

# Двополюсна схема заміщення електричного кола постійного струму з залежними джерелами напруги, еквівалентна за потужністю

Артеменко М. Ю., Петров Д. О., Кутафін Ю. В.

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

E-mail: artemenko\_m\_ju@ukr.net

Відомий понад століття принцип еквівалентного джерела, сформульований у вигляді теорем Тевенена та Нортонна, нещодавно був удосконалений І. Барбі уведенням вимоги енергетичної еквівалентності первинного кола та його двополюсної схеми заміщення. Проаналізовано особливості та недоліки існуючих двополюсних схем заміщення електричного кола постійного струму (ЕКПС), еквівалентних первинному колу за потужністю, та сформульована мета роботи: втілення нового енергетичного змісту принципу еквівалентного джерела для класу ЕКПС, що містять як незалежні, так і залежні джерела напруги й резистори, шляхом розроблення нової двополюсної схеми заміщення та дослідження умов узгодження її навантаження для досягнення максимального ККД. Запропонована перша в цьому класі ЕКПС чотирихелементна двополюсна схема заміщення, яка відрізняється від схемного еквівалента Барбі наявністю джерела струму, керованого струмом навантаження, вихідні затискачі якого приєднані до джерела напруги еквівалентного генератора. Відомі формули розрахунку параметрів елементів двополюсних схемних еквівалентів Тевенена та Нортонна були доповнені новими аналітичними залежностями параметра залежного джерела струму від векторних і матричних коефіцієнтів макромоделі первинного кола в базисі контурних струмів та експериментальних даних дослідів розриву й замикання вихідних полюсів. Також встановлені нові аналітичні співвідношення для розрахунків узгодженого опору навантаження та величини максимального ККД нової двополюсної схеми заміщення. Достовірність результатів дослідження підтверджена еквівалентністю отриманих формул відомим співвідношенням, справедливим для іншого класу ЕКПС, та віртуальними експериментами з дослідження ват-вольтних характеристик і максимізації ККД первинного кола. Отримані результати можуть бути використані для енергетичної оптимізації ЕКПС, підсилювальні та перетворювальні елементи яких працюють в лінійному режимі роботи, що моделюються залежними джерелами напруги.

*Ключові слова:* двополюсна схема заміщення; еквівалентність за потужністю; максимізація ККД

DOI: [10.20535/RADAP.2021.85.5-13](https://doi.org/10.20535/RADAP.2021.85.5-13)

## Вступ

Принцип еквівалентного джерела (інші назви – теорема про еквівалентне джерело або генератор, теореми Тевенена та Нортонна) є однією з ключових концепцій теорії лінійних електричних кіл [1–3], що в своєму традиційному розумінні дозволяє замінити електричне коло постійного струму (ЕКПС) довільної складності реальним джерелом, яке абсолютно точно відтворює вольт-амперну характеристику первинного кола на двох виділених полюсах. Першими цей принцип сформулювали у своїх добре відомих теоремах Тевенен [4] та Нортон [5] і запропонували перші варіанти двополюсних схемних еквівалентів, у подальшому названими на честь їх творців. На основі цих еквівалентів

в роботах [6–10] був розроблений та вдосконалений метод еквівалентного генератора, що широко застосовується в теорії лінійних електричних кіл для розрахунку струму чи напруги однієї вітки, яка представляється навантаженням відповідного еквівалентного генератора [1–3]. Однак енергетичні властивості первинного кола зазначені схемні еквіваленти відображають неадекватно. Зокрема, ККД схемного еквівалента Тевенена **прямує** до одиничного значення, якщо опір навантаження **спрямувати** до нескінченності [1], в той час як в схемному еквіваленті Нортонна та реальному первинному колі за таких умов величини ККД **прямують** до нуля внаслідок нульової потужності навантаження та наявності внутрішніх втрат енергії. Аналогічна невідповідність має місце, якщо опір навантаження

**спрямувати** до нуля: ККД схемного еквівалента Нортона прямує до одиничного значення [1], а в схемному еквіваленті Тевенена та реальному первинному колі ці величини прямують до нуля.

Лише нещодавно трактування принципу еквівалентного джерела було розвинуте в [11], де І. Барбі висунув ідею створення двополусної схеми заміщення з мінімально можливою кількістю внутрішніх елементів, яка була б еквівалентна первинному колу не тільки за вольт-амперною характеристикою (ВАХ) на зовнішніх полюсах, але і за сумарною потужністю внутрішніх втрат. Запропонована ним для реалізації такого розуміння принципу еквівалентності двополусна трьохелементна схема заміщення (рис. 1) та первинне коло, що складається з незалежних джерел напруги та резисторів, мають ідентичні ВАХ на зовнішніх полюсах та однакові сумарні потужності внутрішніх втрат для будь-якого навантаження. Від добре відомої схеми заміщення Тевенена з джерелом електрорушійної сили (ЕРС)  $E_{ab}$  та опором  $R_{ab}$  еквівалентного генератора запропонований варіант відрізняється наявністю резистора  $R_P$ , величина опору якого обирається за формулою  $R_P = E_{ab}^2/P_P$ , де  $P_P$  – сумарна потужність усіх споживачів первинного кола в режимі розриву вихідних затисків [11]. В роботі [12] Л. Караддіні поширив новий енергетичний зміст принципу еквівалентного джерела на клас ЕКПС, що містять незалежні джерела як напруги, так і струму, запропонував декілька нових двополусних схемних еквівалентів цього класу, а також дослідив умови узгодження навантаження для досягнення максимального ККД. Розвиваючи власні ідеї, І. Барбі в наступній роботі [13] запропонував спрощену двополусну схему заміщення для ЕКПС, що складаються з незалежних джерел струму та резисторів, а також сформулював (щоправда, без доведення) теорему про структуру узагальненого двополусного схемного еквівалента ЕКПС із резисторів та незалежних джерел, що відрізняється від схем Л. Караддіні. В [14] були досліджені енергетичні властивості першого двополусного схемного еквівалента І. Барбі [11] й показано, що величина  $\rho = R_{ab}/R_P$ , яка розраховується за параметрами схеми (рис. 1), а також на основі експериментальних даних дослідів розриву та замикання вихідних полюсів, є єдиним фактором, що визначає максимальний ККД первинного кола при узгодженні навантаження, а також в цій роботі встановлена залежність параметра від бажаного значення ККД.

Загальним недоліком усіх енергетично еквівалентних двополусних схемних заміщення, представлених в [11–13], є те, що вони призначені для ЕКПС, які складаються виключно з незалежних джерел постійної напруги та резисторів. Це не дозволяє моделювати лінійні активні електричні кола постійного струму з залежними джерелами, що відображають підсилювальні та перетворювальні елементи

електричних об'єктів в лінійному режимі роботи [1–3].

Метою даної роботи є втілення нового енергетичного змісту принципу еквівалентного джерела для класу ЕКПС, що містять як незалежні, так і залежні джерела напруги й резистори, шляхом розроблення нової двополусної схеми заміщення та дослідження умов узгодження її навантаження для досягнення максимального ККД. Отримані результати можуть бути використані для оптимізації енергетичних режимів автономних об'єктів, що можуть бути представлені ЕКПС з залежними джерелами напруги, в умовах обмеженого енергоресурсу.

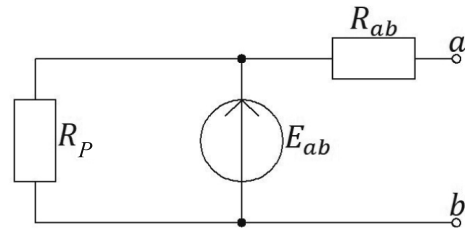


Рис. 1. Двополусна схема заміщення електричного кола постійного струму [11]

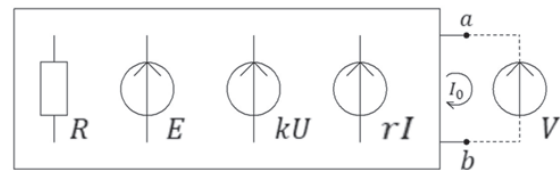


Рис. 2. Умовне позначення схеми первинного кола та її елементів

## 1 Обґрунтування структури та параметрів двополусної схеми заміщення ЕКПС з залежними джерелами напруги

Для обґрунтування енергетичної еквівалентності первинного кола, що складається з резисторів, залежних і незалежних джерел напруги та його двополусної схеми заміщення, знайдемо для них аналітичні залежності сумарної потужності споживачів від струму навантаження. Для цього виділимо в первинному колі (рис. 2) два зовнішні полюси  $ab$ , приєднаємо до них ідеальне джерело напруги зі змінюваною величиною ЕРС  $V$ , що моделюватиме напругу навантаження, позначимо струм утвореного зовнішнього контуру, який збігається зі струмом навантаження, як  $I_0$ , та запишемо систему рівнянь за

методом контурних струмів у векторно-матричній формі:

$$\begin{cases} R_0 I_0 + \mathbf{r}_0^T \mathbf{i} = E_0 - V; \\ \mathbf{r} I_0 + \mathbf{R} \mathbf{i} = \mathbf{e}, \end{cases} \quad (1)$$

де  $R_0, E_0$  – власний опір та контурна ЕРС зовнішнього контуру первинного кола;  $\mathbf{r}_0^T$  – вектор-рядок взаємних опорів між зовнішнім та внутрішніми контурами;  $^T$  – знак транспонування;  $\mathbf{i}, \mathbf{e}$  – вектори струмів та ЕРС внутрішніх контурів первинного кола;  $\mathbf{r}$  – вектор-стовпець взаємних опорів між внутрішніми та зовнішнім контурами;  $\mathbf{R}$  – матриця внутрішніх контурних опорів. Виразимо вектор внутрішніх контурних струмів з другого рівняння (1)

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} I_0 = \mathbf{G} \mathbf{e} - \mathbf{G} \mathbf{r} I_0; \\ \mathbf{G} &= \mathbf{R}^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

та підставимо його значення в перше рівняння (1):

$$(R_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{G} \mathbf{r}) I_0 = (E_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{G} \mathbf{e}) - V. \quad (3)$$

Позначивши  $E_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{G} \mathbf{e} = E_{ab}$ ;  $R_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{G} \mathbf{r} = R_{ab}$ , отримуємо аналітичні вирази для ЕРС та внутрішнього опору еквівалентного генератора схемного еквівалента Тевенена, що збігаються з отриманими в [11]. Експериментально ці величини знаходять за дослідями розриву та замикання вихідних полюсів. В режимі розриву величина зовнішньої ЕРС дорівнює напрузі розриву  $V = U_P$ , а струм навантаження нульовий  $I_0 = 0$ , і з (1) отримуємо, що  $U_P = E_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{G} \mathbf{e} = E_{ab}$ . В режимі замикання зовнішня ЕРС нульова  $V = 0$ , а струм навантаження дорівнює струмові замикання  $I_0 = I_3$ , і з (3) аналогічно [11] отримуємо, що  $R_{ab} = R_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{G} \mathbf{r} = U_P / I_3$ . Знайдемо сумарну потужність усіх споживачів первинного кола, що за балансом потужностей дорівнює сумарній потужності усіх джерел цього кола, використавши (2):

$$\begin{aligned} P_1 &= \mathbf{e}^T \mathbf{i} + (E_0 - V) I_0 = \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{e} + (E_0 - \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{r}) I_0 - V I_0 = \\ &= P_P + E_+ I_0 - V I_0, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $P_P = \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{e}$  – сумарна потужність усіх споживачів внутрішнього кола в режимі розриву вихідних затискачів при  $I_0 = 0$ , вираз для якої збігається з отриманим в [11];  $E_+ = E_0 - \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{r}$  – еквівалентна сумарна ЕРС внутрішнього кола, що фігурує коефіцієнтом пропорційності в складовій потужності внутрішніх втрат, яка залежить від струму навантаження  $I_0$ . Значення цієї ЕРС відрізняється від ЕРС еквівалентного генератора на величину різницевої ЕРС

$$\begin{aligned} E_{\Delta} &= E_+ - E_{ab} = (E_0 - \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{r}) - (E_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{G} \mathbf{e}) = \\ &= (\mathbf{r}_0^T \mathbf{G} - \mathbf{r}^T \mathbf{G}^T) \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (5)$$

За відсутності залежних джерел напруги матриця контурних опорів симетрична відносно головної

діагоналі, тому  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$ ;  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$ ;  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$  та  $E_{\Delta} = 0$ ;  $E_+ = E_{ab}$ , і адекватною є двополюсна схема заміщення [11] на рис. 1. За наявності залежних джерел напруги їх параметри вносяться в матрицю  $\mathbf{R}$  та вектори  $\mathbf{r}_0^T, \mathbf{r}$  несиметричним чином, тому в загальному випадку  $\mathbf{R} \neq \mathbf{R}^T$ ;  $\mathbf{G} \neq \mathbf{G}^T$ ;  $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{r}$  і  $E_{\Delta} \neq 0$ . Таким чином, виявлена важлива характерна особливість лінійних ЕКПС з залежними джерелами: еквівалентна сумарна ЕРС, що визначає складову потужності внутрішніх втрат, пропорційну струму навантаження, не дорівнює ЕРС еквівалентного генератора схемного еквівалента Тевенена. Це потребує введення в відому двополюсну схему заміщення [11] додаткових структурних елементів, що забезпечуватимуть її еквівалентність за потужністю.

Двополюсна схема заміщення, що пропонується (рис. 3), відрізняється від схеми Барбі [11] залежним джерелом струму  $J = k_J I_0$ , що керується струмом зовнішнього контуру  $I_0$ . Знайдемо величину коефіцієнта передачі цього джерела  $k_J$  з умови забезпечення такої самої залежності сумарної потужності усіх споживачів схеми заміщення від струму навантаження, що й для первинного кола за формулою (4).

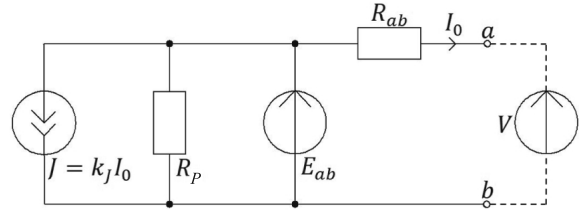


Рис. 3. Запропонована двополюсна схема заміщення ЕКПС

Двополюсна схема заміщення (рис. 3) містить єдине ідеальне джерело з ЕРС величиною  $E_{ab}$ , через яке протікають три складові струму: струм паралельно увімкненого резистора з опором  $R_P = E_{ab}^2 / P_P$ , струм послідовно увімкненого резистора величиною  $I_0$  та струм залежного джерела величиною  $k_J I_0$ . Вказана аналітична залежність потужності двополюсної схеми визначається виразом:

$$\begin{aligned} P_2(I_0) &= E_{ab} (E_{ab} / R_P + I_0 + k_J I_0) - V I_0 = \\ &= P_P + E_{ab} I_0 (1 + k_J) - V I_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Із порівняння (4) та (6) встановлюємо вираз для величини коефіцієнта передачі залежного джерела струму:

$$k_J = E_+ / E_{ab} - 1 = E_{\Delta} / E_{ab}. \quad (7)$$

Величина цього коефіцієнта також може бути встановлена за результатами дослідів розриву та замикання вихідних полюсів. З (4) отримуємо, що в режимі замикання, при  $V = 0$ , сумарна потужність усіх споживачів  $P_3 = P_P + E_+ I$ , отже, сумарна

ЕРС може бути визначена дослідним шляхом за формулою:

$$E_+ = (P_3 - P_P)/I_3, \quad (8)$$

що веде до наступного виразу для коефіцієнта передачі залежного джерела струму:

$$k_J = \frac{P_3 - P_P}{I_3 U_P} - 1. \quad (9)$$

Таким чином, уведення в двополюсну схему заміщення [11] додаткового структурного елемента у вигляді залежного джерела струму, керованого струмом, з зазначеним способом увімкнення та коефіцієнтом передачі забезпечує її енергетичну еквівалентність первинному колу постійного струму за наявності в його складі залежних джерел напруги. Це відкриває можливість досліджувати енергетичні властивості первинної схеми на її спрощеній двополюсній схемі заміщення, наприклад, оптимізувати параметри навантаження для досягнення максимального ККД.

## 2 Узгодження навантаження двополюсної схеми заміщення для досягнення максимального ККД

Нехай зовнішнє джерело з ЕРС  $V$  моделює напругу навантаження. Знайдемо оптимальне значення цієї величини, що забезпечує максимальний ККД двополюсної схеми заміщення. Потужність навантаження визначається виразом  $P_H = V I_H$ , потужність єдиного джерела в режимі живлення навантаження знайдемо із (6) та (7) у вигляді  $P_{ДЖ} = P_P + E_+ I_H$ . Вираз для ККД двополюсної схеми заміщення з урахуванням величини струму навантаження  $I_H = (E_{ab} - V)/R_{ab}$  перетворюється наступним чином:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P_H}{P_{ДЖ}} = \frac{V I_H}{P_P + E_+ I_H} = \frac{V}{E_+ + P_P/I_H} = \\ &= \frac{V}{E_+ + P_P R_{ab}/(E_{ab} - V)} = \\ &= \frac{V/E_{ab}}{E_+/E_{ab} + P_P R_{ab}/E_{ab}^2 (1 - V/E_{ab})} = \\ &= \frac{E_{ab} y / E_+}{1 + \rho(1 - y)^{-1}} = \frac{y/(k_J + 1)}{1 + \rho(1 - y)^{-1}}, \end{aligned} \quad (10)$$

де  $\rho = P_P R_{ab}/E_{ab} E_+ = R_{ab}/R_P(k_J + 1) = P_P/E_+ I_3 = P_P/(P_3 - P_P)$  – узагальнений фактор втрат, що визначається як параметрами запропонованої двополюсної схеми заміщення, так і експериментальним шляхом;  $y = V/E_{ab}$  – відносне значення шуканого параметра.

Дослідження на екстремум аналітичної функції  $\eta(y)$  дає оптимальне значення аргументу

$$y_0 = V_0/E_{ab} = \sqrt{1 + \rho}(\sqrt{1 + \rho} - \sqrt{\rho}). \quad (11)$$

Йому відповідає значення струму навантаження, що забезпечує максимальний ККД,

$$I_{H0} = (E_{ab} - V_0)/R_{ab} = I_3(1 - y_0),$$

пропорційне струмові замикання. Відзначимо, що вектор активного струму трифазної чотирипровідної системи живлення, що максимізує її ККД, також є пропорційним вектору струмів замикання трифазного джерела на опори лінії передачі [15].

Максимальне значення ККД

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \eta(y_0) = \frac{E_{ab} y_0 / E_+}{1 + \rho(1 - y_0)^{-1}} = \frac{(\sqrt{1 + \rho} - \sqrt{\rho})^2}{k_J + 1} = \\ &= \left( \sqrt{\frac{P_3}{P_3 - P_P}} - \sqrt{\frac{P_P}{P_3 - P_P}} \right)^2 \times \frac{U_P I_3}{P_3 - P_P} = \\ &= \frac{U_P I_3}{(\sqrt{P_P} + \sqrt{P_3})^2} \end{aligned} \quad (12)$$

досягається за оптимального значення опору навантаження

$$\begin{aligned} R_{H0} &= \frac{V_0}{I_{H0}} = \frac{y_0 R_{ab}}{1 - y_0} = R_{ab} \sqrt{1 + \rho^{-1}} = \\ &= \sqrt{R_{ab}[R_{ab} + R_P(k_J + 1)]} = \frac{U_P}{I_3} \sqrt{1 + \frac{E_+ I_3}{P_P}} = \\ &= \frac{U_P}{I_3} \sqrt{\frac{P_3}{P_P}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Вирази в (12) та (13) після останніх знаків рівності повністю збігаються з результатами досліджень [12] складніших двополюсних схем заміщення ЕКПС з незалежними джерелами як напруги, так і струму, еквівалентних за потужністю. Це дозволяє стверджувати, що зазначені вирази для оптимального значення опору навантаження та максимального значення ККД, засновані на результатах дослідів розриву та замикання, є справедливими для будь-яких лінійних ЕКПС.

## 3 Верифікація отриманих аналітичних виразів віртуальним експериментом

Проілюструємо процеси знаходження параметрів запропонованої двополюсної схеми заміщення та узгодження навантаження для отримання максимального ККД на прикладі лінійного ЕКПС з залежними джерелами напруги на рис. 4, для якого

$$\begin{aligned} E_1 &= 10 \text{ В}; E_2 = 20 \text{ В}; R_i = i \text{ кОм}; \\ i &= 1, 2, \dots, 6; R = 3 \text{ кОм}; k = 1. \end{aligned}$$

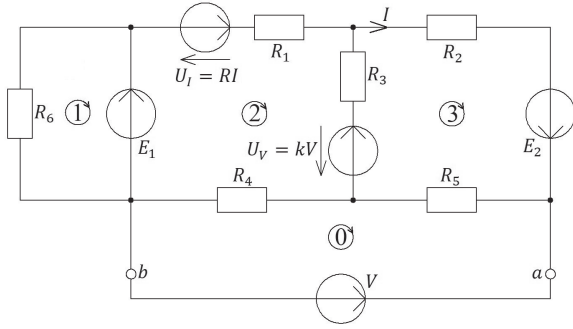


Рис. 4. Схема досліджуваного первинного кола з залежними джерелами напруги

Для обґрунтування коефіцієнтів матрично-векторної системи рівнянь за методом контурних струмів сформуємо скалярні рівняння для контурних струмів другого та третього незалежних контурів в символічному вигляді (номери незалежних контурів показані на рис. 4 цифрами 0, 1, 2, 3, обведеними кружечками; напрями обходу всіх контурів приймаються за ходом годинникової стрілки; одиниці виміру всіх величин представлені в СІ).

$$\begin{aligned}
 E_1 &= -R_{20}I_0 + R_{22}I_2 - R_{23}I_3 - U_I + U_V = \\
 &= -R_4I_0 + (R_1 + R_3 + R_4)I_2 - R_3I_3 - RI_3 + \\
 &+ k_V[R_5(I_3 - I_0) + R_4(I_2 - I_0)] = \\
 &= [-4I_0 + 8I_2 - 3I_3 - 3I_3 + 5(I_3 - I_0) + \\
 &+ 4(I_2 - I_0)] \times 10^3 = (-13I_0 + 12I_2 - I_3) \times 10^3; \\
 E_2 &= -R_{30}I_0 - R_{32}I_2 + R_{33}I_3 - U_V = \\
 &= [-5I_0 - 3I_2 + (5 + 3 + 2)I_3 - 5(I_3 - I_0) - \\
 &- 4(I_2 - I_0)] \times 10^3 = (4I_0 - 7I_2 + 5I_3) \times 10^3.
 \end{aligned}$$

Підстановка числових значень параметрів елементів дає наступну матрично-векторну систему рівнянь для первинного кола (рис. 4):

$$10^3 \times \begin{bmatrix} 9 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -13 & 0 & 12 & -1 \\ 4 & 0 & -7 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V \\ -10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Із порівняння з (1) встановлюємо значення скалярних, векторних та матричних параметрів моделі первинного кола:

$$R_0 = 9 \times 10^3; E_0 = 0;$$

$$\mathbf{r}_0 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}; \mathbf{r} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 \\ -13 \\ 4 \end{bmatrix}; \mathbf{e} = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \end{bmatrix}.$$

З урахуванням квазидіагональної структури матриці  $\mathbf{R}$  обернену до неї матрицю розрахуємо у вигляді

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 5/53 & 1/53 \\ 0 & 7/53 & 12/53 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{10^{-3}}{318} \begin{bmatrix} 53 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 6 \\ 0 & 42 & 72 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

За формулами (3), (5), (7) розраховуємо параметри запропонованої двополюсної схеми заміщення:

$$E_{ab} = E_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{G} \mathbf{e} = -\frac{1}{318} \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 53 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 6 \\ 0 & 42 & 72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \frac{1830}{53} = 34,5283;$$

$$R_{ab} = R_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{G} \mathbf{r} = \left( 9 + \frac{1}{318} \begin{bmatrix} 0 & 330 & 384 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -13 \\ 4 \end{bmatrix} \right) \times 10^3 = \frac{18 \times 10^3}{53} = 339,6226;$$

$$E_+ = E_0 - \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{r} = -\frac{1}{318} \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 53 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 6 \\ 0 & 42 & 72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -13 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1470}{53} = 27,7358;$$

$$k_J = \frac{E_+}{E_{ab}} - 1 = \frac{1470}{53} / \frac{1830}{53} - 1 = -\frac{12}{61} = -0,196721;$$

$$P_P = \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{e} = \frac{10^{-3}}{318} \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 53 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 6 \\ 0 & 42 & 72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \frac{467}{3180} = 0,146855;$$

$$R_P = \frac{E_{ab}^2}{P_P} = \left( \frac{1830}{53} \right)^2 / \frac{467}{3180} = \frac{1830^2 \times 60}{53 \times 467} = 8118,217.$$

Для перевірки еквівалентності за потужністю первинному колу запропонованої двополюсної схеми заміщення з розрахованими параметрами побудуємо експериментально зняті графіки ват-вольтних характеристик – залежностей сумарних потужностей незалежних джерел від величини ЕРС зовнішнього джерела для електричних кіл на рис. 1, 3, 4. Аналізуючи ці графіки (рис. 5), констатуємо, що зазначені характеристики запропонованого схемного еквівалента та первинного кола повністю збігаються в діапазоні напруг  $0 - U_P$ , що свідчить про еквівалентність відповідних кіл за потужністю, а графіки характеристик схемного еквівалента Барбі та первинного кола мають лише одну спільну точку, яка відповідає напрузі розриву при нульовому струмі навантаження.

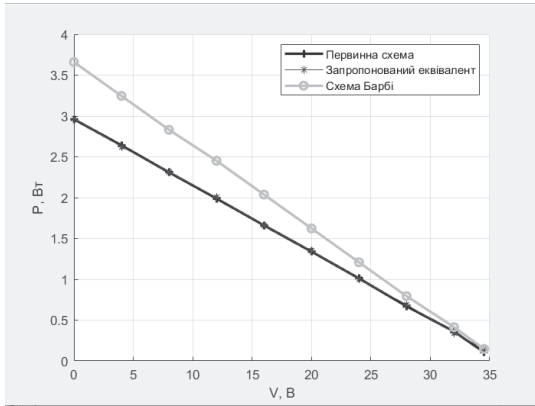


Рис. 5. Графіки ват-вольтних характеристик для електричних кіл на рис. 1, 3, 4

Розраховуємо параметри узгодженого навантаження

$$\begin{aligned} R_{H0} &= \sqrt{R_{ab}[R_{ab} + R_P(k_J + 1)]} = \\ &= \sqrt{\frac{18 \times 10^3}{53} \times \left( \frac{18 \times 10^3}{53} + \frac{1830^2 \times 60}{53 \times 467} \times \frac{49}{61} \right)} = \\ &= \frac{18 \times 10^3}{53} \sqrt{\frac{9434}{467}} = 1526.462; \end{aligned}$$

узагальненого фактора втрат

$$\begin{aligned} \rho &= R_{ab}/R_P(k_J + 1) = \frac{18 \times 10^3}{53} \left/ \left( \frac{1830^2 \times 60}{53 \times 467} \times \frac{49}{61} \right) \right. = \\ &= \frac{467}{183 \times 49} = 0,05207984 \end{aligned}$$

та прогнозне значення максимального ККД

$$\eta_0 = \frac{(\sqrt{1 + \rho} - \sqrt{\rho})^2}{k_J + 1} = 0,7917615715.$$

Розрахунки за дослідом розриву та замикання вихідних затисків мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{U_P}{R_{ab}} = \frac{1830}{53} \left/ \frac{18 \times 10^3}{53} \right. = \frac{61}{600} = 101,666666 \times 10^{-3}; \\ P_3 &= P_P + E_+ I_3 = \frac{467}{3180} + \frac{61}{600} \times \frac{1470}{53} = \frac{89}{30} = \\ &= 2,9666666666666666; \\ R_{H0} &= \frac{U_P}{I_3} \sqrt{\frac{P_3}{P_P}} = \frac{18 \times 10^3}{53} \sqrt{\frac{89}{30} \frac{467}{3180}} = \\ &= \frac{18 \times 10^3}{53} \sqrt{\frac{9434}{467}} = 1526.46247; \\ \eta_0 &= \frac{I_3 U_P}{(\sqrt{P_3} + \sqrt{P_P})^2} = \\ &= \frac{1830}{53} \times \frac{61}{600} \left/ \left( \sqrt{\frac{89}{30}} + \sqrt{\frac{467}{3180}} \right)^2 \right. = 0,791761571. \end{aligned}$$

Констатуємо повний збіг значень оптимального опору навантаження та ККД, розрахованих різними способами.

Для експериментального підтвердження цих значень отримаємо аналітичну залежність ККД від опору навантаження для запропонованого схемного еквівалента та нанесемо на її графік дискретні значення результатів віртуальних дослідів. При навантаженні схемного еквівалента на опір навантаження  $R_H$  струм навантаження приймає значення  $I_H = E_{ab}/(R_H + R_{ab})$ , а потужність навантаження  $P_H = I_H^2 R_H$ . Підстановка цих значень у вираз для ККД та подальші перетворення дають наступний вигляд для аналітичної залежності:

$$\begin{aligned} \eta(R_H) &= \frac{P_H}{P_{ДЖ}} = \frac{I_H^2 R_H}{P_P + E_+ I_H} = \\ &= \frac{[E_{ab}/(R_H + R_{ab})]^2 R_H}{P_P + E_+ E_{ab}/(R_H + R_{ab})} = \\ &= \frac{E_{ab}^2 R_H}{(R_H + R_{ab})[P_P(R_H + R_{ab}) + E_+ E_{ab}]} = \\ &= \frac{1}{(1 + R_{ab}/R_H)[(R_H + R_{ab})/R_P + E_+/E_{ab}]} = \\ &= \frac{1}{(1 + R_{ab}/R_H)[(R_H + R_{ab})/R_P + k_J + 1]} = \\ &= \frac{1}{(k_J + 1)(1 + R_{ab}/R_H)[(1 + R_H/R_{ab})\rho + 1]}. \end{aligned}$$

Для отриманих раніше числових значень параметрів схемного еквівалента

$$\begin{aligned} k_J + 1 &= \frac{49}{61}; R_{ab} = \frac{18 \times 10^3}{53}; \\ \rho &= R_{ab}/R_P(k_J + 1) = \frac{467}{183 \times 49} \end{aligned}$$

аналітична залежність набуває кінцевого вигляду

$$\eta(R_H) = \frac{61}{\left(1 + \frac{18000}{53R_H}\right) \left[\frac{467(1+53R_H/18000)}{183} + 49\right]}.$$

Графік цієї залежності (рис. 6) з нанесеними точками віртуального експерименту також підтверджує збіг координат максимуму з розрахованими значеннями. При виборі опору навантаження відповідно класичній рекомендації [1]  $R_H = R_{ab} = 18 \times 10^3 / 53$  для досягнення максимальної потужності навантаження отримуємо величину ККД  $\eta(R_{ab}) = 0.56373$ , що є суттєво меншою за максимальну при оптимальному навантаженні.

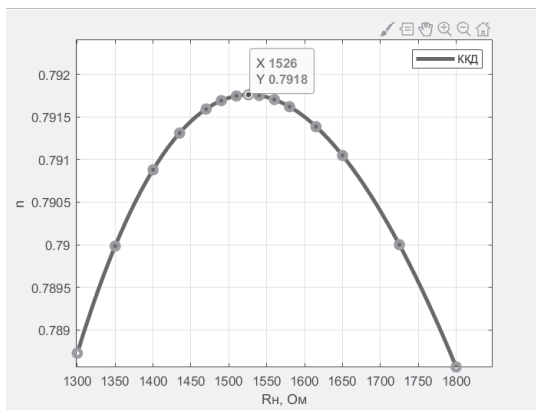


Рис. 6. Графік аналітичної залежності ККД від опору навантаження з нанесеними точками віртуального експерименту

Таким чином, досягнута поставлена мета поширення нового енергетичного змісту принципу еквівалентного джерела на клас ЕКПС, що складаються з залежних та незалежних джерел напруги й резисторів. Запропонована перша в цьому класі кіл чотирьохелементна двополюсна схема заміщення, що відрізняється від схемного еквівалента Барбі наявністю джерела струму, керованого струмом навантаження, вихідні затискачі якого приєднані до джерела ЕРС еквівалентного генератора. Параметр цього залежного джерела струму запропоновано обирати так, щоб складова потужності внутрішніх втрат, що залежить від струму навантаження, була пропорційна сумарній еквівалентній ЕРС, яка для ЕКПС з залежними джерелами напруги відрізняється від ЕРС еквівалентного генератора. Відомі формули розрахунку параметрів елементів двополюсних схемних еквівалентів Тевенена та Барбі були доповнені новими аналітичними залежностями параметра залежного джерела струму від векторних і матричних коефіцієнтів макромоделі первинного кола в базисі контурних струмів та експериментальних даних дослідів розриву й замикання вихідних полюсів. Також отримані дві низки формул на основі параметрів запропонованої схеми заміщення та результатів експерименту для розрахунків узгодженого опору навантаження та величини максимального ККД. Дані віртуальних експериментів підтвердили еквівалентність за потужністю запропонованої двополюсної схеми заміщення та первинного кола, а також прогнозні значення узгодженого опору

навантаження та максимальної величини ККД. Отримані результати можуть бути використані для енергетичної оптимізації ЕКПС, підсилювальні та перетворювальні елементи яких працюють в лінійному режимі роботи, що моделюються залежними джерелами напруги.

## Висновки

1. В зв'язку з нещодавнім розвитком трактування принципу еквівалентного джерела уведенням умови енергетичної еквівалентності двополюсної схеми заміщення [11–13] розділ теорії електричних кіл, в якому розглядається метод еквівалентного генератора, потребує модернізації шляхом викладення нових умов та можливостей принципу еквівалентності за потужністю, а також презентації, аналізу та узгодження опору навантаження нещодавно опублікованих двополюсних схем заміщення, еквівалентних за потужністю.

2. Запропонована перша в класі ЕКПС із залежними джерелами напруги двополюсна схема заміщення, що відрізняється від схемного еквівалента Барбі наявністю джерела струму, керованого струмом навантаження, вихідні затискачі якого приєднані до джерела ЕРС еквівалентного генератора. Встановленні нові аналітичні співвідношення для визначення параметру залежного джерела як на основі векторних та матричних коефіцієнтів макромоделі первинного кола в базисі контурних струмів, так і експериментальним шляхом на основі дослідів розриву та замикання вихідних затискачів. Дані віртуального експерименту підтвердили, що введення нового структурного елемента з зазначеним способом увімкнення та коефіцієнтом передачі забезпечили ідентичність ват-вольтних характеристик запропонованої двополюсної схеми заміщення та первинного кола в усьому діапазоні зміни ЕРС зовнішнього джерела, що свідчить про їх еквівалентність за потужністю.

3. На основі параметрів запропонованої двополюсної схеми заміщення виведені нові аналітичні співвідношення для узгодження опору навантаження ЕКПС зазначеної структури з метою отримання максимального ККД, які еквівалентно перетворюються на відомі співвідношення з використанням даних за дослідом розриву та замикання вихідних полюсів для двополюсних схем заміщення ЕКПС з незалежними джерелами як напруги, так і струму. Це додатково верифікує отримані аналітичні співвідношення, підтверджені також віртуальним експериментом, та дозволяє стверджувати, що зазначені вирази для оптимального значення опору навантаження та максимального значення ККД, засновані на результатах дослідів розриву та замикання, є справедливими для будь-яких лінійних ЕКПС. Отримані результати можуть бути використані для енергетичної оптимізації ЕКПС, підсилювальні та

перетворювальні елементи яких працюють в лінійному режимі роботи, що моделюються залежними джерелами напруги.

## Перелік посилань

1. Основи теорії кіл: Підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч.1/ Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін / За заг. редакцією В.М. Шокало та В.І. Правди. – Х.: Компанія СМІТ, 2008. – 432 с.
2. Alexander, Charles K. *Fundamentals of electric circuits* / Charles K. Alexander, Matthew N. O. Sadiku. – 5th ed. McGraw-Hill, New York, 2013, p. 992.
3. Новгородцев А. Б. 30 лекцій по теорії електричних цепей: учебник для вузов. – СПб, 1995. – 519 с.
4. L. Thévenin. *Sur un Nouveaux Théoreme d'Electricité Dynamique*, in *Comptes Rendus des Séances de l'Academie des Sciences*, Tome: 97, 1883.
5. E. L. Norton. *Design of finite networks for uniform frequency characteristics*, Bell Laboratories, Tech. Rep, TM26-0-1860, 1926.
6. V. D. Landon. The equivalent generator theorem, *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, Vol. 18, No. 2, 1930, pp. 294-297. DOI: 10.1109/JRPROC.1930.221995
7. A. T. Starr. A new theorem for active networks, *Journal of the institution of Electrical Engineers*, Volume: 73, Issue: 441, 1933, pp. 303-308. DOI: 10.1049/jiee-1.1933.0129.
8. J. Millman. A useful network theorem, *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, Volume: 28, Issue: 9, 1940, pp. 413-417. DOI: 10.1109/JRPROC.1940.225885.
9. D. H. Johnson, "Origins of the equivalent circuit concept: the voltage-source equivalent," *Proceedings of the IEEE*, vol. 91, no. 4, pp. 636-640, 2003. DOI: 10.1109/JPROC.2003.811716.
10. D. H. Johnson, "Origins of the equivalent circuit concept: the current-source equivalent," *Proceedings of the IEEE*, vol. 91, no. 5, pp. 817-821, 2003. DOI: 10.1109/JPROC.2003.811795.
11. I. Barbi, "Power conservative equivalent circuit for dc networks," *IEEE Access*, vol. 8, pp. 113667-113674, 2020. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3004026.
12. L. Corradini, "General Power-Equivalent Synthesis of Resistive DC Networks," *IEEE Access*, vol. 8, pp. 160711 - 160722, 2020. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3020652.
13. I. Barbi, "Unified Power Conservative Equivalent Circuit for DC Networks," *IEEE Access*, vol. 8, pp. 178230 - 178237, 2020. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3027489.
14. Артеменко М.Ю., Петров Д.О. Енергетичні властивості двополісної схеми заміщення електричного кола постійного струму, еквівалентної за потужністю. В зб. праць Міжнародної науково-технічної конференції РАДІОТЕХНІЧНІ ПОЛІА, СИГНАЛИ, АПАРАТИ ТА СИСТЕМИ, 16 – 22 листопада 2020р., м. Київ, Україна. С. 133-135.
15. Artemenko M., Batrak L. & Polishchuk S. New definition formulas for apparent power and active current of three-phase power system [Nowa definicja mocy pozornej i prądu czynnego w układzie trójfazowym]. *Przegląd Elektrotechniczny*, No. 95(8), pp. 81-85, 2019. DOI:10.15199/48.2019.08.20.

## References

- [1] Koval L. V., Grinchenko I. O., Milutchenko O. I., Rybin O.I. Edited by Shokalo V. M. and Pravda V. I. *Osnovy teorii kil* [Basics of the electrical circuit theory]. Kharkiv, SMIT company, 2008. 432 p.
- [2] Charles K. Alexander, Matthew N. O. Sadiku. *Fundamentals of electric circuits*, 5th ed., McGraw-Hill, New York, 2013. 992 p.
- [3] Novgorodcev A. B. *30 lekcii po teorii elektricheskikh tsepei* [30 lectures on electrical circuit theory]. St.Pb, Politehnika, 1995. 519 p.
- [4] Thévenin L. *Sur un Nouveaux Théoreme d'Electricité Dynamique*, in *Comptes Rendus des Séances de l'Academie des Sciences*, Tome: 97, 1883.
- [5] Norton E. L. *Design of finite networks for uniform frequency characteristics*, Bell Laboratories, Tech. Rep, 1926, TM26-0-1860.
- [6] Landon V. D. (1930). The Equivalent Generator Theorem. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, Vol. 18, No. 2, pp. 294-297. DOI: 10.1109/JRPROC.1930.221995.
- [7] Starr A. T. (1933). A new theorem for active networks. *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, Volume: 73, Issue: 441, pp. 303-308. DOI: 10.1049/jiee-1.1933.0129.
- [8] Millman J. (1940). A Useful Network Theorem. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, Volume: 28, Issue: 9, pp. 413-417. DOI: 10.1109/JRPROC.1940.225885.
- [9] Johnson D. H. (2003). Origins of the equivalent circuit concept: the voltage-source equivalent. *Proceedings of the IEEE*, vol. 91, no. 4, pp. 636-640. DOI: 10.1109/JPROC.2003.811716.
- [10] Johnson D. H. (2003). Origins of the equivalent circuit concept: the current-source equivalent. *Proceedings of the IEEE*, vol. 91, no. 5, pp. 817-821. DOI: 10.1109/JPROC.2003.811795.
- [11] Barbi I. (2020). Power Conservative Equivalent Circuit for DC Networks. *IEEE Access*, vol. 8, pp. 113667-113674. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3004026.
- [12] Corradini L. (2020). General Power-Equivalent Synthesis of Resistive DC Networks. *IEEE Access*, vol. 8, pp. 160711-160722. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3020652.
- [13] Barbi I. (2020). Unified Power Conservative Equivalent Circuit for DC Networks. *IEEE Access*, vol. 8, pp. 178230-178237. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3027489.
- [14] Artemenko M. Yu., Petrov D. O. (2020). *IX International scientific and technical conference "Radioengineering Field, Signals, Devices and Systems"*. [Energetychni vlastyvoli dvopolusnoi skhemy zamishchennia elektrichnoho kola postiiinoho strumu, ekvivalentnoi za potuzhnistiu. V zb. prats Mizhnarodnoi naukovo-tekhnichnoi konferentsii RADIOTEKHNIChNI POLiA, SYHNALY, APARATY TA SYSTEMY, 16 – 22 lystopada 2020r., m. Kyiv, Ukraina., In Ukrainian], pp. 133-135.
- [15] Artemenko M., Batrak L. & Polishchuk S. (2019). New definition formulas for apparent power and active current of three-phase power system. *Przegląd Elektrotechniczny*, No. 95(8), pp. 81-85. DOI:10.15199/48.2019.08.20.



## Двухполюсная схема замещения электрической цепи постоянного тока с зависимыми источниками напряжения, эквивалентная по мощности

Артеменко М. Е., Петров Д. А., Кутафин Ю. В.

Известный более столетия принцип эквивалентного источника, сформулированный в виде теорем Тевенена и Нортона, недавно был усовершенствован введением требования энергетической эквивалентности первичной цепи и его двухполюсной схемы замещения. Проанализированы особенности и недостатки существующих двухполюсных схем замещения электрических цепей постоянного тока (ЭЦПТ), эквивалентных первичной цепи по мощности, и сформулирована цель работы: воплощение нового энергетического содержания принципа эквивалентного источника для класса ЭЦПТ, содержащих как независимые, так и зависимые источники напряжения и резисторы, путем разработки новой двухполюсной схемы замещения и исследования условий согласования ее нагрузки для достижения максимального КПД. Предложена первая в этом классе четырехэлементная двухполюсная схема замещения, которая отличается от схемного эквивалента Барби наличием источника тока, управляемого током нагрузки, выходные зажимы которого присоединены к источнику ЭДС эквивалентного генератора. Известные формулы расчета параметров элементов двухполюсных схемных эквивалентов Тевенена и Барби были дополнены новыми аналитическими зависимостями параметра зависимого источника тока от векторных и матричных коэффициентов макромодели первичной цепи в базисе контурных токов и экспериментальных данных опытов разрыва и замыкания выходных полюсов. Также установлены новые аналитические соотношения для расчета согласованного сопротивления нагрузки и величины максимального КПД новой двухполюсной схемы замещения. Достоверность результатов исследования подтверждена эквивалентностью полученных формул известным соотношением, справедливым для другого класса ЭЦПТ, и виртуальными экспериментами по исследованию ватт-вольтых характеристик и максимизации КПД первичной цепи. Полученные результаты могут быть использованы для энергетической оптимизации ЭЦПТ, усилительные и преобразовательные элементы которых работают в линейном режиме работы и моделируются зависимыми источниками напряжения.

*Ключевые слова:* двухполюсная схема замещения; эквивалентность по мощности; максимизация КПД

## One-Port Power Conservative Equivalent Circuit of DC Network with Dependent Voltage Sources

Artemenko M. Yu., Petrov D. O., Kutafin Yu. V.

Known for more than a century the principle of the equivalent source, formulated in the form of Thevenen and Norton theorems, has recently been improved by introducing the requirement of energy equivalence of the primary network and its two-pole substitution circuit. Peculiarities and shortcomings of the existing two-pole substitution circuits that equivalent to the primary DC network are analyzed, and the purpose of the work is formulated: implementation of the new energy content of the equivalent source principle for the DC network's class, containing both independent and dependent voltage sources and resistors, by developing a new two-pole substitution circuit and studying the conditions of its load coordination to achieve maximum efficiency. The first in this class four-element two-pole substitution circuit is proposed, which differs from the of Barbi's circuit equivalent by the presence of a current source controlled by the load current, the output terminals of which are connected to the EMF source of an equivalent generator. The known formulas for calculating the element parameters of two-pole Thevenen and Barbi circuit equivalents were supplemented by new analytical dependences of the dependent current source parameter from vector and matrix coefficients of the primary circuit mesh current macromodel and experimental data of output pole rupture and closure experiments. New analytical relations have also been established for the calculations of the agreed load resistance and the maximum efficiency of the new two-pole substitution circuit. The reliability of the study results is confirmed by the equivalence of the obtained formulas with a known ratio, valid for another class of DC network, and virtual experiments to study the watt-volt characteristics and maximize the efficiency of the primary circuit. The obtained results can be used for energy optimization of DC network, the amplifying and converting elements of which are operated in a linear mode and modeled by dependent voltage sources.

*Key words:* one-port equivalent circuit; power conservative; efficiency maximization