ПРИСТРОЇ ТА СИСТЕМИ РАДІОЗВ'ЯЗКУ, РАДІОЛОКАЦІЇ, РАДІОНАВІГАЦІЇ

УДК 621.396.26

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ НА ФІКСОВАНОМУ ІНТЕРВАЛІ ДИСКРЕТНОЗНАЧНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ З ВИПАДКОВОЮ СТРУКТУРОЮ

Ільясова Д.Х., магістрант
Жук С.Я., д.т.н., професор
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут", м. Київ, Україна

Вступ

Широке використання для опису радіоелектронних систем, що працюють в умовах апріорної невизначеності знаходять стохастичні процеси з випадковою структурою [1]. Важливим різновидом таких процесів є дискретнозначні послідовності з випадковою структурою, області визначення і значень яких є дискретними множинами. Процеси такого виду дуже часто зустрічаються на практиці і отримали також назву скритих марківських моделей [2]. Однією із основних задач оцінювання випадкових процесів є інтерполяція. Метою статті є синтез алгоритму інтерполяції на фіксованому інтервалі стохастичної дискретнозначної послідовності з випадковою структурою.

Постановка задачі

Математичною моделлю стохастичної дискретнозначної послідовності з випадковою структурою є ланцюг Маркова $S_k^m, m=\overline{1,M}$, матриця ймовірностей переходів $\Pi(S_k^m / S_{k-1}^n, b_{k-1}^i),\ n,m=\overline{1,M}$ якого залежить від значень дискретнозначної послідовності $b_{k-1}^i,\ i=\overline{1,L}$ в момент часу $k-1$. Послідовність $b_k^j, j=\overline{1,L}$ також є ланцюгом Маркова з матрицею ймовірностей переходів $\Pi_{i,j}, i,j=\overline{1,L}$. Таким чином, стохастична дискретнозначна послідовність складається з відрізків марківських послідовностей з різними статистичними властивостями. Перехід від однієї марківської послідовності до іншої відбувається стрибком у випадкові моменти часу і керується значеннями ланцюга Маркова $b_{k-1}^i,\ i=\overline{1,L}$.

Нехай для безпосереднього спостереження доступна реалізація випадкового процесу y_k, який є адитивною сумішшю

$$y_k = q(S_k^m, b_k^j) + \upsilon_k, \tag{1}$$

де $q(S_k^m, b_k^j)$ - детермінована функція від аргументів S_k^m, b_k^j; υ_k - послідовність некорельованих гаусівських велечин з нульовими математичним очікуванням і дисперсією σ_v^2. Розглянемо випадок, коли випадковий процес $Y_N = y_1, ..., y_N$ відомий на фіксованому інтервалі часу $k = \overline{1, N}$.

Синтез алгоритму

Для розв`язання сформульованої задачі розглянемо розширений дискретнозначний процес (S_k^m, b_k^j). З [3] випливає, що розширений процес (S_k^m, b_k^j) володіє марківською властивістю, а його сумісна ймовірність $P(S_k^m, b_k^j)$ розраховується рекурентно по формулі

$$P(S_k^m, b_k^j) = \sum_{n=1}^{M} \sum_{i=1}^{L} \Pi(S_k^m / S_{k-1}^n, b_{k-1}^i) \Pi_{ij} P(S_{k-1}^n, b_{k-1}^i), \qquad (2)$$

Задача інтерполяції на фіксованому інтервалі вирішується у зворотному часі після того як отримано рішення задачі фільтрації у прямому часі. Алгоритм фільтрації розширенного дискретнозначного процесу (S_k^m, b_k^j) є граничним випадком інтерполяційно-фільтрового алгоритму оцінювання, отриманного в [3], при довжині ковзаючого вікна $\Delta = 0$. Його можна представити у вигляді:

$$W(S_k^m, b_k^j) = \frac{f(y_k / S_k^m, b_k^j) \sum_{i=1}^{L} \Pi_{i,j} \sum_{n=1}^{M} \Pi(S_k^m / S_{k-1}^n, b_{k-1}^i) \cdot W(S_{k-1}^n, b_{k-1}^i)}{f(y_k / Y_{k-1})}, \qquad (3)$$

де $W(S_k^m, b_k^j) = P(S_k^m, b_k^j / Y_K)$ - сумісна апостеріорна ймовірність S_k^m, b_k^j при умові, що отримані спостереження Y_K; $f(y_k / S_k^m, b_k^j)$ - функція правдоподібності, яка визначається на основі рівняння (1); $f(y_k / Y_{k-1})$ - умовна щільність ймовірності, яка розраховується по формулі

$$f(y_k / Y_{k-1}) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{L} f(y_k / S_k^m, b_k^j) \sum_{i=1}^{L} \Pi_{i,j} \sum_{n=1}^{M} \Pi(S_k^m / S_{k-1}^n, b_{k-1}^i) \cdot W(S_{k-1}^n, b_{k-1}^i).$$

Оптимальній алгоритм фільтрації (3) є рекурентним і описує еволюцію сумісної апостеріорної імовірності $W(S_k^m, b_k^j)$ розширеного процесу (S_k^m, b_k^j) у прямому часі.

У відповідності до методики, наведеної в [1], оптимальний алгоритм фільтрації розширеного процесу (S_k^m, b_k^j) можна представити у вигляді наступних рекурентних рівнянь:

$$W^*(S_k^m, b_k^j) = \sum_{i=1}^{L} \Pi_{i,j} \sum_{n=1}^{M} \Pi(S_k^m / S_{k-1}^n, b_{k-1}^i) \cdot W(S_{k-1}^n, b_{k-1}^i); \qquad (4)$$

$$W(S_k^m, b_k^j) = \frac{f(y_k / S_k^m, b_k^j) \cdot W^*(S_k^m, b_k^j)}{f(y_k / Y_{k-1})}, \qquad (5)$$

де $W^*(S_k^m, b_k^j) = P(S_k^m, b_k^j / Y_{K-1})$ - сумісна екстрапольована ймовірність S_k^m, b_k^j при умові, що отримані спостереження Y_{K-1}.

Задача інтерполяції на фіксованому інтервалі у дискретному часі полягає у обрахуванні сумісних інтерполяційних ймовірностей $P(S_k^m, b_k^j / Y_N) = W^N(S_k^m, b_k^j), k < N$ у зворотному часі.

Розглянемо сумісну інтерполяційну ймовірність $W^N(S_k^m, b_k^j, S_{k-1}^n, b_{k-1}^i)$ для двох сусідніх моментів часу $k, k-1 \leq N$. Використовуючи теорему добутку ймовірностей, запишемо:

$$W^N(S_k^m, b_k^j, S_{k-1}^n, b_{k-1}^i) = W^N(S_k^m, b_k^j) \cdot P(S_{k-1}^n, b_{k-1}^i / S_k^m, b_k^j, Y_N), \quad (6)$$

де $P(S_{k-1}^n, b_{k-1}^i / S_k^m, b_k^j, Y_N)$ - умовна ймовірність S_{k-1}^n, b_{k-1}^iпри умові, що S_k^m, b_k^j, Y_N є відомими.

Визначимо умовну ймовірність $P(S_{k-1}^n, b_{k-1}^i / S_k^m, b_k^j, Y_k)$ у вигляді:

$$P(S_{k-1}^n, b_{k-1}^i / S_k^m, b_k^j, Y_k) = W(S_k^m, b_k^j, S_{k-1}^n, b_{k-1}^i) / W(S_k^m, b_k^j), \quad (7)$$

де $W(S_k^m, b_k^j, S_{k-1}^n, b_{k-1}^i) = P(S_k^m, b_k^j, S_{k-1}^n, b_{k-1}^i / Y_k)$ сумісна апостеріорна ймовірність $S_k^m, b_k^j, S_{k-1}^n, b_{k-1}^i$ при умові, що отримані спостереження Y_k; $W(S_k^m, b_k^j)$ - сумісна апостеріорна ймовірність S_k^m, b_k^j при умові, що отримані спостереження Y_k, яка розраховується по формулі (3).

Використовуючи властивість марковості змішаного процесу, визначимо $W(S_k^m, b_k^j, S_{k-1}^n, b_{k-1}^i)$:

$$W(S_k^m, b_k^j, S_{k-1}^n, b_{k-1}^i) = \frac{f(y_k / S_k^m, b_k^j) \cdot \Pi_{i.j} \cdot \Pi(S_k^m / S_{k-1}^n, b_{k-1}^i) \cdot W(S_{k-1}^n, b_{k-1}^i)}{f(y_k / Y_{k-1})}. \quad (8)$$

З врахуванням (5), (8) рівняння (7) можна представити у вигляді

$$P(S_{k-1}^n, b_{k-1}^i / S_k^m, b_k^j, Y_K) = \Pi_{i.j} \cdot \Pi(S_k^m / S_{k-1}^n, b_{k-1}^i) \cdot W(S_{k-1}^n, b_{k-1}^i) / W^*(S_k^m, b_k^j). \qquad (9)$$

Умовна ймовірність $P(S_{k-1}^n, b_{k-1}^i / S_k^m, b_k^j, Y_k)$, яка описується рівнянням (9), не залежить від виміру y_k і може бути записана у вигляді $P(S_{k-1}^n, b_{k-1}^i / S_k^m, b_k^j, Y_{k-1})$. Це відображає властивість марковості розширеного процесу.

Отже оптимальний алгоритм інтерполяції розширеного процесу (S_k^m, b_k^j) на фіксованому інтервалі можна отримати у вигляді рівняння:

$$W^N(S_{k-1}^n, b_{k-1}^i) = \frac{\sum_j \Pi_{i,j} \sum_m W^N(S_k^m, b_k^j) \cdot P(S_k^m / S_{k-1}^n, {}^i_{k-1}) \cdot W(S_{k-1}^n, b_{k-1}^i)}{W^*(S_k^m, b_k^j)}. \qquad (10)$$

Оптимальній алгоритм інтерполяції на фіксованому інтервалі (10) є рекурентним і описує еволюцію сумісної інтерполяційної імовірності $W^N(S_k^m, b_k^j)$ розширеного процесу (S_k^m, b_k^j) у зворотному часі. Інтерполяційні імовірності $W^N(S_k^m)$ дискретнозначної послідовності з випадковою структурою S_k^m розраховуються по формулі

$$W^N(S_k^m) = \sum_{j=1}^{L} W^N(S_k^m, b_k^j)\,. \quad (11)$$

Результати експериментальних досліджень

Аналіз оптимальнго алгоритму інтерполяції на фіксованому інтервалі (10) було проведено на прикладі декодування згортального коду зі степінню кодування 1/2, довжиною кодового обмеження K=3 та векторами зв'язків $g_1 = 7$ і $g_2 = 5$ в системі звязку з чотирипозиційною ASK модуляцією {-3,-1,1,3} [3]. Матриця переходів $\Pi_{1,1} = \Pi_{2,2} = 0.5$ та дисперсія шуму в каналі $\sigma_v^2 = 0.5$. Рішення щодо вхідних бітів приймалось по максимуму апостеріорних ймовірностей $W(b_k^j)$, $W^K(b_k^j)$.

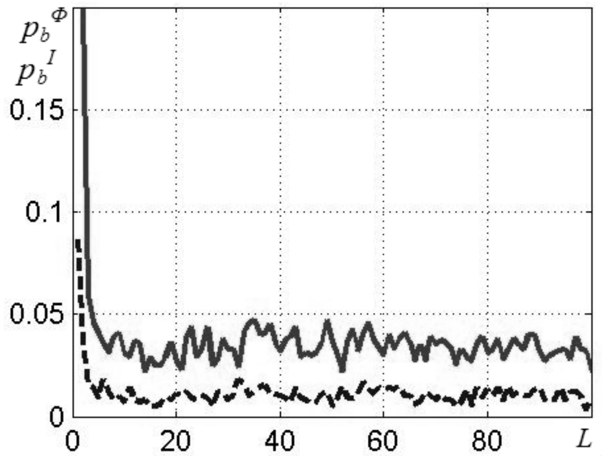

Рис.1

На рис.1 показані усереднені за реалізаціями ймовірності бітової помилки фільтраційного p_e^{Φ} (суцільна лінія) і інтерполяційного p_e^I (пунктирна лінія) алгоритмів в залежності від порядкового номера вхідного біту.

На початковому етапі роботи алгоритму фільтрації спостерігається перехідний процес встановлення помилки. Для розглянутого прикладу алгоритм інтерполяції зменшує ймовірність помилки у 3-4 рази у порівнянні з алгоритмом фільтрації.

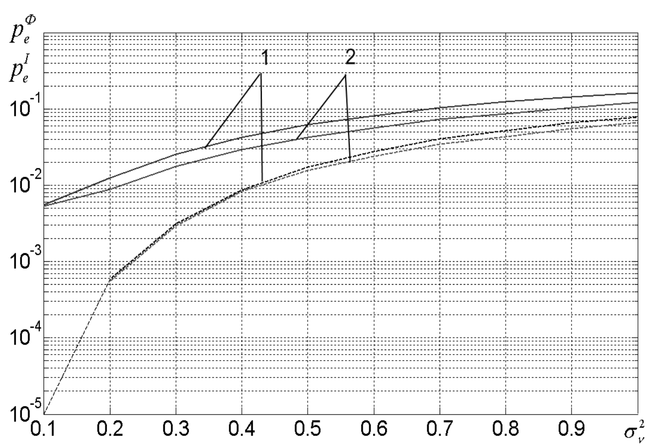

Рис.2

На рис.2 показані p_e^{Φ} (суцільною лінією) і p_e^I (пунктирною лінією) в залежності від дисперсії білого гаусівського шуму в каналі σ_v^2. Було розглянуто дві моделі джерела повідомлень з $\Pi_{1,1} = \Pi_{2,2} = 0.5$ (криві 1) та $\Pi_{1,1} = \Pi_{2,2} = 0.9$ (криві 2). Як видно, збільшення статистичного зв'язку між символами призводить до зменшення бітової помилки як фільтраційного так і інтерполяційного алгоритмів.

Висновки

Оптимальний алгоритм інтерполяції на фіксованому інтервалі дискретнозначної послідовності з випадковою структурою (10) є рекурентним і описує еволюцію сумісної інтерполяційної імовірності $W^N(S_k^m, b_k^j)$ розширеного процесу (S_k^m, b_k^j) у зворотному часі. Для розглянутого прикладу алгоритм інтерполяції зменшує ймовірність бітової помилки у 3-4 рази у порівнянні з алгоритмом фільтрації за рахунок того, що в ньому враховуються всі отримані спостереження Y_N. Збільшення статистичного зв'язку між символами b_k^j призводить до зменшення бітової помилки як фільтраційного так і інтерполяційного алгоритмів.

Література

1. Жук С.Я. Методы оптимизации дискретных динамических систем со случайной структурой / Монография. К.: НТУУ «КПИ», 2008. -232с.

2. Моттль ВВ, Мучник ИБ Скрытые марковские модели в структурном анализе сигналов.–М.: Физматлит, 1999, 352 с.

3. Шпилька О.О., Жук С.Я. Інтерполяційно-фільтровий алгоритм декодування згортальних кодів// Вісник НТУУ «КПІ». Сер.Радіотехніка. Радіоапаратобудування.- *2010-Вип.40. С. 50-55.*

Ільясова Д.Х., Жук С.Я. ***Інтерполяція на фіксованому інтервалі дискретнозначної послідовності з випадковою структурою.*** *Широке використання для опису радіоелектронних систем, що працюють в умовах апріорної невизначеності знаходять дискретнозначні послідовності з випадковою структурою. Враховуючи марківську властивість розширенного процесу, що включає значення дискретнозначної послідовності і тип її структури, отримано оптимальний алгоритм інтерполяції на фіксованому інтервалі дискретнозначної послідовності з випадковою структурою. Даний алгоритм є рекурентним і описує еволюцію сумісної інтерполяційної імовірності розширеного процесу у зворотному часі. Аналіз оптимального алгоритму інтерполяції на фіксованому інтервалі було проведено на прикладі декодування згортального коду шляхом статистичного моделювання на ЕОМ. Для розглянутого прикладу алгоритм інтерполяції зменшує ймовірність бітової помилки у 3-4 рази у порівнянні з алгоритмом фільтрації за рахунок того, що в ньому враховуються всі отримані спостереження. Збільшення статистичного зв'язку між вхідними символами призводить до зменшення бітової помилки як фільтраційного так і інтерполяційного алгоритмів.*

Ключові слова*: інтерполяція, марківська послідовність, максимум апостеріорної ймовірності.*

Ильясова Д.Х., Жук С.Я. ***Интерполяция на фиксированном интервале дискретнозначной последовательности со случайной структурой.*** *Широкое использование для описания радиоэлектронных систем, которые работают в условиях априорной не-*

определенности находят дискретнозначные последовательности со случайной структурой. Учитывая марковское свойство расширенного процесса, которое включает значения дискретнозначной последовательности и тип её структуры, получен оптимальный алгоритм интерполяции на фиксированном интервале дискретнозначной последовательности со случайной структурой. Данный алгоритм является рекуррентным и описывает эволюцию совместной интерполяционной вероятности расширенного процесса в обратном времени. Анализ оптимального алгоритма интерполяции на фиксированном интервале было реализовано на примере декодирования сверточного кода путем статистического моделирования на ЭОМ. Для рассмотренного примера алгоритм интерполяции уменьшает вероятность битовой ошибки в 3-4 раза по сравнению с алгоритмом фильтрации за счет того, что в нем учитываются все полученные наблюдения. Увеличение статистической зависимости между входными символами приводит к уменьшению битовой ошибки как фильтрационного так и интерполяционного алгоритмов.

Ключевые слова: *интерполяция, марковская последовательность, максимум апостериорной вероятности.*

Ilyasova D.H., Zhuk S.Y. ***Interpolation on a fixed interval discrete-valued sequence with random structure.*** *Discrete-valued sequences with random structure are widely used to describe electronic systems that operate under a priori uncertainty. An optimal interpolation algorithm on a fixed interval discrete-valued sequence with random structure have been obtained considering the Markov property of an extended process, which includes the value of a discrete-type sequence and its structure. This algorithm is recursive, and describes the evolution of the joint interpolation probability of the extended process in reverse time. Analysis of the optimal interpolation algorithm on a fixed interval was implemented by the example of decoding of a convolutional code by means of statistical computer modeling. For this example interpolation algorithm reduces the bit error probability to 3-4 times compared with the algorithm of filtering due to the fact that it takes into account all the received observations. The increase of statistical dependence between input symbols leads to a decrease in bit error rate in filtration and interpolation algorithms.*

Key words: *interpolation, Markov's sequence, maximum of a posteriori probability.*