

# Аппроксимация Накагами распределения огибающей сигнала в канале TWDP

Калюжный А. Я.

Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского"

E-mail: [oleksa.yakov@gmail.com](mailto:oleksa.yakov@gmail.com)

В статье рассмотрена модель двухлучевого радиоканала с рассеянием мощности сигнала, которую в литературе принято обозначать аббревиатурой TWDP (от Two-Wave with Diffuse Power). Для этой модели в литературе известны как точные, так и приближенные выражения распределения огибающей сигнала на выходе канала. Однако общим недостатком известных результатов является их высокая сложность с точки зрения практических применений. В связи с этим в данной работе рассматривается значительно более простая аппроксимация функций распределения на основе метода Накагами. Данный метод аппроксимации сводится к вычислению второго и четвертого начальных моментов огибающей сигнала, что и выполнено в работе применительно к модели канала TWDP. На основе полученной аппроксимации проведено исследование погрешностей аппроксимации путем сопоставления расчетов по точным и приближенным формулам. Анализ показал, что погрешности метода Накагами при вычислении кумулятивных функций распределения является вполне удовлетворительными для практических применений, однако, точность аппроксимации плотностей распределения вероятностей значительно уступает известным результатам, с которыми проведено сравнение в работе. Также отмечается полезность полученных результатов для трактовки данных некоторых натуральных экспериментов.

*Ключевые слова:* мобильная связь, двухлучевой канал с рассеянием, мелкомасштабные замирания, распределение огибающей, распределение Накагами

DOI: [10.20535/RADAP.2020.82.74-80](https://doi.org/10.20535/RADAP.2020.82.74-80)

## Введение

Важным элементом научного обеспечения технологий радиосвязи является выбор моделей радиоканалов. Однако, в традиционной теории радиосвязи такой выбор был ограничен относительно небольшим числом канонических схем [1, 2], среди которых главное место занимали рэлеевский и райсовский каналы. В настоящее время с учетом общих тенденций развития технологий радиосвязи, особенно, мобильной, значение выбора моделей радиоканалов неизмеримо возрастает. Поэтому все большую актуальность приобретают задачи построения современных моделей каналов, которые учитывали бы изменение условий работы систем радиосвязи, в частности, переход на новые частотные диапазоны, изменение схем передачи информации, расширение функциональности и т.п.

Указанные обстоятельства обусловили появление за последние 10-15 лет ряда публикаций, в которых рассматриваются принципиально новые модели радиоканалов, например, гипер-рэлеевский канал [3], двойной райсовский канал [4], канал Хойта [5] и ряд других [6]. В рамках данной статьи мы ограничимся рассмотрением лишь одной из наиболее

популярных ныне моделей, а именно, двухлучевого радиоканала с рассеянием мощности сигнала. В литературе данную модель принято обозначать аббревиатурой TWDP (от Two-Wave with Diffuse Power). Впервые модель TWDP была предложена в работе [7], где были исследованы соответствующие законы распределения огибающей сигнала. В ряде последующих работ [8–10] была выполнена экспериментальная проверка модели TWDP в натуральных условиях, уточнены условия ее применимости, предложены некоторые обобщения.

Суть модели канала TWDP состоит в том, что сигнал по выходу канала предполагается состоящим из 3-х компонент, две из которых существуют в условиях прямой видимости между приемником и передатчиком, но значительно отличаются своими лучевыми трассами. Третья же компонента порождается эффектами рассеяния сигнала на мелкомасштабных неоднородностях среды передачи. Таким образом, модель TWDP для комплексной огибающей сигнала по выходу квадратурного детектора обычно записывают [7] следующим образом:

$$\dot{R} = \dot{V}_1 \cdot e^{j\Phi_1} + \dot{V}_2 \cdot e^{j\Phi_2} + \dot{V}_{dif}, \quad (1)$$

где  $\dot{V}_1, \dot{V}_2$  - комплексные амплитуды радиолучей;  $\Phi_1, \Phi_2$  - набег фаз радиолучей в канале;  $\dot{V}_{dif}$  - рассеянная компонента сигнала. Согласно модели TWDP амплитуды  $\dot{V}_1, \dot{V}_2$  предполагаются заданными, а фазы  $\Phi_1, \Phi_2$  - случайными и статистически независимыми. Последнее предположение может быть обосновано эффектами доплеровского расширения спектра сигнала в канале, параметры которого для разных лучевых трас существенно отличаются [11]. Относительно же рассеянной компоненты  $\dot{V}_{dif}$  принимается традиционное предположение о гауссовском законе ее распределения с параметрами:

$$\langle \dot{V}_{dif} \rangle = 0, \quad \langle |\dot{V}_{dif}|^2 \rangle = 2\sigma_d^2, \quad (2)$$

где символ  $\langle \cdot \rangle$  обозначает статистическое усреднение;  $\sigma_d^2$  - дисперсию флуктуаций каждой из квадратных составляющих рассеянной компоненты.

При указанных предположениях в [7] было получено общее выражение для плотности распределения вероятностей (ПРВ) огибающей  $R = |\dot{R}|$  сигнала (1), которое имеет вид:

$$f_R(r) = \frac{r}{\pi\sigma_d^2} \exp\left(-\frac{r^2 + 2K_{TW}}{2\sigma_d^2}\right) \times \int_0^\pi \exp(K_{TW}\Delta_{TW} \cdot \cos\theta) \times I_0\left[\frac{r}{\sigma_d} \sqrt{2K_{TW} \cdot (1 - \Delta_{TW} \cdot \cos\theta)}\right] d\theta, \quad r \in (0, \infty), \quad (3)$$

где  $I_0(\cdot)$  - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка;

$$\Delta_{TW} = \frac{2V_1V_2}{V_1^2 + V_2^2} \quad (4)$$

- параметр модели TWDP, который определяется соотношением амплитуд радиолучей  $V_i = |\dot{V}_i|$ ,  $i = 1, 2$  и принимает значения в интервале  $(0, 1)$ ;

$$K_{TW} = \frac{V_1^2 + V_2^2}{2\sigma_d^2} \quad (5)$$

- К-фактор канала TWDP, аналогичный по определению соответствующему фактору для райсовского канала. Однако, распределение (3) в элементарных или табулированных функциях не выражается. В связи с этим в [7] для него была предложена следующая аппроксимация:

$$f_R(r) = \frac{r}{\pi\sigma_d^2} \exp\left(-\frac{r^2 + 2K_{TW}}{2\sigma_d^2}\right) \times \sum_{i=1}^N a_i D\left(\frac{r}{\sigma_d}; K_{TW}, \Delta_{TW} \cos \frac{\pi(i-1)}{2N-1}\right), \quad (6)$$

где  $N$  - порядок аппроксимации,  $a_1, \dots, a_N$  - интерполяционные коэффициенты, подобранные в работе [7];

$$D(x, K_{TW}, \alpha) = \frac{1}{2} \exp(\alpha K_{TW}) \times I_0\left(x\sqrt{2K_{TW}(1-\alpha)}\right) + \frac{1}{2} \exp(-\alpha K_{TW}) I_0\left(x\sqrt{2K_{TW}(1+\alpha)}\right).$$

Аппроксимация (6) для порядков интерполяции  $N = 2 \div 5$  показала хорошую точность как в теоретических, так и в экспериментальных исследованиях [7, 11]. Но, в то же время, данная формула для практических применений является довольно трудоемкой. К тому же в ряде практических задач кроме ПРВ необходимо знание и кумулятивной функции распределения вероятностей (КФР), т.е.

$$F_R(z) = P\{R \leq z\} = \int_0^z f_R(r) dr.$$

Такая необходимость возникает, в частности, в задачах, связанных с определением вероятности пересечения огибающей сигнала некоторого порогового уровня. К их числу, относятся, например, обнаружение сигналов, определение вероятности «обрыва» канала и ряд других. В нашем случае с учетом (3) для КФР огибающей сигнала в канале TWDP можно записать следующее общее выражение:

$$F_R(z) = \int_0^z \frac{r}{\pi\sigma_d^2} \exp\left(-\frac{r^2 + 2K_{TW}}{2\sigma_d^2}\right) \times \left( \int_0^\pi \exp(K_{TW}\Delta_{TW} \cdot \cos\theta) \times I_0\left[\frac{r}{\sigma_d} \sqrt{2K_{TW} \cdot (1 - \Delta_{TW} \cdot \cos\theta)}\right] d\theta \right) dr. \quad (7)$$

При использовании аппроксимации нужно, очевидно, заменить в этом выражении подынтегральную функцию (3) выражением (6). Но сложность вычислений при этом не намного меньше, а практические удобства также не очевидны. С учетом указанных обстоятельств целью данной статьи является исследование возможности применения более простой и удобной для практического применения аппроксимации распределения огибающей сигнала в канале TWDP.

## 1 Разработка метода аппроксимации

Рассматриваемый в статье метод аппроксимации основан на использовании известного распределе-

ния Накагами, который уже неоднократно показывал хорошие результаты в задачах аппроксимации распределения огибающих сигналов [2]. Полученная этим методом аппроксимация определяется небольшим набором физически прозрачных параметров и при всей своей простоте обеспечивает, как правило, вполне приемлемую для практических применений точность вычислений. Плотность распределения Накагами, как известно [2], имеет следующий вид:

$$f_{Nakag.}(r) = \frac{2}{\Gamma(M)} \cdot \left(\frac{M}{\Omega}\right)^M \cdot r^{2M-1} \cdot \exp\left\{-\frac{Mr^2}{\Omega}\right\}, \quad (8)$$

где  $M, \Omega$  – параметры распределения. В свою очередь, плотности (8) соответствует КФР следующего вида:

$$F_R(r) = \frac{\gamma(M, M \cdot r/\Omega)}{\Gamma(M)}, \quad (9)$$

где  $\Gamma(\alpha)$  – полная, а

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} \cdot t^{\alpha-1} dt \quad (10)$$

– неполная гамма-функция [12]. Функция (10) подробно табулирована и входит во все известные вычислительные математические пакеты, в частности, широко распространенный пакет Матлаб. Поэтому вычислительных проблем с использованием КФР (9), в отличие от точной формулы (7), не возникает. Осталось лишь связать параметры  $M, \Omega$  распределения (8) с параметрами модели TWDP, определенными выше.

Данную связь несложно установить, если воспользоваться тем известным обстоятельством [2], что наилучшая аппроксимация распределения некоторой неотрицательной случайной величины  $R \geq 0$  распределением Накагами достигается при выборе параметров  $M, \Omega$  следующим образом:

$$\Omega = m_2, \quad M = \frac{(m_2)^2}{m_4 - (m_2)^2}, \quad (11)$$

где  $m_2, m_4$  – соответственно второй и четвертый начальные моменты величины  $R$ , т.е. в нашем случае огибающей сигнала (1). Следовательно, задача сводится к поиску статистических средних

$$m_2 = \left\langle \left| \dot{V}_1 \cdot e^{j\Phi_1} + \dot{V}_2 \cdot e^{j\Phi_2} + \dot{V}_{dif} \right|^2 \right\rangle, \quad (12)$$

$$m_4 = \left\langle \left| \dot{V}_1 \cdot e^{j\Phi_1} + \dot{V}_2 \cdot e^{j\Phi_2} + \dot{V}_{dif} \right|^4 \right\rangle.$$

Используя положенные в основу модели TWDP предположения и выполнив на основе выражений (12) необходимые вычисления, приходим к следующим результатам:

$$m_2 = V_1^2 + V_2^2 + 2\sigma_d^2,$$

$$m_4 = (m_2)^2 + 4\sigma_d^4 + 2 \cdot V_1^2 V_2^2 + 4\sigma_d^2 \cdot (V_1^2 + V_2^2). \quad (13)$$

После подстановки выражений (13) в формулы (11) и с учетом обозначений (4), (5), получаем следующие выражения для параметров искомой аппроксимации:

$$\Omega = 2\sigma_d^2 \cdot (1 + K_{TW}), \quad (14)$$

$$M = \frac{(1 + K_{TW})^2}{1 + 2K_{TW} + K_{TW}^2 \cdot \Delta_{TW}^2/2}. \quad (15)$$

Таким образом, при выборе параметров  $M, \Omega$  в соответствии с выражениями (14) и (15) функции распределения (8) или (9) аппроксимирует неким образом распределение огибающей сигнала (1). Совершенно очевидно, что данная аппроксимация намного проще и удобнее для практических применений по сравнению с аппроксимацией (6). Осталось лишь оценить ее погрешность.

## 2 Сравнительный анализ погрешностей методов аппроксимации

Погрешности рассматриваемого метода оценивались путем сопоставления расчетов ПРВ и КФР по точным формулам и расчетов по формулам (8) и (9) при выборе параметров распределения Накагами согласно выражениям (14), (15). Расчет по точным формулам при этом выполнялся путем численного интегрирования выражений (3) и (7). Одновременно также проводились расчеты и в соответствии с формулой аппроксимации (6), предложенной в [7] для порядка интерполяции  $N=3$  (для краткости будем его называть алгоритм А7). Значения параметров канала TWDP для лучшей сопоставимости были выбраны такими же, как в базовой статье [7]. Некоторые результаты расчетов ПРВ представлены на рис. 1 и рис. 3, а расчетов КФР – на рис. 2 и рис. 4.

Прежде всего, нетрудно видеть, что ошибки аппроксимации зависят от параметров канала  $K_{TW}$  и  $\Delta_{TW}$ . Так, в диапазоне значений  $\Delta_{TW} \leq 0.5$  для всех значений  $K_{TW}$ , принятых в расчетах, результаты расчетов как по методу Накагами, так и алгоритму А7 очень близки к точным значениям. При этом следует заметить, что случай  $\Delta_{TW} = 0$  соответствует фактически однолучевому распространению, при котором канал TWDP совпадает с традиционным райсовским каналом. Однако, при одновременном увеличении параметров  $K_{TW}$  и  $\Delta_{TW}$  погрешности возрастают. При этом ошибка аппроксимации Накагами явно превышает соответствующие значения для алгоритма А7.

Также заметим, что различие в точности между методом Накагами и алгоритмом А7 существенно зависит от того, какая из задач решается: аппроксимация функций плотности ПРВ или кумулятивных

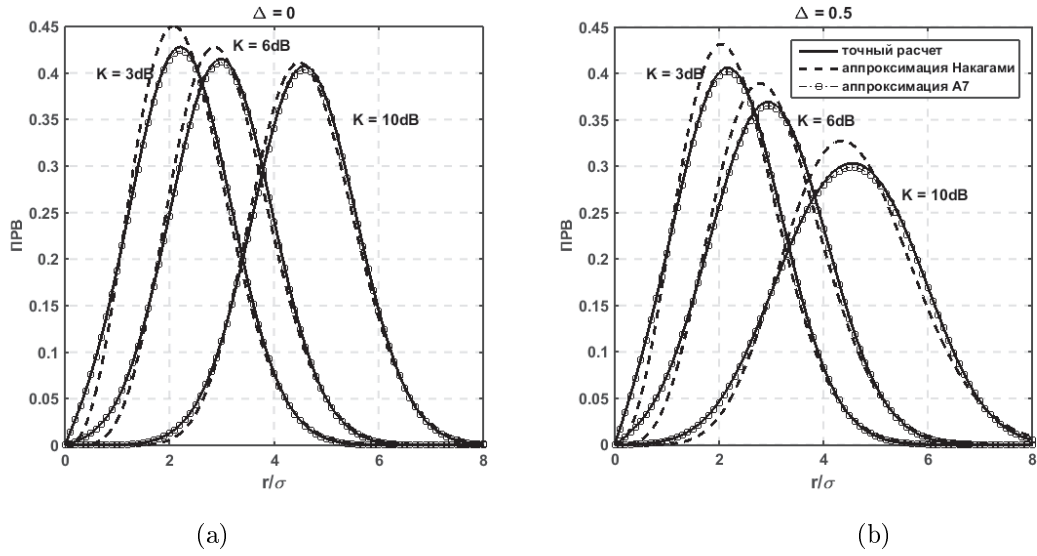


Рис. 1. ПРВ огибающей для нескольких значений K-фактора канала и параметра  $\Delta$

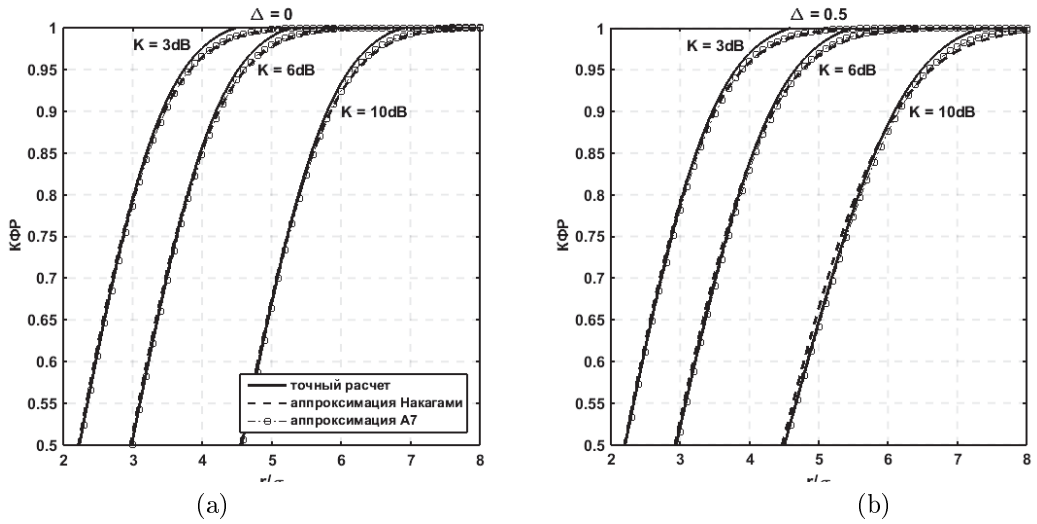


Рис. 2. КФР огибающей для нескольких значений K-фактора канала и параметра  $\Delta$

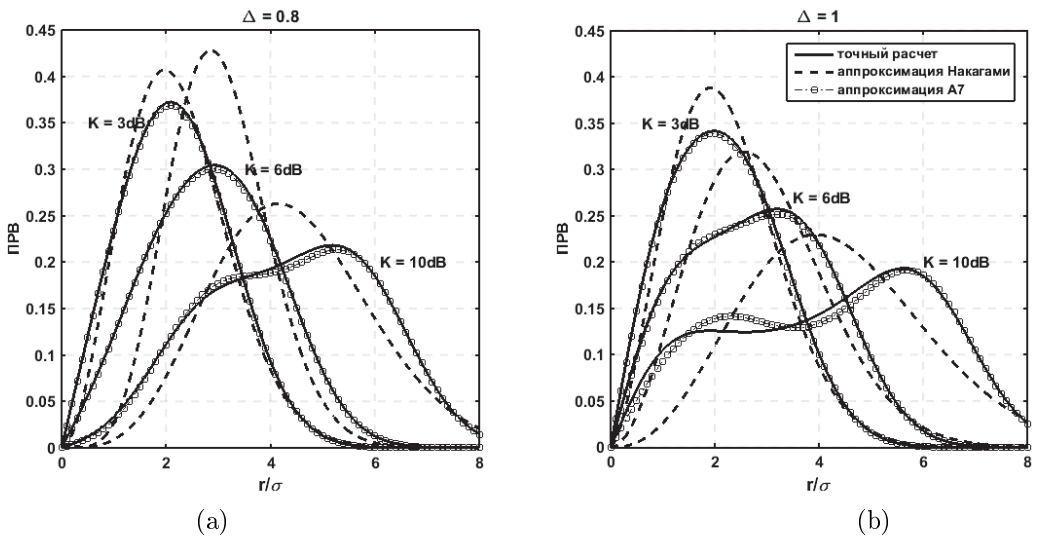


Рис. 3. ПРВ огибающей для нескольких значений K-фактора канала и параметра  $\Delta$

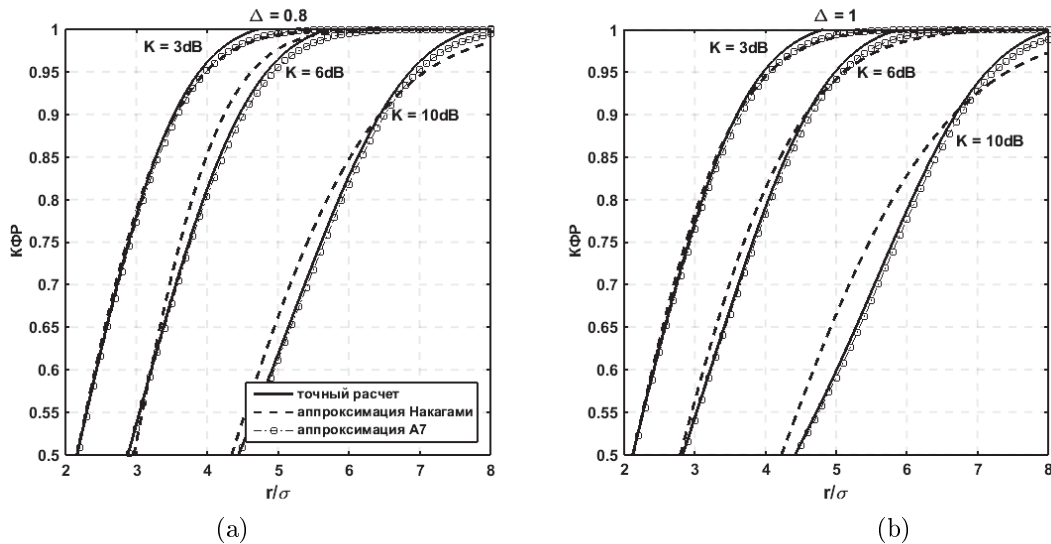


Рис. 4. КФР огибающей для нескольких значений К-фактора канала и параметра  $\Delta$

функций КФР. Для метода Накагами аппроксимация ПРВ более или менее удовлетворительна лишь в диапазоне значений  $\Delta_{TW} \leq 0.5$ , что соответствует доминированию одного из радиолучей. Для больших значений  $\Delta_{TW}$ , т.е. когда амплитуды радиолучей близки между собой, метод Накагами при аппроксимации ПРВ ведет себя неудовлетворительно, в то время, как метод А7 показывает приемлемую точность во всем рассмотренном диапазоне изменения параметров канала.

Принципиально иначе обстоит ситуация при выполнении аппроксимации функций КФР. Хотя в этой задаче метод Накагами также уступает алгоритму А7, но значения погрешностей метода уже выглядят более приемлемо для выполнения тех практических вычислений, которые не требуют чрезмерной точности. Так, для алгоритма А7 погрешность аппроксимации КФР в среднем составляет около 0,2%, в то время, как для метода Накагами указанная погрешность находится в пределах (1–2)%. Относительно неудовлетворительные результаты аппроксимации КФР методом Накагами можно отметить лишь для области значений параметра  $\Delta_{TW}$  близких к единице и при высоких значениях параметра  $K_{TW}$ . Физически эти ситуации соответствуют близким по амплитуде радиолучам и значительному преобладанию когерентных компонент над рассеянной.

Таким образом, анализ погрешностей показывает, что метод Накагами для описания канала TWDP целесообразно использовать главным образом для аппроксимации функций КФР, где этот метод обеспечивает простоту и приемлемую для практических потребностей точность вычисления КФР в большей части диапазона изменений параметров канала. Для задач же аппроксимации ПРВ этот метод в рамках рассматриваемой модели канала вряд ли пригоден.

## Заключение

В работе проведено исследование возможности применения известного метода аппроксимации Накагами для описания распределения вероятностей огибающей сигнала в канале TWDP. Исследование подтвердило такую возможность применительно к функциям КФР в достаточно широком диапазоне значений параметров канала. Что же касается задач аппроксимации ПРВ, то погрешности метода Накагами оказались значительно менее удовлетворительными.

Также следует отметить возможность трактовки полученных результатов с точки зрения интерпретации некоторых натуральных экспериментов. Действительно, точность натуральных экспериментов обычно уступает полученным в работе оценкам точности аппроксимации Накагами. Поэтому можно предположить, что в основе некоторых экспериментов, по которым был сделан вывод о принадлежности распределения огибающей сигналов к распределению Накагами, лежал физический механизм, близкий к модели TWDP. Но данное предположение, разумеется, еще нуждается в проверке.

## References

- [1] Rytov S. M., Kravtsov Y. A. and Tatarskii V. I. (1987) *Principles of Statistical Radiophysics 1*, Springer-Verlag, 253 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69201-7.
- [2] Rytov S. M., Kravtsov Y. A. and Tatarskii V. I. (1988) *Principles of Statistical Radiophysics 2*, Springer-Verlag, 234 p. DOI: 10.1007/978-3-642-61351-7.
- [3] Zochmann E., Hofer M., Lerch M., Pratschner S., Bernado L., Blumenstein J. and others (2019) Position-Specific Statistics of 60 GHz Vehicular Channels During Overtaking. *IEEE Access*, Vol. 7, pp. 14216-14232. DOI: 10.1109/access.2019.2893136.

- [4] Bhargav N., Silva C., Chun Y. and others (2018) On the Product of Two  $k - \mu$  Random Variables and its Application to Double and Composite Fading Channels. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 17 (4), pp. 2457–2470. DOI: 10.1109/TWC.2018.2796562.
- [5] Hajri N., Youssef N., Kawabata T. and others (2009) Statistical Properties of Double Hoyt Fading With Applications to the Performance Analysis of Wireless Communication Systems. *IEEE Access*. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2820746.
- [6] Matolak D. W. and Frolik J. (2011) Worse-than-Rayleigh fading: Experimental results and theoretical models. *IEEE Communications Magazine*, Vol. 49, Iss. 4, pp. 140–146. DOI: 10.1109/mcom.2011.5741158.
- [7] Durgin G., Rappaport T. and Wolf D. d. (2002) New analytical models and probability density functions for fading in wireless communications. *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 50, Iss. 6, pp. 1005–1015. DOI: 10.1109/tcomm.2002.1010620.
- [8] Dey I. and Rossi P. S. (2017) Second-Order Statistics for Indoor Wireless Joint Fading/Shadowing Channels. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, Vol. 16, pp. 1569–1572. DOI: 10.1109/lawp.2017.2651153.
- [9] Rao M., Lopez-Martinez F. J., Alouini M. and Goldsmith A. (2015) MGF Approach to the Analysis of Generalized Two-Ray Fading Models. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, Vol. 14(5), pp. 2548–2561. DOI: 10.1109/twc.2014.2388213.
- [10] Duong T.Q., Zepernick H., Tsiftsis T.A. and Bao V. (2010) Amplify-And-Forward MIMO Relaying with OSTBC over Nakagami-m Fading Channels. *2010 IEEE International Conference on Communications*. DOI: 10.1109/icc.2010.5501922.
- [11] Zöchmann E., Caban S., Mecklenbräuer C. F., Pratschner S., Lerch M., Schwarz S. and Rupp M. (2019) Better than Rician: modelling millimetre wave channels as two-wave with diffuse power. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 21(2019). DOI: 10.1186/s13638-018-1336-6.
- [12] Gradshteyn I. S. and Ryzhik I. M. (2007) Table of integrals, series, and products. *Academic Press*.

## Апроксимація Накагами розподілу обвідної сигналу в каналі TWDP

*Калюжний О. Я.*

**Постановка задачі.** З розвитком технологій радіозв'язку, особливо, мобільного, усе більш важливу роль відіграє розробка моделей радіоканалів. У даній статті розглядається одна з популярних нині моделей, а саме, двопробенеший радіоканал з розсіюванням потужності сигналу, яку в літературі прийнято позначати аббревіатурою TWDP (від Two-Wave with Diffuse Power). Для цієї моделі відомі як точні, так і наближені вирази для густини розподілу імовірностей (ГРІ) і кумулятивної функції розподілу (КФР) обвідної сигналу. Однак, загальним їх недоліком є висока складність з точки зору практичного застосування. У зв'язку із цим у даній роботі розглядається можливість значно більш простої апроксимації ГРІ та КФР обвідної сигналу на основі методу Накагами.

**Розробка методу.** Апроксимація розподілів по методу Накагами зводиться до обчислення другого та четвертого початкових моментів обвідної сигналу на виході каналу. Такі обчислення й виконані в роботі, що дозволяє представити зазначені моменти у вигляді функцій від двох загальноприйнятих параметрів каналу TWDP: К-фактора та параметра  $\Delta$ , який визначається співвідношенням амплітуд радіо променів.

**Аналіз похибок апроксимації.** Похибки оцінювалися шляхом зіставлення розрахунків ГРІ і КФР за точними формулами та розрахунків із використанням апроксимації Накагами. Паралельно також проводилися розрахунки відповідно до формул апроксимації, що відомі у літературі. Аналіз показав, що похибка методу Накагами при обчисленні КФР є цілком задовільною для практичних потреб майже у всьому діапазоні змін параметрів каналу. У той же час точність апроксимації ГРІ у порівнянні з іншими відомими методами апроксимації виявилася не дуже задовільною.

**Висновки.** Проведені дослідження підтвердили можливість апроксимації КФР обвідної сигналу в каналі TWDP розподілом Накагами. Результати такої ж апроксимації для ГРІ виявилися менш задовільними. Також відзначається корисність отриманих результатів для трактування даних натурних експериментів.

**Ключові слова:** мобільний зв'язок, двопробенеший канал із розсіюванням, дрібномасштабні завмирання, розподіл обвідної сигналу, розподіл Накагами

## Nakagami's Approximation for Distribution of Signal Envelope in TWDP Channel

*Kaliuzhnyi O. Ya.*

**Problem statement.** With the development of radio communication technologies, especially mobile, the choice of radio channel models is playing an increasingly important role. In this paper, one of the currently popular models is considered, namely, a Two-Wave radio propagation with Diffuse Power scattering, which is abbreviated in the literature as TWDP. For this model, both exact and approximate expressions for the Probability Density Function (PDF) and the Cumulative Distribution Function (CDF) of the signal envelope are known. However, their common disadvantage is the high complexity in terms of practical application. In this regard, this paper considers the possibility of a much simpler approximation of the PDF and CDF of a signal envelope based on the Nakagami's distribution.

**Method development.** The approximation of distributions by the Nakagami method comes down to the calculation of the second and fourth moments of a signal envelope at a channel output. Such calculations are performed in the paper, which allows to represent the specified moments as functions of two parameters of the TWDP channel: the K-factor and  $\Delta$ -parameter depending from the ratio of beams amplitudes.

**Analysis of the approximation errors.** Errors were estimated by comparing the calculations for the PDF and CDF as per exact formulas and calculations using the Nakagami approximation. In parallel, calculations were also carried out as per the approximation formulas known in the literature. The analysis showed that the Nakagami

method gives errors in the calculation of the CDF that are acceptable for practical needs in all ranges of parameters values  $K$  and  $\Delta$ . At the same time, the accuracy of the PDF approximation in comparison with other known methods was not very satisfactory.

**Conclusions.** Studies carried out in this paper have confirmed the possibility of approximating the CDF of the signal envelope in the TWDP channel by the Nakagami

distribution. However, the results of such approximation for the PDF were less satisfactory. The usefulness of the obtained results for the interpretation of the data of field experiments is also noted.

*Key words:* mobile communication, two-beam channel with scattering, small-scale fading, envelope distribution, Nakagami's distribution