}\right) \right] + Z^{*n/2+i} \exp\left[-j\left(\frac{n}{2}-i\right)\frac{2\pi}{n}\left(k+\frac{l-3}{2}\right) \right] \right\}}{\sqrt{Z^{*2n} - 2Z^{*n} \cos n\varphi_1 + 1}} \end{aligned} \quad (6)$$

для l – непарного, де i – непарні числа з ряду $1 \leq i \leq N$.

Це ж поле в виразах суми просторових гармонік може бути представлено наступним чином

$$E_{r,r}_{k+l, k+\frac{n}{2}+l} = -\frac{2}{R} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{\sin ml \frac{\pi}{n}}{\sin m \frac{\pi}{n}} \left(\frac{r}{R}\right)^{m-1} \cos m \left[\varphi - \frac{2\pi}{n} \left(k + \frac{l-3}{2} \right) \right] \quad (7)$$

$$E_{\varphi,r}_{k+l, k+\frac{n}{2}+l} = \frac{2}{R} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{\sin ml \frac{\pi}{n}}{\sin m \frac{\pi}{n}} \left(\frac{r}{R}\right)^{m-1} \sin m \left[\varphi - \frac{2\pi}{n} \left(k + \frac{l-3}{2} \right) \right] \quad (8)$$

$$U_{k+l, k+\frac{n}{2}+l} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{m} \frac{\sin ml \frac{\pi}{n}}{\sin m \frac{\pi}{n}} \left(\frac{r}{R}\right)^m \cos m \left[\varphi - \frac{2\pi}{n} \left(k + \frac{l-3}{2} \right) \right] \quad (9)$$

де, $m = 1, 3, 5, \dots$ - ряд непарних чисел.

$$B_m = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^N C_i \left[\frac{\sin 2(m-i)\pi}{\sin(m-i)\frac{\pi}{n}} P_{\frac{m-i}{n}}(\cos n\varphi_2) - \frac{\sin 2(m+i)\pi}{\sin(m+i)\frac{\pi}{n}} P_{\frac{m+i-n}{n}}(\cos n\varphi_2) \right]$$

В цьому виразі

$$\frac{\sin 2(m \mp i)\pi}{\sin(m \mp i)\frac{\pi}{n}} \neq 0, \quad \text{ЯКЩО} \quad \frac{m \mp i}{n} = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{цілі числа } i$$

$$\frac{\sin 2(m \mp i)\pi}{\sin(m \mp i)\frac{\pi}{n}} = 0, \quad \text{ЯКЩО} \quad \frac{m \mp i}{n} - \text{дробові числа.}$$

З виразу (9) видно, що поле, яке описується першою просторовою гармонікою ($m = 1$) не змінюється при зміні r / R , тобто перша просторова гармоніка в внутрішній частині області \mathbf{z} описує однорідне електричне поле и, таким чином є основною гармонікою. Гармоніки більш високого порядку ($m > 1$), якщо вони присутні в даній зоні, спотворюють однорідність поля. В зв'язку з тим, що амплітуди просторових гармонік напруженості електричного поля пропорційні $(r / R)^{m-1}$, їх вплив буде тим менший, чим вищий їх порядок. Таким чином, вища просторова гармоніка, яка розташована найближче до першої найсильніше впливає на однорідність. Тому, чим вищий порядок цієї гармоніки, тим більший радіус зони однорідності. Для порівняльної оцінки впливу гармонік більш високого порядку на зону однорідності поля, приведена таблиця їх амплітуд на граничному колі ($r = R$) (табл. 1). В табл. 1 використані наступні позначки:

$$Q_{4,1}^0 = \frac{P_0(\cos 4\varphi_2)}{P_{-1/4}(\cos 4\varphi_2)}; Q_{4,1}^1 = \frac{P_1(\cos 4\varphi_2)}{P_{-1/4}(\cos 4\varphi_2)}; Q_{6,1}^0 = \frac{P_0(\cos 6\varphi_2)}{P_{-1/6}(\cos 6\varphi_2)}; Q_{6,3}^0 = \frac{P_0(\cos 6\varphi_2)}{P_{-3/6}(\cos 6\varphi_2)};$$

$$Q_{6,1}^1 = \frac{P_1(\cos 6\varphi_2)}{P_{-1/6}(\cos 6\varphi_2)}; Q_{8,1}^0 = \frac{P_0(\cos 8\varphi_2)}{P_{-1/8}(\cos 8\varphi_2)}; Q_{8,3}^0 = \frac{P_0(\cos 8\varphi_2)}{P_{-3/8}(\cos 8\varphi_2)}; Q_{10,1}^0 = \frac{P_0(\cos 10\varphi_2)}{P_{-1/10}(\cos 10\varphi_2)}$$

$$Q_{10,3}^0 = \frac{P_0(\cos 10\varphi_2)}{P_{-3/10}(\cos 10\varphi_2)}; Q_{10,5}^0 = \frac{P_0(\cos 10\varphi_2)}{P_{-5/10}(\cos 10\varphi_2)}.$$

З табл. 1 видно, що при живленні діаметрально протилежних граничних дуг однаковими за величиною і протилежними по знаку потенціалами, парні просторові гармоніки відсутні. При належному виборі значень n та l можна звести до нуля не тільки парні, але і інші, найближчі до першої, просторові гармоніки. При $n = 6$ та $l = 2$ відсутня також гармоніка $m = 3$. Амплітуди просторових гармонік також залежать від кута φ_2 , Приклад цієї залежності приведено на рис. 2.

При розрахунку поля за формулами (5) та (6) доцільно вектор \mathbf{E} подавати, в формі ортогональних компонент, одна з яких співпадає з вектором \mathbf{E} в центрі області, наприклад \mathbf{E}_x , а друга перпендикулярна їй, наприклад \mathbf{E}_y . Остання при $r = 0$ також дорівнює нулю. В зоні однорідності

E_x , практично не змінюється, а E_y близька до нуля. Графік-рельєф $E_c(x,y)$ для випадку $n = 6$ та $l = 2$ приведено на рис. 3.

Таблиця 1

n/l	$m=1$ $B_{1,4}$	$m=2$ $B_{2,4}$	$m=3$ $B_{3,4}$	$m=4$ $B_{4,4}$	$m=5$ $B_{5,4}$	$m=6$ $B_{6,4}$	$m=7$ $B_{7,4}$	$m=8$ $B_{8,4}$
4/1	$0,90Q_{4,1}^0$	0	$0,90Q_{4,1}^0$	0	$-0,90Q_{4,1}^1$	0	$-0,90Q_{4,1}^1$	0
6/1	$0,64Q_{6,1}^0$	0	$1,27Q_{6,3}^0$	0	$0,64Q_{6,1}^0$	0	$-0,64Q_{6,1}^1$	0
8/1	$0,49Q_{8,1}^0$	0	$1,18Q_{8,3}^0$	0	$1,18Q_{8,3}^0$	0	$0,49Q_{8,1}^0$	0
10/1	$0,39Q_{10,1}^0$	0	$1,03Q_{10,3}^0$	0	$1,27Q_{10,5}^0$	0	$1,03Q_{10,3}^0$	0
4/2	$1,27Q_{4,1}^0$	0	$-1,27Q_{4,1}^0$	0	$1,27Q_{4,1}^1$	0	$-1,27Q_{4,1}^1$	0
6/2	$1,10Q_{6,1}^0$	0	0	0	$-1,10Q_{6,1}^0$	0	$1,10Q_{6,1}^1$	0
8/2	$0,90Q_{8,1}^0$	0	$0,90Q_{8,3}^0$	0	$-0,90Q_{8,3}^0$	0	$-0,90Q_{8,1}^0$	0
10/2	$0,75Q_{10,1}^0$	0	$1,21Q_{10,3}^0$	0	0	0	$-1,21Q_{10,3}^0$	0

При розрахунку поля за формулами (5) та (6) доцільно вектор E подавати, в формі ортогональних компонент, одна з яких співпадає з вектором E в центрі області, наприклад E_x , а друга перпендикулярна їй, наприклад E_y . Остання при $r = 0$ також дорівнює нулю. В зоні однорідності E_x , практично не змінюється, а E_y близька до нуля. Графік-рельєф $E_c(x,y)$ для випадку $n = 6$ та $l = 2$ приведено на рис. 3.

Розрахунки показують, що при дискретному повороті поля, якщо не змінювати величину потенціалу при комутації граничних дуг, досягти високого ступеню однорідності неможливо.

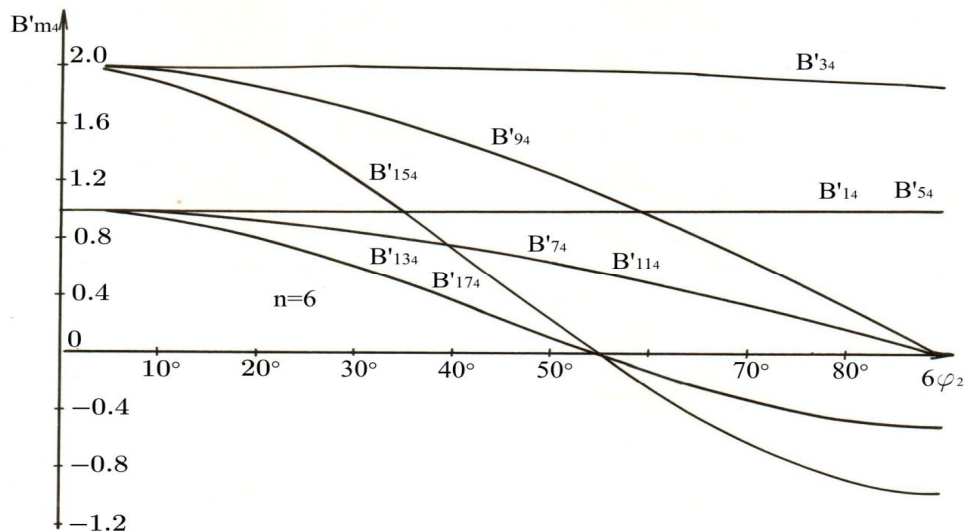


Рис. 2

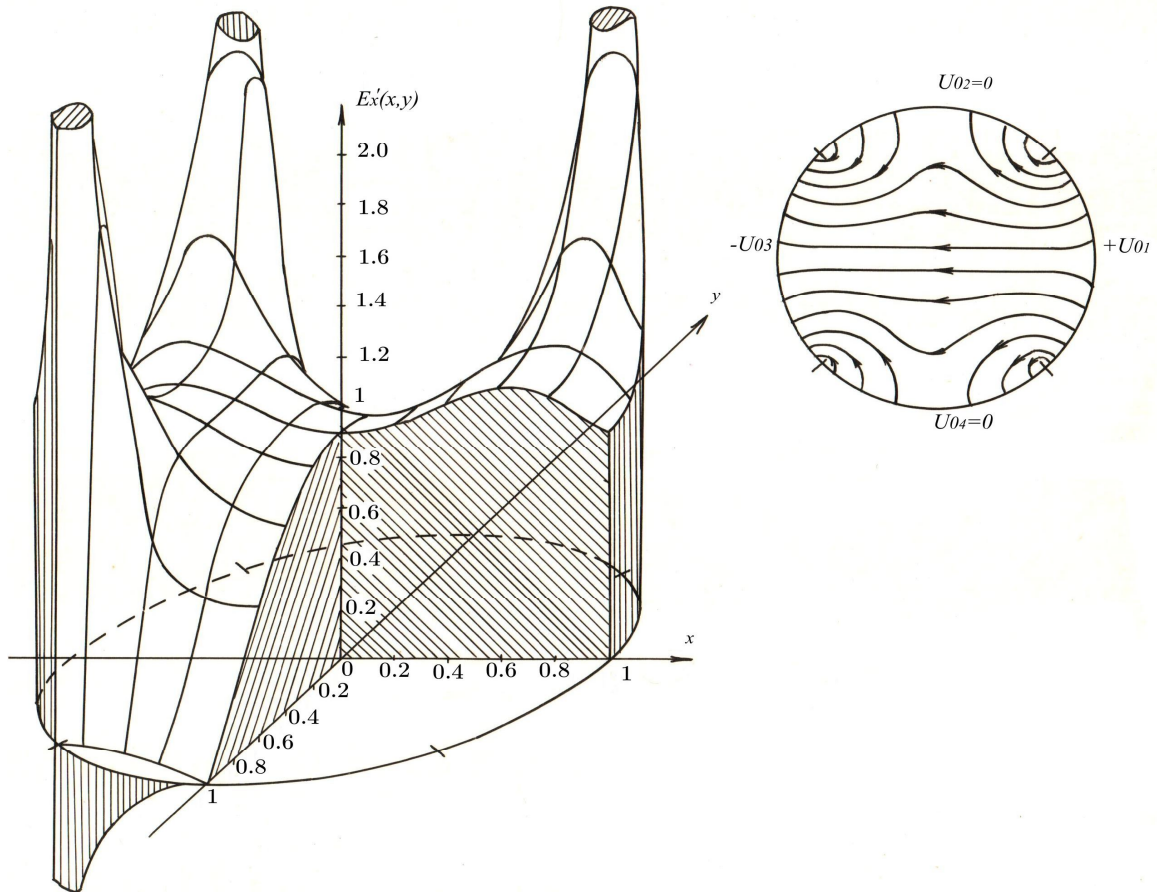


Рис. 3

Рівномірне обертання електричного поля. Високого ступеню однорідності електричного поля в внутрішній частині області \mathbf{z} ($r < R$) та рівномірне його обертання можна досягти, якщо розподіл потенціалу на граничних дугах

$$V_{0k} = V_{0m} \sin \left[\Omega t + \frac{2\pi}{n} (k-1) \right] \quad (10)$$

так як $C_i = V_{0k} F_i$, а $F_i = -\frac{n A_i}{2\pi A P_i} \frac{1}{\cos n\varphi_2}$,

де A та A_i - визначник та алгебраїчне доповнення i -го члену визначника A (див. [2]), тому вираз (1) після підстановки в нього (10) приймає вигляд:

$$\dot{E}(Z)_{k,k+n/2} = \frac{(-1)^{k-1}}{R} Z^{*n/2-1} \times \frac{\sum_{i=1}^N F_i \left\{ V_{0n} \sin \left[\Omega t + \frac{2\pi}{n} (k-1) \right] \left[Z^{*2-i} \exp \left(j \left(\frac{n-i}{2} \right) \frac{2\pi}{n} (k-i) \right) + Z^{* \frac{n+i}{2}} \exp \left(-j \left(\frac{n-i}{2} \right) \frac{2\pi}{n} (k-i) \right) \right] \right\}}{\sqrt{Z^{*2n} - 2Z^{*n} \cos n\varphi_1 + 1}}$$

Цей вираз визначає напруженість електричного поля, що створюється

однією потенціальною граничною дугою. Напруженість електричного поля, що створюється всіма n граничними дугами, має наступний вираз:

$$\begin{aligned} \dot{E}(Z)_{k,k+n/2} &= \frac{V_{0n}}{R} Z^{*n/2-1} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} F_i \sin \left[\Omega t + \frac{2\pi}{n} (k-1) \right] \times \\ & \times \frac{Z^{*n/2-1} \exp \left(j \left(\frac{n}{2} - i \right) \frac{2\pi}{n} (k-i) \right) + Z^{*-n/2+1} \exp \left(-j \left(\frac{n}{2} - i \right) \frac{2\pi}{n} (k-i) \right)}{\sqrt{Z^{*2n} - 2Z^{*n} \cos n\varphi_1 + 1}} \end{aligned}$$

В цьому виразі спочатку розглядається сума по k і за допомогою математичних операцій приводиться до форми зручної для застосування формул згортання сум [4]. Для цього показана форма комплексних чисел

$$\exp \left(j \left(\frac{n}{2} - i \right) \frac{2\pi}{n} (k-1) \right) \quad \text{и} \quad \exp \left(-j \left(\frac{n}{2} - i \right) \frac{2\pi}{n} (k-1) \right)$$

переводиться в тригонометричну форму і виконується ряд математичних перетворень. В результаті цих перетворень

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \sin \left[\Omega t + \frac{2\pi}{n} (k-1) \right] \exp \left(\pm j \left(\frac{n}{2} - i \right) \frac{2\pi}{n} (k-1) \right) = \\ = \sin \Omega t (\Phi_1 + \Phi_2) \pm j \sin \Omega t (-\Phi_3 - \Phi_4) + \cos \Omega t (-\Phi_3 + \Phi_4) \pm j \cos \Omega t (\Phi_1 - \Phi_2), \end{aligned}$$

де:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2} \frac{\cos \left(\frac{n-1}{n} \right) \pi (i+1) \sin \pi (i+1)}{\sin \frac{\pi}{n} (i+1)}, & \Phi_2 &= \frac{1}{2} \frac{\cos \left(\frac{n-1}{n} \right) \pi (i-1) \sin \pi (i-1)}{\sin \frac{\pi}{n} (i-1)}, \\ \Phi_3 &= \frac{1}{2} \frac{\sin \left(\frac{n-1}{n} \right) \pi (i-1) \sin \pi (i-1)}{\sin \frac{\pi}{n} (i-1)}, & \Phi_4 &= \frac{1}{2} \frac{\sin \left(\frac{n-1}{n} \right) \pi (i+1) \sin \pi (i+1)}{\sin \frac{\pi}{n} (i+1)}. \end{aligned}$$

Так як $i = 1, 2, 3, \dots, N$, де $N = n/2$, якщо n парне, и $N = (n-1)/2$, якщо n не парне, тому, при $i = 1$ $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = n/2$, $\Phi_3 = 0$, $\Phi_4 = 0$; при $1 < i \leq N$ $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$, $\Phi_4 = 0$. Таким чином сума по k не дорівнює нулю тільки при $i = 1$ і тому сума по i перетворюється в один доданок. В результаті сума по k приймає вигляд:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sin \left[\Omega t + \frac{2\pi}{n} (k-1) \right] \exp \left(\pm j \left(\frac{n}{2} - i \right) \frac{2\pi}{n} (k-1) \right) = \frac{n}{2} (\sin \Omega t \mp j \cos \Omega t),$$

а напруженість електричного поля

$$E(Z)_n = \frac{n V_{cm}}{2 R} F_1 \left[\sin \Omega t \frac{1 + Z^{*(n-2)}}{\sqrt{Z^{*2n} - 2Z^{*n} \cos n\varphi_2 + 1}} + j \cos \Omega t \frac{1 - Z^{*(n-2)}}{\sqrt{Z^{*2n} - 2Z^{*n} \cos n\varphi_2 + 1}} \right] \quad (11)$$

або

$$E(Z)_n = \frac{n V_{cm}}{2 R} F_1 \left[\frac{\sin \Omega t (1 + Z^{*(n-2)}) + j \cos \Omega t (1 - Z^{*(n-2)})}{\sqrt{Z^{*2n} - 2Z^{*n} \cos n\varphi_2 + 1}} \right] \quad (12)$$

де $F_I = F_i$ при $i = 1$

Вирази напруженості електричного поля і потенціалу в формі суми просторових гармонік може бути одержано також шляхом сумування по k просторових гармонік від окремих граничних дуг при розподілі потенціалу між граничними дугами згідно (10). При цьому, в якості вихідних, використовуються вирази:

$$E_r = -\frac{1}{R} \sum_m B_m \left(\frac{r}{R}\right)^{m-1} \sin m(\varphi - \varphi_m), \quad E_\varphi = -\frac{1}{R} \sum_m B_m \left(\frac{r}{R}\right)^{m-1} \sin m(\varphi - \varphi_m),$$

$$V = \sum_m \frac{B_m}{m} \left(\frac{r}{R}\right)^m \cos m(\varphi - \varphi_m),$$

де B_m и φ_m - амплітуди і фази просторових гармонік; $B_m = V_{0k} D_m$.

Тоді, з урахуванням (10), одержимо:

$$E_r = -\frac{V_{0m}}{R} \sum_{m=1}^{\infty} D_m \left(\frac{r}{R}\right)^{m-1} \sum_{k=1}^n \sin \left[\Omega t + \frac{2\pi}{n}(k-1) \right] \cos m \left[\varphi - \frac{2\pi}{n}(k-1) \right],$$

$$E_\varphi = \frac{V_{0m}}{R} \sum_{m=1}^{\infty} D_m \left(\frac{r}{R}\right)^{m-1} \sum_{k=1}^n \sin \left[\Omega t + \frac{2\pi}{n}(k-1) \right] \sin m \left[\varphi - \frac{2\pi}{n}(k-1) \right].$$

Перетворюючи вираз під знаком суми k і застосовуючи формули згортання сум тригонометричних функцій, одержимо:

$$E_r = -\frac{V_{0m}}{2R} \sum_{m=1}^{\infty} D_m \left(\frac{r}{R}\right)^{m-1} \left\{ \left[\sin [\Omega t + m\varphi] + \frac{n-1}{n} \pi(1+m) \right] \frac{\sin \pi(1+m)}{\sin \frac{\pi}{n}(1+m)} \right.$$

$$+ \left. \sin \left[(\Omega t + m\varphi) + \frac{n-1}{n} \pi(1-m) \right] \frac{\sin \pi(1-m)}{\sin \frac{\pi}{n}(1-m)} \right\} \quad (13)$$

$$E_\varphi = \frac{V_{0m}}{2R} \sum_{m=1}^{\infty} D_m \left(\frac{r}{R}\right)^{m-1} \left\{ \cos \left[(\Omega t - m\varphi) + \frac{n-1}{n} \pi(1+m) \right] \frac{\sin \pi(1+m)}{\sin \frac{\pi}{n}(1+m)} - \right.$$

$$\left. - \cos \left[(\Omega t + m\varphi) + \frac{n-1}{n} \pi(1-m) \right] \frac{\sin \pi(1-m)}{\sin \frac{\pi}{n}(1-m)} \right\} \quad (14)$$

$$U = \frac{V_{0m}}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{m} \left(\frac{r}{R}\right)^m \left\{ \sin \left[(\Omega t - m\varphi) + \frac{n-1}{n} \pi(1+m) \right] \frac{\sin \pi(1+m)}{\sin \frac{\pi}{n}(1+m)} + \right. \\ \left. + \sin \left[(\Omega t + m\varphi) + \frac{n-1}{n} \pi(1-m) \right] \frac{\sin \pi(1-m)}{\sin \frac{\pi}{n}(1-m)} \right\} \quad (15)$$

Доданки

$$\frac{\sin \left[(\Omega t - m\varphi) + \frac{n-1}{n} \pi(1+m) \right]}{\cos \left[(\Omega t - m\varphi) + \frac{n-1}{n} \pi(1+m) \right]} \quad \text{та} \quad \frac{\sin \left[(\Omega t + m\varphi) + \frac{n-1}{n} \pi(1-m) \right]}{\cos \left[(\Omega t + m\varphi) + \frac{n-1}{n} \pi(1-m) \right]}$$

презентують просторові гармоніки, що рухаються в прямому і зворотному кутовому напрямку, відповідно, з кутовою швидкістю Ω/m . Співмножник $[\sin \pi(1 \pm m)] / [\sin \pi(1 \pm m)/n] \neq 0$, якщо $(1 \pm m)/n = 1, 2, 3, \dots$, в решті випадків цей множник дорівнює нулю. Величина m , при якій $(1 \pm m)/n = 1, 2, 3, \dots$ тобто цілі числа, які відповідають $i = 1$ при визначенні D_m . Якщо $i > 1$ амплітуди просторових гармонік дорівнюють нулю і сума по i перетворюється в один доданок. В зв'язку з цим

$$D_m = -\frac{1}{2n} F_1 \left[\frac{\sin 2(m-1)\pi}{\sin \frac{\pi}{n}(m-1)} P_{m-1}(\cos n\varphi_2) - \frac{\sin 2(m+1)\pi}{\sin \frac{\pi}{n}(m+1)} P_{m+1-n}(\cos n\varphi_2) \right] \quad (16)$$

де F_1 - визначається так, як в попередньому випадку.

В табл. 2 приведені амплітуди просторових гармонік при розподілі потенціалу згідно з виразом (10) в залежності від кількості граничних дуг n .

Для зручності побудови таблиці використані позначки з попередньої таблиці, а також введені наступні нові:

$$Q_{3,1}^0 = \frac{P_0(\cos 3\varphi_2)}{P_{-1/3}(\cos 3\varphi_2)}; \quad Q_{3,1}^1 = \frac{P_1(\cos 3\varphi_2)}{P_{-1/3}(\cos 3\varphi_2)}; \quad Q_{3,1}^2 = \frac{P_2(\cos 3\varphi_2)}{P_{-1/3}(\cos 3\varphi_2)}; \quad Q_{5,1}^0 = \frac{P_0(\cos 5\varphi_2)}{P_{-1/5}(\cos 5\varphi_2)}; \\ Q_{5,1}^1 = \frac{P_1(\cos 5\varphi_2)}{P_{-1/5}(\cos 5\varphi_2)}; \quad Q_{7,1}^0 = \frac{P_0(\cos 7\varphi_2)}{P_{-1/7}(\cos 7\varphi_2)}; \quad Q_{7,1}^1 = \frac{P_1(\cos 7\varphi_2)}{P_{-1/7}(\cos 7\varphi_2)}.$$

Таблиця 2

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
3	$0,83Q_{3,1}^0$	$0,83Q_{3,1}^0$	0	$-0,83Q_{3,1}^1$	$-0,83Q_{3,1}^1$	0	$0,83Q_{3,1}^2$
4	$0,90Q_{4,1}^0$	0	$-0,90Q_{4,1}^0$	0	$0,90Q_{4,1}^1$	0	$-0,90Q_{4,1}^1$
5	$0,94Q_{5,1}^0$	0	0	$0,94Q_{5,1}^0$	0	$-0,94Q_{5,1}^1$	0
6	$0,95Q_{6,1}^0$	0	0	0	$-0,95Q_{6,1}^0$	0	$0,95Q_{6,1}^1$
7	$0,97Q_{7,1}^0$	0	0	0	0	$0,97Q_{7,1}^0$	0
8	$0,98Q_{8,1}^0$	0	0	0	0	0	$-0,98Q_{8,1}^0$

З табл. 2 видно, що при збільшенні n амплітуда першої просторової гармоніки збільшується, але незначно, а найближча до першої вища просторова гармоніка, амплітуда якої відмінна від нуля, має порядок $m = n - 1$. Це свідчить, що з ростом n радіус зони однорідного поля збільшується.

На рис. 4 приведено графік-рельєф компоненти $E_x(x, y)$, розрахований по формулі (12) для $n = 8$ і розподілі потенціалу у відповідності з виразом (10), з якого видно, що відносний радіус зони однорідності r/R дорівнює, приблизно, 0,60. На рис. 5 подані залежності амплітуд просторових гармонік від φ_2 , які дещо зменшуються при збільшенні зазору між граничними дугами, що визначається кутом φ_2

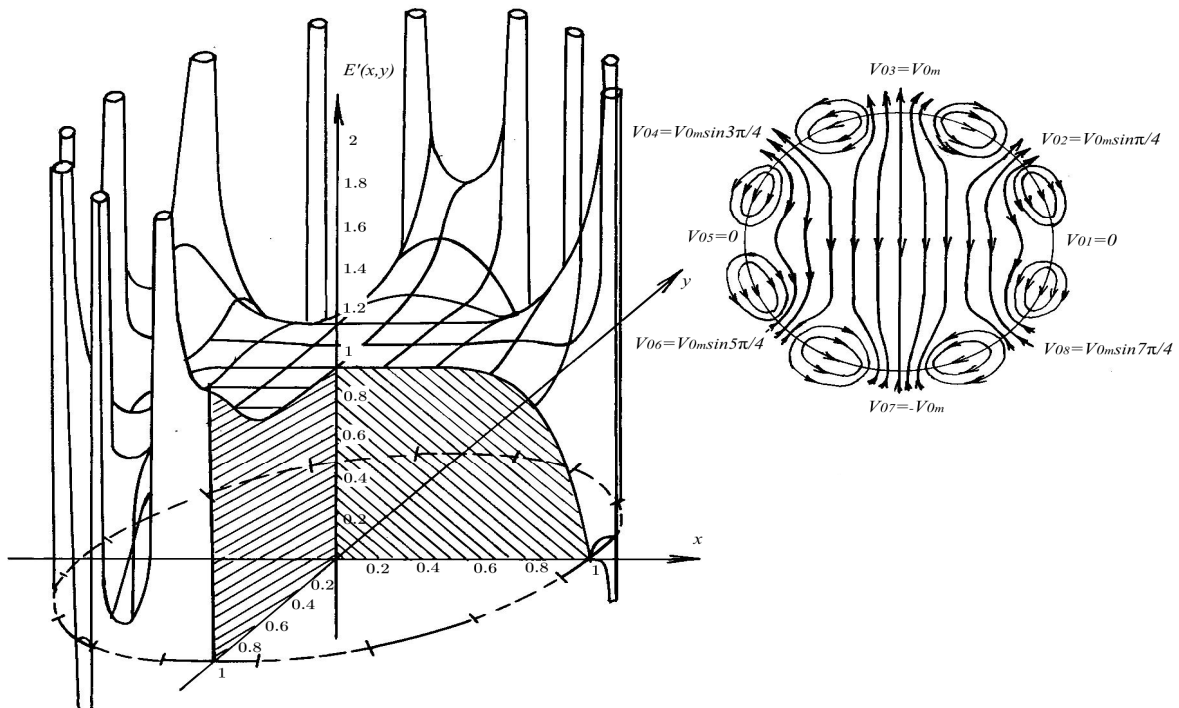


Рис.4

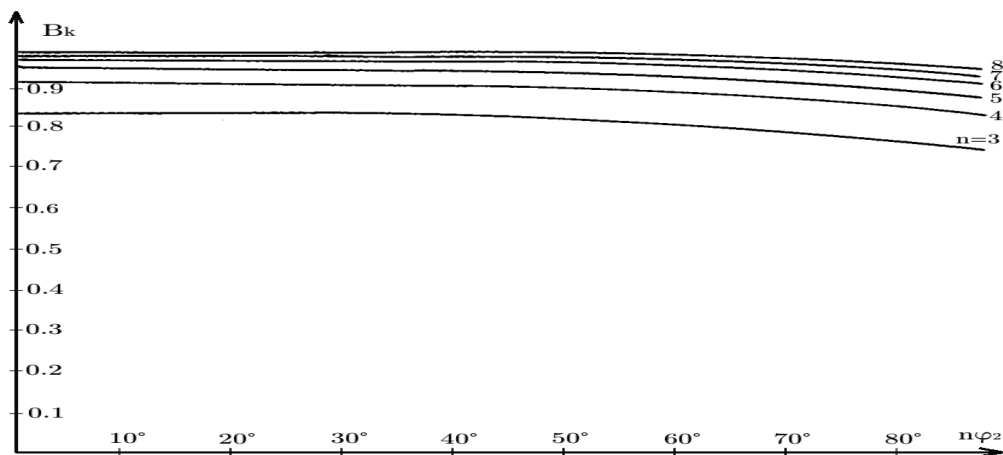


Рис.5

Висновки

1. В системі з кільцевою багатозв'язною границею можна реалізувати, як дискретне, так і безперервне обертання електричного поля.
2. При дискретному способі обертання електричного поля доцільно вибирати парне значення кількості граничних дуг, розподіляти потенціал, що живить граничні дуги, так, щоб діаметрально протилежні дуги мали однакові за величиною і протилежні за знаком величини і підключались до джерела живлення одночасно декілька розташованих поряд пар граничних дуг.
3. При реалізації безперервного обертання електричного поля на кожну граничну дугу необхідно подавати потенціал, що змінюється по гармонічному закону і зсувом по фазі, що дорівнює куту між центрами граничних дуг.
4. Найбільшу ступінь однорідності, з максимальною зоною однорідності, можна одержати при безперервному обертанні поля, при цьому, чим більше граничних дуг, тим більший радіус зони однорідності.

Література

1. Зиньковский Ю.Ф., Сидорук Ю.К., Голощанов А.В. Задача сопряжения в расчётах напряженности и потенциала электрического поля кольцевой многосвязной структуры//Изв.вузов. Радиотехника. 2007, №5, с.76–80.
2. Зиньковский Ю.Ф., Сидорук Ю.К., Голощанов А.В. Напряженность электрического поля в области с кольцевой многосвязной границей и равными длинами граничных дуг//Изв.вузов. Радиотехника. 2009, №2, с.14–22.
3. Зиньковский Ю.Ф., Сидорук Ю.К., Голощанов А.В. Представление напряженности электрического поля и потенциала в области с кольцевой n -связной границей в виде суммы пространственных гармоник//Изв. вузов. Радиотехника. 2009, Т. 52, №7, с.11–19.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М.. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М; Наука. 1971. 1108 с.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – СПб.; Лань. 2002. 688 с.
6. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения: Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.; Наука.1968, 512 с.

Зиньковський Ю.Ф., Сидорук Ю.К. Визначення зони однорідності керованого квазістатичного електричного поля в області з кільцевою багатозв'язною границею. Проведено аналіз та розрахунок зони однорідності керованого (що обертається) квазістатичного електричного поля в внутрішній частині відкритої області з кільцевою багатозв'язною границею та однаковими довжинами граничних дуг в залежності від того, який порядок зв'язності границі, розподіл потенціалу на граничних дугах і відношення довжини граничної дуги до довжини зазору між дугами. Математичні вирази подані, як в формі функцій комплексної змінної, так і в формі суми просторових гармонік. Доведено, що високу ступінь однорідності можна реалізувати при безперервному обертанні поля, при цьому, чим більше граничних дуг має граничне коло, тим більший розмір зони однорідності. Для реалізації безперервного обертання поля, на граничні дуги необхідно подавати напругу гармонічної форми з зсувом по фазі на кожній гранич-

ній дузі на кут, що дорівнює куту між центрами граничних дуг.

Ключові слова: електричне поле, напруженість електричного поля, потенціал електричного поля, зона однорідності, кероване поле, дискретне обертання поля, безперервне обертання поля, функція комплексної змінної, просторові гармоніки.

Зиньковский Ю.Ф., Сидорук Ю.К. **Определение зоны однородности управляемого квазистатического электрического поля в области с кольцевой многосвязной границей.** Приведен анализ и расчет зоны однородности управляемого (вращающегося) квазистатического электрического поля во внутренней области с кольцевой многосвязной границей и равными длинами граничных дуг в зависимости от порядка связности границы, распределения потенциала по граничным дугам и соотношения между длинами граничных дуг и зазорами между ними. Математические выражения представлены как в форме функций комплексной переменной, так и в форме суммы пространственных гармоник. Доказано, что высокую степень однородности можно реализовать при равномерном вращении поля, при этом, чем больше граничных дуг имеет граничная окружность, тем дольше размер зоны однородности. Для реализации равномерного вращения поля, на граничные дуги необходимо подавать напряжение гармонической формы со сдвигом по фазе на каждой граничной дуге на угол, который равен углу между центрами граничных дуг.

Ключевые слова: электрическое поле, напряжённость электрического поля, потенциал электрического поля, зона однородности, управляемое поле, дискретное вращение поля, равномерное вращение поля, функция комплексной переменной, пространственные гармоніки.

Zinkovskiy Y.F., Sydoruk Y.K. **Determination of homogeneity zone of controlled quasi-static electric field in the area with the ring multiply boundary** The analysis and calculation of zone homogeneity of controlled (rotated) quasi-static electric field in the interior of the open area with circular multiply connected boundary and of equal length, depending on connectivity order of the boundaries, of the distribution of potential on the boundary curves and a length limit to the length of the arc gap between the arcs was held. Mathematical expressions are presented, both in the form of a complex variable, and in the form of a sum of spatial harmonics. It is shown that a high degree of uniformity can be realized with continuous field rotation, herewith, if more marginal arcs of a circle would be, the larger area of homogeneity could be obtained. To implement the continuous rotation of the fields at the arc boundary the harmonic voltage must be submitted with phase shift at each arc boundary equal to the angle between the centers of the arc boundaries.

Keywords: electric field, the potential of electric field, homogeneity area, rotated field, discrete field rotation, continuous field rotation, complex variable function, spatial harmonics.