

## **МОДЕЛЮВАННЯ КІНЦЕВОГО ЕЛЕМЕНТА В ІМПЕДАНСНІЙ ТОМОГРАФІЇ**

*Рибіна І.О., Гайдаєнко Є.В.<sup>1</sup>*

Електроімпедансна томографія (ЕІТ) має великі перспективи в томографічних медичних дослідженнях, а також в багатьох областях сучасної техніки [1].

На відміну від відомих широко розповсюджених методів, таких як рентгенівська (РТГ КТ), емісійна (РЕТ, СПЕКТ), ультразвукова (УЗ), ядерного магнітного резонансу (ЯМР, МРТ) томографії сигнал-носії інформації навіть в розтині з однорідним розподіленням електричної провідності має нелінійні траєкторії [2,3]. При наявності неоднорідностей провідності в площині розтину траєкторії сигналу-носія інформації (лінії рівного струму та рівної напруги) ще більше (невідомим чином) спотворюються.

Саме тому метод зворотної проєкції, який полягає в ЕІТ в вимірюванні передаточного опору (напруги при відомому струмові збуджуючого джерела струму) і зворотному проєціюванні значення цього опору уздовж ліній рівної напруги (визначених для рівномірного розтину) не є з фізичної і математичної точки зору коректним. Це пов'язане з (невідомим для дослідника) спотворенням ліній рівної напруги в досліджуваному фантомі (розтині), а також з тим, що метою дослідження є встановлення розподілення провідностей (опорів) окремих ділянок розтину, в той час як передаточний опір є складною нелінійною функцією всіх опорів (провідностей) цього розтину [4,5]. Внаслідок вищезгаданого математичний апарат розв'язання зворотної задачі імпедансної томографії є значно складнішим, ніж в інших видах томографії.

В ЕІТ виділяють дві основні математичні задачі – пряму (аналіз) та зворотну (синтез). Розв'язання прямої задачі імпедансної томографії полягає в обчисленні напруг на вимірювальних електродах по обводу томографічного розтину при відомому розподіленні опорів (провідностей) ділянок площини усередині цього розтину. Розв'язання прямої задачі імпедансної томографії є основною для обчислення опорів усередині розтину. При обчисленні вірного для даного фантома розподілення опорів результат обчислення та результат експериментальних вимірювань напруг на вимірювальних електродах (з розумною точністю) співпадають.

### **Постановка задачі**

При розв'язанні прямої задачі ЕІТ надані неперервні розподілення опорів (провідностей) фантома доцільно дискретизувати. При цьому площину фантома розбивають на пікселі, кожен з яких має постійну поверхне-

---

<sup>1</sup> Робота виконана під науковим керівництвом д.т.н., проф. Рибіна О.І.

ву провідність або опір (перша дискретизація), що відповідає представленню неперервного поля провідностей кінцевими елементами [6-9]. Подальше використання неперервних кінцевих елементів теж є незручним [10-12], внаслідок чого їх слід замінити еквівалентними електричними схемами. В цьому випадку електричні моделі пікселей торкаються один одного вже не боками, а лише вузлами в вершинах відповідних геометричних фігур (трикутників, квадратів і т. ін.). Такий перехід від пікселя провідності до його електричної моделі назвемо другою дискретизацією.

Трикутні моделі пікселя (рис. 1а) при розбитті поля образу створюють анізотропію поля (рис. 1б,в). Так для моделі рис. 1б. напрямком по діагоналі ліворуч матиме меншу провідність ніж по діагоналі праворуч.

### Теоретичні викладки

Як видно з вищезгаданого, доцільним є вибір квадратного пікселя зображення (рис. 2а.), який слід розбити на чотири прямокутні рівнобедрені трикутники (рис. 2б.). Розбиття на трикутники слід завжди робити, оскільки трикутники опорів (як і геометричний трикутник) є стійкою “електричною фігурою”, тобто існує взаємне однозначне перетворення трикутник опорів - трипроменева зірка і навпаки.

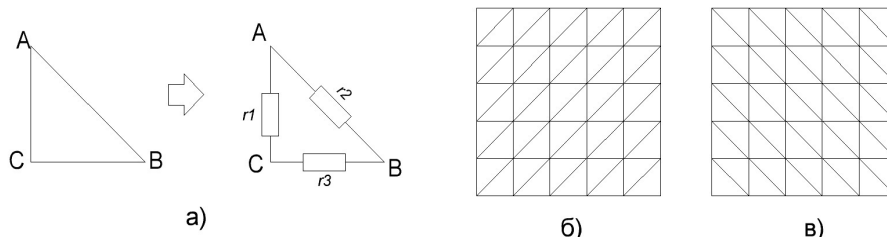


Рис. 1.

На рис. 2в. зображено прямокутний трикутний кінцевий елемент, а на рис. 2г – його еквівалентна електрична схема.

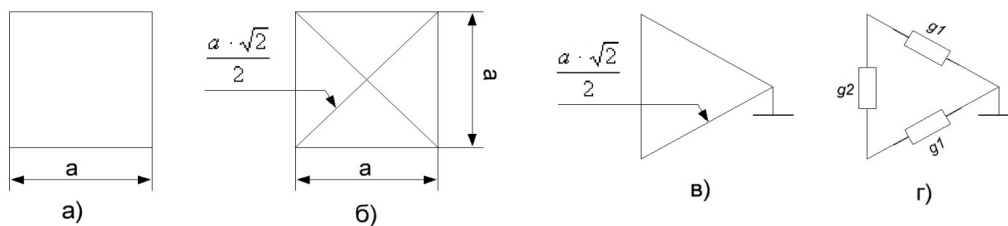


Рис. 2.

Вхідні опори для схеми рис. 2г мають значення.

$$R_{(1+0)(1+0)} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{\sigma_i \cdot S} = \frac{a}{\sigma \cdot S} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; R_{(2+0)(2+0)} = R_{(1+0)(1+0)} = k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, R_{(1+2)(1+2)} = R_{11} + R_{22} - 2 \cdot R_{12} = k \cdot 1 \quad (1)$$

де  $k$  - ваговий коефіцієнт, який визначається геометричними розмірами ( $a$ ,  $S$ ) та питомою поверхневою провідністю  $\sigma_i$ . Оскільки матриця  $\overline{\overline{G}}$  провід-

ностей системи рівнянь вузлових напруг для схеми рис. 2г. та зворотна до неї матриця  $\overline{\overline{R}}$ , обчислені за (1) мають вигляд

$$\overline{\overline{G}} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 & -g_2 \\ -g_2 & g_1 + g_2 \end{bmatrix}; \overline{\overline{R}} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

то, обернувши в (г) матрицю  $\overline{\overline{R}}$ , отримаємо  $\overline{\overline{G}}$  у вигляді

$$\overline{\overline{G}} = \frac{1}{k} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2} - 1} & -\frac{2 \cdot \sqrt{2} - 2}{2 \cdot \sqrt{2} - 1} \\ -\frac{2 \cdot \sqrt{2} - 2}{2 \cdot \sqrt{2} - 1} & \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2} - 1} \end{bmatrix},$$

звідки отримаємо

$$g_1 = \frac{(2 + 4 \cdot \sqrt{2})}{k \cdot 7}; \quad g_2 = \frac{(6 - 2 \cdot \sqrt{2})}{k \cdot 7}; \quad (3)$$

Об'єднавши, згідно рис. 2б, чотири прямокутні трикутники, отримаємо схему рис. 3а, обернену матрицю  $\overline{\overline{R}}_{\square}$  та матрицю провідностей  $\overline{\overline{G}}_{\square}$

$$\overline{\overline{R}}_{\square} = \begin{bmatrix} \frac{6-\sqrt{2}}{8} & \frac{4-\sqrt{2}}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{4-\sqrt{2}}{8} & \frac{8-2\sqrt{2}}{8} & \frac{4-\sqrt{2}}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{4-\sqrt{2}}{8} & \frac{6-\sqrt{2}}{8} \end{bmatrix}; \quad \overline{\overline{G}}_{\square} = \begin{bmatrix} \frac{17-6\sqrt{2}}{32-4\sqrt{2}} & \frac{-9+4\sqrt{2}}{32-4\sqrt{2}} & \frac{1-2\sqrt{2}}{32-4\sqrt{2}} \\ \frac{-9+4\sqrt{2}}{32-4\sqrt{2}} & \frac{17-6\sqrt{2}}{32-4\sqrt{2}} & \frac{-9+4\sqrt{2}}{32-4\sqrt{2}} \\ \frac{1-2\sqrt{2}}{32-4\sqrt{2}} & \frac{-9+4\sqrt{2}}{32-4\sqrt{2}} & \frac{17-6\sqrt{2}}{32-4\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \quad (4)$$

З (4) легко знайти провідності еквівалентної схеми квадратного кінцевого елемента

$$g_1 = \frac{-4 \cdot \sqrt{2} + 9}{k \cdot (32 - 4 \cdot \sqrt{2})}; \quad g_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{2} - 1}{k \cdot (32 - 4 \cdot \sqrt{2})}. \quad (5)$$

Для розв'язання прямої задачі фантом томографічного розтину містить у собі  $M = 200-6000$  таких кінцевих елементів. Порядок системи рівнянь вузлових напруг  $N$ , близький до цих значень, тобто  $N = 200-6000$ , хоча  $N \neq M$ . При цьому розв'язання зворотної задачі вимагає в ітераційній процедурі декілька десятків розв'язань прямої задачі [7].

На розв'язання зворотної задачі певною мірою впливає точність електричної моделі кінцевого елемента рис. 3, елементи якої обчислені за допомогою наближених формул (1) і (2) – (5).

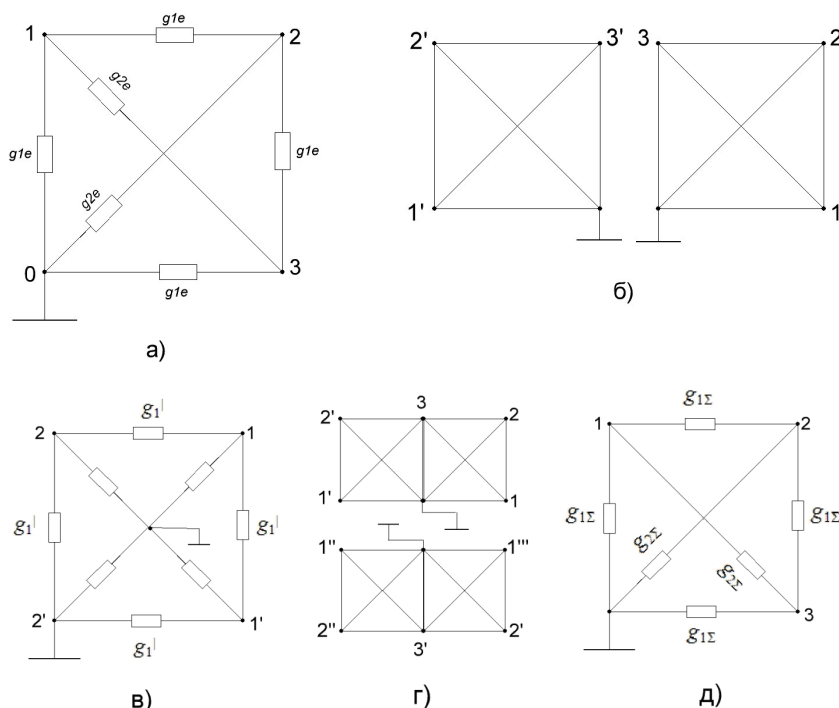


Рис. 3

Підвищення точності обчислень можна забезпечити зменшенням геометричного розміру  $a$  (рис. 2а), але це призведе до катастрофічного збільшення кількості  $M$  кінцевих елементів і порядку  $N$  матриці вузлових провідностей всього фантома, яку для розв’язання прямої задачі слід обертати. Тому збільшення точності моделі рис. 3а є важливою задачею, розв’язання якої зробить розрахунки дійсного значення опорів більш коректними. Для збільшення точності пропонується використати відповідний прийом.

Об’єднаємо зворотні матриці двох пікселів згідно з рис. 3б, використовуючи метод модифікацій [5, 13-14]. Після “вирощування” нескінченних провідностей між вузлами  $1-1^l$  отримаємо обернену матрицю провідностей  $\overline{\overline{R}}_1$  для схеми рис. 3б у вигляді

$$\overline{\overline{R}}_1 = \overline{\overline{k}} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 1^l & 2^l \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1^l \\ 2^l \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{36-12\cdot\sqrt{2}}{8\cdot(6-\sqrt{2})} & \frac{22-9\cdot\sqrt{2}}{8\cdot(6-\sqrt{2})} & \frac{2}{8\cdot(6-\sqrt{2})} & \frac{4-\sqrt{2}}{8\cdot(6-\sqrt{2})} \\ \frac{22-9\cdot\sqrt{2}}{8\cdot(6-\sqrt{2})} & \frac{43-16\cdot\sqrt{2}}{8\cdot(6-\sqrt{2})} & \frac{4-\sqrt{2}}{8\cdot(6-\sqrt{2})} & \frac{9-4\cdot\sqrt{2}}{8\cdot(6-\sqrt{2})} \\ \frac{2}{8\cdot(6-\sqrt{2})} & \frac{4-\sqrt{2}}{8\cdot(6-\sqrt{2})} & \frac{36-12\cdot\sqrt{2}}{8\cdot(6-\sqrt{2})} & \frac{22-9\cdot\sqrt{2}}{8\cdot(6-\sqrt{2})} \\ \frac{4-\sqrt{2}}{8\cdot(6-\sqrt{2})} & \frac{9-4\cdot\sqrt{2}}{8\cdot(6-\sqrt{2})} & \frac{22-9\cdot\sqrt{2}}{8\cdot(6-\sqrt{2})} & \frac{43-16\cdot\sqrt{2}}{8\cdot(6-\sqrt{2})} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Рядок і стовпець з номером 3 та  $3^l$  як і з номерами внутрішніх вузлів (таких, що не будуть з’єднуватись з іншими кінцевими елементами) з матриці  $\overline{\overline{R}}_1$  викреслені.

Після “вирощування” нескінченних провідностей між вузлами  $1^l - 1^{ll}$

та 1 - 1<sup>||</sup> і викреслення рядків та стовпців з цими номерами отримуємо зворотну матрицю  $\overline{\overline{R}}_2$  для рис. 3г, яка є моделлю кінцевого елемента, в якому лінійні розміри (при  $k = \text{const}$ ) зменшені вдвічі. Кількість  $M$  кінцевих елементів фантома також залишається незмінною.

$$\overline{\overline{R}}_2 = k \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 2^| & 1^| \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2^| \\ 1^| \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{b1}{8 \cdot b} & \frac{b2}{8 \cdot b} & \frac{b3}{16 \cdot b} & \frac{b2}{8 \cdot b} \\ \frac{b2}{b3} & \frac{b1}{b2} & \frac{b2}{b3} & \frac{b3}{b2} \\ \frac{8 \cdot b}{b3} & \frac{8 \cdot b}{b2} & \frac{8 \cdot b}{b1} & \frac{16 \cdot b}{b2} \\ \frac{16 \cdot b}{b2} & \frac{8 \cdot b}{b3} & \frac{8 \cdot b}{b2} & \frac{8 \cdot b}{b1} \\ \frac{8 \cdot b}{16 \cdot b} & \frac{16 \cdot b}{8 \cdot b} & \frac{8 \cdot b}{8 \cdot b} & \frac{8 \cdot b}{8 \cdot b} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

де  $b = (6 - \sqrt{2})(9 - 3\sqrt{2})(395 - 216\sqrt{2})$ ;  $b1 = 254688 - 149657\sqrt{2}$ ;  
 $b2 = 54033 - 37506\sqrt{2}$ ;  $b3 = 4147 - 2785\sqrt{2}$ .

В зворотній матриці  $\overline{\overline{R}}_2$  відповідно до алгоритму [15] перенесемо загальний вузол у вузол 2<sup>|</sup>, позначимо колишній загальний вузол номером 4 і викреслимо з отриманої зворотної матриці рядок і стовпець з номером 4, оскільки вузол 4 для кінцевого елемента рис. 3г,д є внутрішнім.

Результуюча матриця  $\overline{\overline{R}}_\Sigma$  для схеми рис. 3д має вигляд

$$\overline{\overline{R}}_\Sigma = k \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{401310 - 224302 \cdot \sqrt{2}}{8 \cdot b} & \frac{505229 - 296529 \cdot \sqrt{2}}{16 \cdot b} & \frac{297391 - 152075 \cdot \sqrt{2}}{16 \cdot b} \\ \frac{505229 - 296529 \cdot \sqrt{2}}{16 \cdot b} & \frac{1010458 - 583058 \cdot \sqrt{2}}{16 \cdot b} & \frac{200655 - 112151 \cdot \sqrt{2}}{8 \cdot b} \\ \frac{297391 - 152075 \cdot \sqrt{2}}{16 \cdot b} & \frac{200655 - 112151 \cdot \sqrt{2}}{8 \cdot b} & \frac{401310 - 224302 \cdot \sqrt{2}}{8 \cdot b} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$b = (6 - \sqrt{2}) \cdot (9 - 3 \cdot \sqrt{2}) \cdot (395 - 216 \cdot \sqrt{2})$

Результат в матриці  $\overline{\overline{R}}_\Sigma$  наведено в радикалах для простоти перевірки. У подальшому їх можна перевести в числа. Зворотна матриця  $\overline{\overline{G}}_\Sigma = \overline{\overline{R}}_\Sigma^{-1}$  дасть значення елементів матриці провідностей системи рівнянь вузлових напруг для схеми рис. 3д, з якої легко знайти значення провідності  $g_{1\Sigma}$ ,  $g_{2\Sigma}$ .

Запропонований прийом переходу до схеми рис. 3в з новими значеннями елементів зворотної матриці, можна повторити для одержання схеми, аналогічної до схеми рис. 3д, що кожного разу зменшить лінійні розміри базового пікселя вдвічі, в той час як кількість рівнянь  $N$  і кінцевих елементів  $M$  залишиться незмінною. Повторення запропонованої процедури декілька разів призведе до асимптотичного наближення моделі до такої, що відповідає неперервному кінцевому елементу.

#### Література

1. Brown B. H. , Varber D. C. Electrical Impedance Tomography, The Institute of Phys-

ical Sciences in Medicine, York. // Clinical Physics and Physiological Measurement. – 1992. – vol.13. – Suppl. A. 207p.

2. Грузман И. С. Математические задачи компьютерной томографии // Соросовский образовательный журнал. – 2001. – №5.

3. Webster I. G. Medical Instrumentation: Appl. and Design, 3<sup>rd</sup> ed., John Wiley, 1998.

4. Основи теорії кіл: Підручник для студентів ВНЗ. Ч1. / Ю. О. Коваль, Л.В. Гринченко, І. О. Милютченко, О. І. Рибін / За редакцією В. М. Шокола та В. І. Правди.

5. Коваль Ю. О., Гринченко Л. В., Милютченко І. О., Рибін О. І. Основи теорії кіл: Підручник для студентів ВНЗ. Ч2. Харків: ХНУРЕ; Колегіум, 2006. – 668с.

6. Сильвестр П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. – М.: Мир, 1986. – 229с.

7. Muray T., Kagawa J. Electrical Impedance Computed Tomography Based on a Finite Elements Model // IEEE Trans. on Biomed. Eng. – 1985. – vol. 32. – p. 177 – 184.

8. Hua P. et al. Finite Elements Modelling of Electrode – Skin Contact Impedance in Electrical Impedance tomography // IEEE Trans. on Biomed. Eng. – 1993. – v. 40. p.335-343.

9. Рыбин А. И., Холоденко Н. А. Восстановление образа в импедансной томографии на базе метода конечных элементов // Радиоэлектроника. 1996. №7. С.38. 47.

10. Рыбин А.И., Холоденко Н.А. Восстановление образа в импедансной томографии методом обратной проекции // Радиоэлектроника. – 1996. - №11. – С.41-48. (Изв. вузов).

11. Абакумов В.Г. Рыбин А.И., Манюк И.А. Реконструкция и реставрация изображений в импедансной томографии // Электроника и связь. – 1998. – Вып. 4. С. 113–116.

12. Рыбин А. И., Манюк И. А. Решение обратной задачи импедансной томографии методом модификаций // Радиоэлектроника – 1998. - №4. – С.36 – 44. (Изв. вузов).

13. Рыбин А. И. Решение задач моделирования обращением матрицы методом взаимных производных // Радиоэлектроника. – 1978. - №6. – С.35 – 47. (Изв. вузов).

14. Рыбин А. И. Численно-символьный метод анализа электрических цепей обобщенным методом модификаций // Праці інституту електродинаміки НАН України: Сб. наук. праць. Київ, ІЕД НАНУ, - 2002. - №1(1). – С.26-30.

15. Rybin A., Trohimenko J., Rodionova M. Analysis of Irregular Networks using Diacoptic Modification of Admittance Matrix//Electr. Eng. (Czech rep.). 1993. №4. P.9-12.

*Рибіна І.О., Гайдаєнко Є.В. Моделювання кінцевого елемента в імпедансній томографії. Запропоновано методика моделювання кінцевого елемента з підвищеною точністю для розв'язання прямої та зворотної задачі імпедансної томографії. Ключові слова: кінцевий елемент, електроімпедансна томографія.*

*Рыбина И.А., Гайдаенко Е.В. Моделирование конечного элемента в импедансной томографии. Приводится методика моделирования конечного элемента с увеличенной точностью для решения прямой и обратной задачи импедансной томографии. Ключевые слова: конечный элемент, электроимпедансная томография.*

*Rybina I. O, Gaidaenko E.V. Finite element modeling in impedance tomography. The accurate modeling of finite element for solving of direct and inverse task are built. Key words: finite element, electrical impedance tomography.*