

УДК 621.391.17

Розв'язок рівняння електромагнітного поля, розсіяного розкритом рупорного випромінювача, методом перевалу

Сидорчук О. Л., Соболенко С. О., Ковальчук В. В., Маричук Л. М.

Житомирський військовий інститут імені С. П. Корольова, м. Житомир, Україна

E-mail: sidorchuk_o@ukr.net

У складі антенних систем сучасних радіоелектронних засобів зв'язку, радіолокації, телебачення тощо широко застосовують рупорні випромінювачі. Перевагою рупорів є простота їх конструкції та високі технічні характеристики. Проте є і певні недоліки. Для їх оцінювання та можливого усунення під час проектування нових антенних систем зазвичай проводять електродинамічний розрахунок електромагнітного поля, розсіяного від рупорного випромінювача, з урахуванням усіх причин розсіювання для його зменшення. Використання відомих методів розрахунку зумовлюють появу алгоритмів у незамкненій формі, що зазвичай не мають точного розв'язання. У тих небагатьох випадках, коли відомий їх чіткий розв'язок, вони мають досить складний вигляд і навіть за допомогою сучасних програмних пакетів обчислювальних засобів не дозволяють з'ясувати фізичну сутність або причину закономірностей такого процесу. У цьому разі широко застосовують наближені асимптотичні методи. З'ясовано, що для розв'язання крайових задач визначення електромагнітного поля, розсіяного від рупорного випромінювача, доцільно скористатися методом перевалу. У статті детально розглянуто цей метод на прикладі рівняння електромагнітного поля, розсіяного розкритом рупорного випромінювача, як однієї з причин дифракції на рупорі з метою її зменшення. Дослідження складається з двох завдань: детального розгляду методу перевалу для розв'язку інтегрального подання рівняння електромагнітного поля; визначення поля, розсіяного розкритом рупорного випромінювача. У задачі розглядається один із випадків довільного падіння плоскої хвилі, а саме коли вона поляризована нормально до площини падіння, тобто площина поляризації хвилі та площина падіння взаємоперпендикулярні. Проведено моделювання проміжних результатів для основної хвилі H_{01} типу та хвиль вищих типів H_{02} , H_{03} , H_{04} , що є визначальними у кінцевих виразах. Отримано вираз для розсіяного розкритом рупора поля за нормальної поляризації падаючої хвилі до площини її падіння після взяття інтегралів методом перевалу. На відміну від складних сучасних програмних продуктів таке рішення дозволить проаналізувати фізичні процеси, які відбуваються під час відбиття електромагнітного поля розкритом рупорного випромінювача. Як приклад розглянуто розсіяне поле у двох площинах. За такими простими виразами, можна легко побудувати діаграми розсіяного поля в програмі Mathcad. Для цього, у подальшому, необхідно врахувати «паразитні» хвилі, викликані нерегулярністю рупора вздовж поздовжньої осі.

Ключові слова: асимптотичні методи досліджень; метод перевалу; розсіяне електромагнітне поле; рупорний випромінювач

DOI: [10.20535/RADAP.2023.91.28-36](https://doi.org/10.20535/RADAP.2023.91.28-36)

Вступ

Сучасні радіоелектронні системи зв'язку, радіолокації, телебачення, а також космічні літальні апарати широко застосовують складні антенні системи, до складу яких входять рупорні випромінювачі, завдяки простоті їх конструкції та високим технічним характеристикам.

Головною перевагою рупорних випромінювачів є: широкий діапазон робочих частот; значний коефіцієнт корисної дії; висока спрямованість, а також можливість випромінювати електромагнітні хвилі

великої потужності [1–5]. Проте рупорні антени мають низку недоліків, які зумовлені: виникненням зворотного випромінювання в ділянку простору позаду рупорного випромінювача; розсіюванням електромагнітного поля розкритом антени, що відбувається внаслідок незбігу розподілу в розкритві полів хвиль, що падають зовні (у режимі приймання) і всередині (у режимі передачі); відбиттям від приймача; неузгодженням поляризації первинного поля і поля антени; розсіюванням на гострих кромках антени і на зовнішніх елементах її конструкції [1–5].

Для оцінювання та можливого усунення таких недоліків під час проектування нових антенних систем проводиться електродинамічний розрахунок електромагнітного поля, розсіяного від рупорного випромінювача, з урахуванням усіх причин розсіювання для його зменшення. Це потребує складних електродинамічних розрахунків з використанням методів, що зумовлюють появу алгоритмів у незамкненій формі. Тоді доцільними стають чіткі інтегральні співвідношення (подання): лема Лоренца, теорема взаємності, умова ортогональності власних хвиль тощо [6–8]. За їх допомогою здійснюється контроль одержуваних результатів, поліпшується їхня збіжність, а в деяких випадках і розрахунок показників, які неможливо визначити без такого подання.

1 Аналіз останніх досліджень і публікацій

У [5] під час досліджень поля, розсіяного розкритим рупорним випромінювачем \vec{E}_{rp} , як однієї з

причин розсіювання, з використанням леми Лоренца всередині рупора поле описано власною функцією номера ν : $\vec{E}_{\mp\nu}, \vec{H}_{\mp\nu}$ з одиничною амплітудою, що зазнає відбиття від розкриття з коефіцієнтом $\rho_{+\nu}$ (Рис. 1).

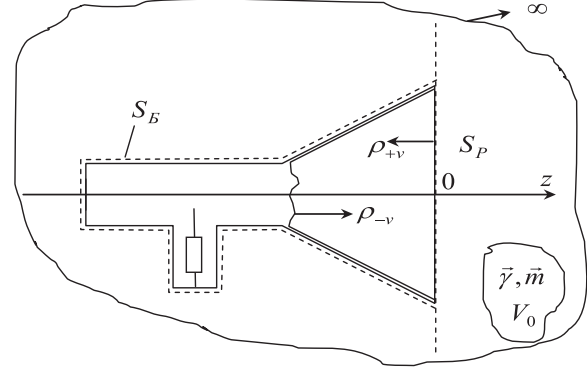


Рис. 1. До застосування леми Лоренца

У перерізі $z = 0$ (Рис. 1) вираз у чіткому інтегральному поданні має такий вигляд [5]:

$$\vec{E}_{rp} = \frac{\vec{e}_p}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \iint_{S_p} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} [\vec{C}_{+\nu} \vec{E}_{+\nu} (1+\rho_{-\nu})] - \vec{E}_{-\nu} \right) \exp(i(k_x x + k_y y)) dx dy \right\} \times \exp(-i(k_x x + k_y y + k_z z)) dk_x dk_y, \quad (1)$$

де $\vec{C}_{+\nu}$ – амплітуда власних функцій:

$$\vec{C}_{+\nu} \cong \frac{\oint_{S_p} \left(\left\{ [\vec{E}_{\Pi}, \vec{H}_{-\nu}] (1+\rho_{+\nu}) - [\vec{E}_{-\nu}, \vec{H}_{\Pi}] (1+\rho_{+\nu}) \right\} d\vec{S} \right)}{N_{\nu} (1 - \rho_{-\nu} \rho_{+\nu})}, \quad (2)$$

$\vec{E}_{\Pi}, \vec{H}_{\Pi}$ – вектори електромагнітного поля, що падає на рупор; $\vec{E}_{-\nu}, \vec{H}_{-\nu}$ – власні функції, що поширюються від горловини до розкриття.

Таке рівняння не є кінцевим. Багато величин у ньому не враховано, й досить складно отримати його точне рішення.

Зазвичай інтегральні подання типу (1) або S-інтегралів використовують для контролю отриманих результатів. У багатьох випадках ці подання дозволяють отримувати аналітичні розв'язки та зводяться до самоузгоджених задач, які враховують зворотний вплив поля випромінювання на первинні джерела, сприяють визначенню апріорної інформації про спектр можливих рішень, а також вирішувати приєднані задачі як специфічні задачі про збудження.

Методи обчислення S-інтегралів типу (1) добре відомі. Їх значення обраховують наближено, для цього застосовують різні числові схеми, або асимптотичні методи, проте найчастіше це метод перевалу або комбінація декількох методів [9–14].

Проблема розрахунку електромагнітного поля (1), згідно з дослідженням авторів [9–15], зводиться до розрахунку інтеграла Фур'є – Бесселя, що отримав назву інтеграл Зоммерфельда. Вейль розвинув метод обчислення асимптотичних значень таких інтегралів, який у подальшому отримав назву методу сідлової точки, або методу перевалу. Відомі й інші підходи, наприклад викладені в роботах Ван дер Поля тощо [11].

Метод перевалу розглядали Р. Миттра і С. Лі у складі аналітичних методів теорії хвилеводів [7]. Особливої уваги вони надавали розвитку принципів різних математичних методів, а не розрахунку часткових завдань, наприклад, розв'язку рівнянь дифрагованого від неоднорідної поверхні електромагнітного поля. Саме це й необхідно дослідити.

Отже, **метою досліджень** є детальний розгляд методу перевалу на прикладі розв'язку рівняння електромагнітного поля, розсіяного розкритим рупорним випромінювачем, як однієї з причин дифракції на рупорі з метою її зменшення.

Дослідження складаються з двох завдань:

1) детальний розгляд методу перевалу щодо його застосування для розв'язку інтегрального подання рівняння електромагнітного поля (1);

2) визначення аналітичного виразу електромагнітного поля, розсіяного розкритим рупорним ви-

проміньовача, як однієї з причин дифракції на рупорі методом перевалу.

2 Застосування методу перевалу для розв'язку інтегрального подання рівняння електромагнітного поля

Інтегральні подання – це запис рівнянь електродинаміки (у будь-якому уніфікованому вигляді) та їх розв'язків у тій чи іншій узагальненій формі. Вони пов'язують загалом електромагнітні поля в електродинамічних структурах та описуються крайовими задачами [13–15].

Під час формулювання крайових задач у теорії хвилеводів найчастіше користуються методом часткових областей або методом зшивання. Для розв'язання крайових задач для відкритих областей найчастіше користуються виразом, що є інтегралом типу

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{-i\alpha z} e^{-\gamma x} d\alpha, \quad (3)$$

де $f(\alpha)$ – функція α , а $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$.

Функція $f(\alpha)$ зазвичай відома, за винятком тих небагатьох випадків, за яких інтеграл не обраховується. Проте поле в дальній зоні, яке, як правило, і становить найбільший інтерес у задачах для відкритих областей, можна подати в більш спрощеному вигляді, якщо застосувати для наближених розрахунків інтеграла саме асимптотичний метод перевалу [7].

Інтеграл (1) є подібним виразу, розглянутому в [7]:

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \exp(-r(i\alpha \sin \theta + \gamma \cos \theta)) d\alpha, \quad (4)$$

$$|\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

У (4) введено полярні координати

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta). \quad (5)$$

Отримаємо основний член розкладу функції $\varphi(r, \theta)$, що визначається інтегралом (3), за умови $kr \rightarrow \infty$.

Проведемо заміну змінних згідно з виразом

$$\alpha = k \sin(W) = k \sin(u + i\nu). \quad (6)$$

Шлях інтегрування, що відповідає дійсній осі на площині α , у [7] позначено літерою P (Рис. 2).

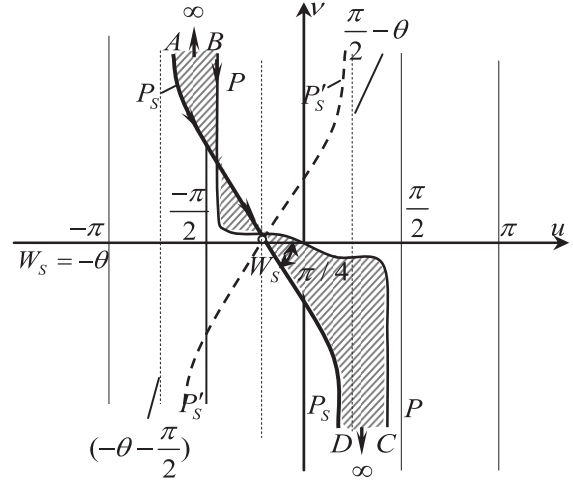


Рис. 2. Лінії найшвидшого спуску в площині W

На всьому шляху P

$$\gamma = \sqrt{(k \sin W)^2 - k^2} = -ik \cos W. \quad (7)$$

Підставляючи (5) і (4) у (3) для сферичної системи координат і площини W , отримаємо

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_P k \cos(W) f(k \sin(W)) e^{krg(W)} dW, \quad (8)$$

де

$$g(W) = i \cos(W + \theta). \quad (9)$$

Тепер вираз (8) стає зручним для застосування методу перевалу.

Суть методу полягає в деформації контуру P (крива BW_sC на Рис. 2), за яким береться інтеграл (8), у новий контур P_s (крива AW_sD на Рис. 2) на комплексній площині W , який обирається так, щоб на ньому $\text{Im } g(W)$ залишалася постійною, а $\text{Re } g(W)$ досягала б максимуму в деякій точці та монотонно спадала за віддалення від W_s . До речі, на конурі P_s може бути декілька точок W_s [7].

Точка W_s має назву сідлової точки або точки перевалу і визначається за таким виразом:

$$g'(W_s) = \left. \frac{dg}{dW} \right|_{W_s} = 0. \quad (10)$$

Якщо $kr \rightarrow \infty$, тобто розглядається поле в дальній зоні, то основний внесок в інтеграл (8) за новим контуром P_s здійснює лише мала площа навколо точки W_s через експоненціальне спадання підінтегрального виразу, що обумовлено множителем $\exp[\text{Re } g(W)]$. Така властивість підінтегрального виразу (8) надасть можливість знайти явний вигляд для наближеного значення розглянутого інтегралу [7].

Почнемо із визначення контуру P_s .

Інтеграл за новим контуром P_s можна апроксимувати виразом

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta P} k \cos(W) f(k \sin(W)) e^{kr g(W)} dW, \quad (11)$$

$$kr \rightarrow \infty.$$

Оскільки функція $f(k \sin(W))$ регулярна на контурі P_s та навколо нього, то зручно скористатися наближеною оцінкою, яка справедлива в межах невеликого відрізка ΔP_s :

$$k \cos(W) f(k \sin(W)) \approx k \cos \theta f(-k \sin(W)), \quad (12)$$

$$W \in \Delta P_s.$$

У такий спосіб отримаємо кінцевий результат для $|\theta| < \pi/2$:

$$\varphi(r, \theta) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i[kr - \pi/4]} [k \cos \theta f(-k \sin \theta)], \quad (13)$$

$$kr \rightarrow \infty.$$

Як випливає із (13), за $kr \rightarrow \infty$ поле в дальній зоні матиме вигляд циліндричної хвилі з кутовим розподілом

$$P(\theta) = k \cos \theta f(-k \sin \theta), \quad (14)$$

який відрізняється від амплітуди плоскої хвилі, що поширюється в напрямку, визначеному кутом θ , у спектральному розкладі (3) лише множителем $k \cos \theta$ [7].

Отже, детально розглянуто метод перевалу для розв'язку чіткого інтегрального подання рівняння електромагнітного поля \vec{E}_{rp} (1), розсіяного розкритим рупорного випромінювача.

3 Визначення електромагнітного поля, розсіяного розкритим рупорного випромінювача, як однієї з причин дифракції на рупорі методом перевалу

Постановка задачі. Нехай на розкритий рупорного випромінювача (Рис. 3) з розмірами розкриття

$$\vec{E}_{Pp\tau}^\perp = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int \left\{ \frac{b_p \sin\left(\frac{k_x b_p}{2}\right)}{\frac{k_x b_p}{2}} \cdot 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_{+n}^{H\perp} \left(\frac{n\pi}{a_p}\right)^2 (1 + \rho_{-n}^H) \frac{f_{-n}(k_y)}{\left(\frac{n\pi}{a_p}\right)^2 - (k_y)^2} - \vec{E}_0 a_p \frac{\sin\left(\frac{a_p}{2}(k_y - k \sin \theta_{II})\right)}{\frac{a_p}{2}(k_y - k \sin \theta_{II})} \right\} \exp(-i(k_x x + k_y y + k_z z)) dk_x dk_y, \quad (15)$$

де

$$f_{-n}(k_y) = \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{k_y a_p}{2}\right) - i \cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{k_y a_p}{2}\right); \quad (16)$$

a_p та b_p під довільним кутом падає плоска електромагнітна хвиля. Необхідно знайти розсіяне антенною поле. Постановку задачі будемо розв'язувати в такій послідовності, як і в роботі [5]. Випадок довільного падіння плоскої хвилі можна розглядати як суперпозицію двох окремих випадків: хвиля поляризована нормально до площини падіння, тобто площина поляризації хвилі та площина падіння взаємно перпендикулярні; хвиля поляризована в площині падіння (площина падіння і площина поляризації збігаються).

Обмежимося лише першим випадком падіння хвилі, що зображено на Рис. 3.

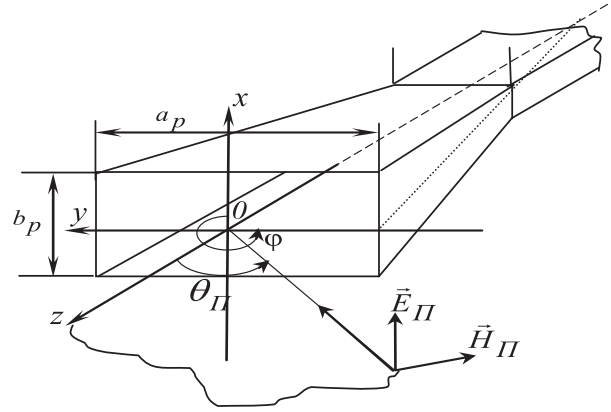


Рис. 3. Падіння плоскої хвилі на розкритий рупор за нормальної поляризації хвилі до площини її падіння

Відомо, що під час розрахунку розсіяного поля методом поперечних перерізів на розкритті рупора, крім збуджених хвиль у розкритті рупора й відбитих від його внутрішніх неоднорідностей, виникають так звані «паразитні» хвилі, викликані нерегулярністю рупора вздовж поздовжньої осі. Ці хвилі вносять свою частку в розсіяне рупором поле, однак вона за малих кутів розкриття рупора незначна, у разі першого наближення ми ними нехтуємо. Врахування «паразитних» хвиль, а також інший випадок падіння електромагнітної хвилі, коли поляризації збігаються, буде розглянуто в подальших публікаціях.

Отже, розсіяне поле, описане виразом (1), після підстановки в нього власних функцій [15] й інтегрування їх за x та y набуде такого вигляду:

k_x, k_y, k_z – проєкції хвильового вектора на осях x, y, z ; $\vec{E}_0(z=0)$ – вектор напруженості електромагнітного поля після врахування граничних умов і доповнення інтегрування до нескінченних меж поза поверхнею рупора; ρ_{+mn}^H – коефіцієнт відбиття від внутрішніх неоднорідностей рупора, що дорівнює

$$\rho_{+mn}^H = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2b_p}\right)^2 - \left(\frac{n\lambda}{2a_p}\right)^2} - 1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2b_p}\right)^2 - \left(\frac{n\lambda}{2a_p}\right)^2}} = -\rho_{+mn}^E, \quad (17)$$

$$C_{+mn}^{H\perp} = -4E_0 b_p f_{+n}(\theta_{II}) \frac{\sin(m\pi)}{m\pi} \times \frac{(1 + \cos\theta_{II}) \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2b_p}\right)^2 - \left(\frac{n\lambda}{2a_p}\right)^2}}{N_{mn}^E \cdot Z_0 (1 - \rho_{-mn}^H \rho_{+mn}^H) \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2b_p}\right)^2 - \left(\frac{n\lambda}{2a_p}\right)^2}\right)} \frac{1}{1 - \left(\frac{ka_p}{n\pi} \sin\theta_{II}\right)^2}. \quad (18)$$

З'ясовано, що, за умови нормальної поляризації хвилі до площини її падіння (Рис. 4), хвилі m типу збуджуватися не будуть.

Для розв'язку рівняння (15), з урахуванням (16)–(18), застосуємо описаний у першій задачі метод перевалу. Для цього подамо рівняння (15) у вигляді (2):

$$\vec{E}_{rpr}^{\perp} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} A_{x1}(k_x) \exp(-ik_x x) dk_x \times \int_{-\infty}^{\infty} A_{x2}(k_y) \exp(-i(k_y y + k_z z)) dk_y, \quad (19)$$

де

$$A_{x1}(k_x) = \frac{b_p \sin\left(\frac{k_x b_p}{2}\right)}{\frac{k_x b_p}{2}}, \quad (20)$$

$$A_{x2}(k_y) = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} -\bar{C}_{+0n}^{H\perp} (1 + \rho_{-n}^H) \frac{f_{-n}(k_y)}{1 - \left(\frac{a_p k_y}{n\pi}\right)^2} - \vec{E}_0 a_p \frac{\sin\left(\frac{a_p}{2}(k_y - k \sin\theta_{II})\right)}{\frac{a_p}{2}(k_y - k \sin\theta_{II})}. \quad (21)$$

Запишемо (19) у сферичній системі координат, беручи до уваги, що зв'язок декартових і сферичних координат має вигляд

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta,$$

де λ – довжина хвилі збудженого в рупорі поля; m, n – кількість стоячих півхвиль, які вкладаються по сторонах a і b поперечного розрізу хвилеводу; a_p, b_p – розміри розкриву за осями x та y відповідно; $\bar{C}_{+mn}^{H\perp}$ – амплітуда хвиль магнітного типу, що дорівнює

отримаємо

$$\vec{E}_{rpr}^{\perp} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} A_{x1}(k_x) \exp(-ik_x r \sin\theta \cos\varphi) dk_x \times \int_{-\infty}^{\infty} A_{x2}(k_y) \exp(-ir(k_y \sin\theta \sin\varphi + k_z \cos\theta)) dk_y. \quad (22)$$

Тепер для взяття інтегралів у (22), відповідно до описаного вище методу перевалу, позначимо

$$k_1^2 = k^2 - k_x^2,$$

враховуючи, що

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2,$$

отримаємо

$$k_1^2 = k_y^2 + k_z^2.$$

Проведемо заміну змінних у такий спосіб:

$$k_y = k_1 \sin W, \quad dk_y = k_1 \cos W dW, \quad k_z = k_1 \cos W,$$

де W – комплексні числа.

З урахуванням прийнятих позначень і заміни змінних інтеграл (22) набуде такого вигляду:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \{A_{x2}(k_1 \sin W) k_2 \cos W \exp(-ik_1 r (\sin\theta \sin\varphi \sin W + \cos W \cos\theta))\} dW. \quad (23)$$

Проведемо заміну:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(W) \exp(\lambda f(W)) dW, \quad (24)$$

де

$$\begin{cases} \varphi(W) = k_2 \cos W A_{x2}(k_1 \sin W); \\ f(W) = -i(\sin \theta \sin \varphi \sin W + \cos W \cos \theta); \\ \lambda = k_1 r. \end{cases} \quad (25)$$

Оскільки функції $f(W)$, $\varphi(W)$ регулярні в даній області, то інтеграл I_1 можна розглядати за кривою P (Рис. 3), яка прямує в нескінченність, при цьому контур інтегрування можна деформувати, залишаючи його кінці нерухомими.

У разі $\lambda \rightarrow \infty$ це справедливо для розгляду поля в дальній зоні. До інтегралу можна застосувати асимптотичний розклад, де головний член асимптотики має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(W) \exp(\lambda f(W)) dW &\approx \\ &\approx \varphi(W_0) \exp(\lambda f(W_0)) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(W_0)|}} \cdot \exp(i\varphi_0), \end{aligned} \quad (26)$$

де W_0 – точка максимуму функції $f(W)$, що визначається із умови $\frac{\partial(f(W))}{\partial W}|_{W=W_0} = 0$, $f''(W_0)$ – друга похідна функції в точці W_0 ; $\varphi_0 = \arg \sqrt{\frac{-1}{f''(W_0)}}$.

З урахуванням прийнятих позначень отримаємо

$$\begin{cases} W_0 = \arctg(\sin \varphi \tan \theta); \\ f'(W) = -i(\sin \theta \sin \varphi \cos W - \sin W \cos \theta); \\ f''(W) = i(\sin \theta \sin \varphi \sin W_0 + \cos W_0 \cos \theta). \end{cases} \quad (27)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} A_{x3}(k \sin z) \exp(-ikr \sin \theta \cos \varphi \sin z + rk \cos z f(W_0)) k \cos z dz. \quad (30)$$

Застосувавши до інтегралу (30) асимптотичну формулу (26), де позначено

$$\begin{cases} \varphi(z) = A_{x3}(k \sin z) k \cos z; \\ f(z) = -\sin z \sin \theta \cos \varphi + f(W_0) \cos z; \\ \lambda = kz, \end{cases}$$

отримаємо

$$I_2 = A_{x3}(k \sin z_0) k \cos z_0 \sqrt{\frac{2\pi}{kr |f''(z_0)|}} \exp(i\varphi_m) \times \exp[kz(-i \sin \theta \cos \varphi \sin z_0 + \cos z_0 f(W_0))], \quad (31)$$

де

$$\begin{cases} z_0 = \arctg \left[\frac{\sin \theta \cos \varphi}{\sin \theta \sin \varphi \sin W_0 + \cos W_0 \cos \theta} \right]; \\ f''(z_0) = i[\sin \theta \cos \varphi \sin z_0 + \cos z_0(\sin \theta \sin \varphi \sin W_0 + \cos W_0 \cos \theta)]; \\ \varphi_m = \arg \sqrt{\frac{-1}{f''(z_0)}}. \end{cases} \quad (32)$$

Інтеграл (23) із урахуванням (24)–(27) дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sqrt{k_1} \cos W_0 A_{x2}(k_1 \sin W_0) \times \\ &\times \sqrt{\frac{2\pi}{r |f''(W_0)|}} \exp(k_1 r f(W_0)) \exp(i\varphi_0). \end{aligned} \quad (28)$$

Підставляючи вираз (28) у формулу (21) і позначивши

$$A_{x3}(k_x) = \sqrt{k_1} A_{x2}(k_1 \sin W_0) A_{x1}(k_x),$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \vec{E}_{rpr}^{\perp} &= \frac{1}{4\pi^2} \cos W_0 \sqrt{\frac{2\pi}{r |f''(W_0)|}} \exp(i\varphi_0) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} A_{x3}(k_x) \exp(-irk_x \sin \theta \cos \varphi + k_1 r f(W_0)) dk_x. \end{aligned} \quad (29)$$

Для взяття інтегралу (29) застосуємо, як і в попередньому випадку, метод перевалу.

Позначимо

$$k_y = k \sin z, \quad dk_x = k \cos z dz.$$

І з урахуванням того, що

$$k_1 = \sqrt{k^2 - k_x^2} = k \cos z,$$

інтеграл (29) набуде такого вигляду:

Результати розрахунків. Отже, розсіяне розкривом рупора поле за нормальної поляризації па-

даючої хвилі до площини падіння після взяття інтегралів набуде такого кінцевого вигляду:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{rpr}^\perp &= \frac{1}{4\pi^2} \cos W_0 \sqrt{\frac{2\pi}{r |f''(W_0)|}} \exp(i\varphi_0) A_{x2}(k \sin W_0 \cos z_0) \times \\ &\times \sqrt{\frac{2\pi \cos z}{r |f''(z_0)|}} A_{x1}(k \sin z_0) k \cos z_0 \exp(i\varphi_m) \exp[rk(-i \sin \theta \cos \varphi \sin z_0 + \cos z_0 f(W_0))]. \end{aligned} \quad (33)$$

Для перевірки отриманих результатів можна розглянути розсіяне розкривом рупорного випромінювача поле у двох площинах $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ або $\varphi = \pi$.

У площині $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ отримаємо

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= -1; \cos \varphi = 0; W_0 = -\theta; \\ z_0 &= 0; f(W_0) = -i; \\ f''(W_0) &= i; \varphi_0 = \frac{\pi}{4}; \varphi_m = \frac{\pi}{4}; f''(z_0) = i; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{rpr}^\perp|_{\varphi=\frac{3\pi}{2}} &= \frac{k \cos \theta}{2\pi r} \exp\left(-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\right)\right) \times \\ &\times A_{x1}(k_x = 0) A_{x2}(k_y = -k \sin \theta). \end{aligned} \quad (35)$$

У площині $\varphi = \pi$:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= 0; \cos \varphi = -1; W_0 = 0; \\ z_0 &= -\theta; f(W_0) = -i \cos \theta; \\ f''(W_0) &= i \cos \theta; \varphi_0 = \frac{\pi}{4}; \varphi_m = \frac{\pi}{4}; f''(z_0) = i; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{rpr}^\perp|_{\varphi=\pi} &= \frac{k \cos \theta}{2\pi r} \exp\left(-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\right)\right) \times \\ &\times A_{x1}(k_x = -k \sin \theta) A_{x2}(k_y = 0). \end{aligned} \quad (37)$$

Вирази для $A_{x1}(k_x)$ і $A_{x2}(k_y)$ визначені формулами (20) і (21).

Отримані вирази (35), (37) із урахуванням формул (20), (21) дозволяють описати розсіяне від розкриву рупора поле для випадку нормальної поляризації падаючої хвилі до площини падіння, якщо відомі коефіцієнти відбиття від позамежних перерізів і навантаження рупора. Отже, задачу розв'язано.

Оскільки вираз (18) входить до складу кінцевих виразів (35) та (37) з'ясовано, що, за умови нормальної поляризації хвилі до площини її падіння (Рис. 3), хвилі m типу збуджуватися не будуть, тобто лише хвилі $\vec{C}_{0n}^{H\perp}$.

Магнітні складові перевипроміненого поля можна отримати з рівнянь Максвелла:

$$\vec{C}_{mn}^{H\perp} = \frac{i}{\omega\mu} \text{rot} \vec{E}_{rpr}^\perp. \quad (38)$$

Для перевірки отриманих проміжних результатів проведено моделювання для основної хвилі H_{01} типу та хвиль вищих типів H_{02}, H_{03}, H_{04} .

Графіки залежностей амплітуди хвилі H_{0n} , тобто $\vec{C}_{+0n}^{H\perp}$ від n наведено на Рис. 4.

З Рис. 4а видно, що падаюча хвиля майже повністю відбивається від розкриву, якщо її довжина більша за резонансну, наприклад $\lambda = 0,05$ м, тобто вона має частоту нижчу критичної, для живлячого рупора хвилеводу. Основна хвиля H_{01} має більш виражений характер порівняно із вищими типами, амплітуди яких досить малі.

На Рис. 4б падаюча хвиля має частоту вищу, за робочий діапазон рупорного опромінювача ($\lambda = 0,01$ м) для живлячого рупора хвилеводу. У такому разі деякі хвилі вищих типів, для яких хвилевід не є позамежним, разом із основною хвилею будуть проникати в нього, а коефіцієнт відбиття для них залежатиме від навантаження.

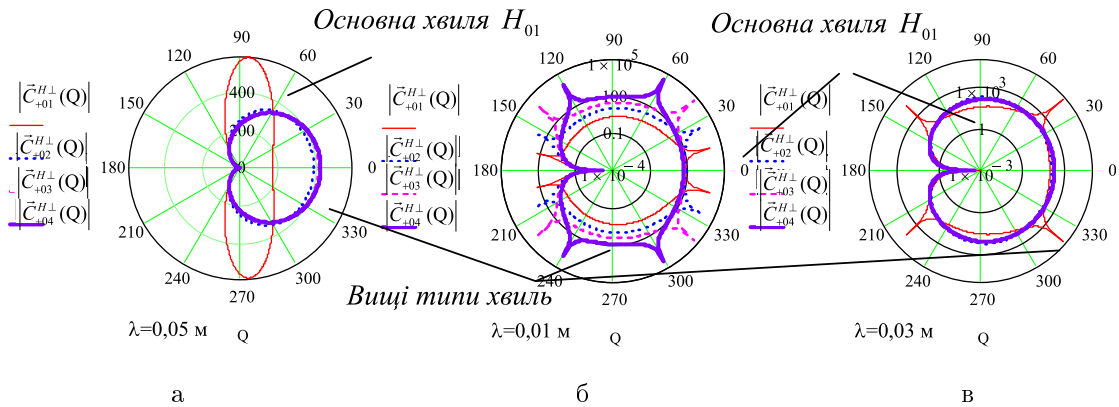


Рис. 4. Графіки залежностей $\vec{C}_{+0n}^{H\perp}$ від n для різних значень довжини хвилі, що падає

Якщо падаюча хвиля має частоту, що входить у робочий діапазон антени, тобто довжина хвилі $\lambda = 0,03\text{ м}$ (Рис. 4в), то основна хвиля H_{01} проходить в живлячий хвилевід. Амплітуди хвиль вищих типів досить незначні. Вищі типи хвиль, збуджені в розкриві, не проходять у хвилевід, а відбиваються від позамежних для них перерізів.

Отже, проведено моделювання проміжних результатів (18), що є визначальними у кінцевих виразах (35) та (37), моделювання яких на цьому етапі не є доцільним, оскільки поки не враховано «паразитні» хвилі, що викликані нерегулярністю рупора вздовж поздовжньої осі z .

Висновки

1. Детально розглянуто метод перевалу розв'язку суворого інтегрального подання аналітичних методів теорії хвилеводів. З'ясовано правомірність такого взяття інтегралів рівняння електромагнітного поля, розсіяного від розкриву рупора.

2. Отримано вираз для розсіяного розкривом рупорного випромінювача електромагнітного поля за нормальної поляризації падаючої хвилі до площини її падіння після взяття інтегралів методом перевалу. Це дозволить проаналізувати фізичні процеси, які відбуваються під час відбиття електромагнітного поля розкривом рупорного випромінювача.

3. Як приклад розглянуто розсіяне поле у двох площинах. За такими простими виразами легко побудувати діаграми в програмі Mathcad із задовільною точністю.

Перспективи подальшого розвитку досліджень. У подальших дослідженнях необхідно привести кінцеві результати аналізу поля, розсіяного розкривом рупорного випромінювача методом перевалу. Для цього необхідно врахувати «паразитні» хвилі, викликані нерегулярністю рупора вздовж поздовжньої осі. Також необхідно провести аналогічні розрахунки для другого випадку суперпозиції падіння електромагнітної хвилі, тобто якщо площини падіння і поляризації збігаються. Буде корисним провести аналіз похибки результатів, отриманих методом перевалу, порівняно з іншими асимптотичними методами.

References

- [1] Dubrovka F. F., Ovsianyk Yu. A. (2009). Dual- And Multiband Horns of feed systems for reflector-type antennas. *Visnyk NTUU KPI Seriya - Radiotekhnika Radioaparotobuduvannia*, Vol. 38, pp. 130-147. doi: 10.20535/RADAP.2009.38.130-147.
- [2] Benenson L. S., Feld Ya. N. (1988). Rasseyaniye elektromagnitnykh voln antennami (obzor) [Scattering of electromagnetic waves by antennas (review)]. *Radiotekhnika i elektronika [Radio engineering and electronics]*, Vol. 33, Iss. 2, pp. 225-246.
- [3] Sirenko Yu. K., Suharevskiy I. V., Suharevskiy O. I., Yashina N. P. (2000). *Fundamentalnyie i prikladnyie zadachi teorii rasseyaniya elektromagnitnykh voln [Fundamental and applied problems of the theory of scattering of electromagnetic waves]*. Harkov: Krok [Kharkov: Krok], 344 p.
- [4] Sydoruk O. L., Zalevskiy V. Y. (2022). Investigation of Electromagnetic Wave Diffraction at the Edges of the Pyramidal Horn Irradiator of the Antenna, as One of the Causes of Scattering. *Visnyk NTUU KPI Seriya - Radiotekhnika Radioaparotobuduvannia*, Vol. 89, pp. 11-20. doi: 10.20535/RADAP.2022.89.11-20.
- [5] Sydoruk O. L. (2011). Calculation of effective surface of dispersion of megaphone aerial at falling on it of wave of free-form with the use of lemma of Lorentz. *The Journal of Zhytomyr State Technological University / Engineering*, Vol. 2(57), pp. 103-113. doi:10.26642/tn-2011-2(57)-103-113.
- [6] Zalevskiy G. S. (2007). Otsinka vidstani mizh ob'ektamy, pry yakii yikh elektromagnitnoiu vzaiemodiieiu mozna znevazhyty, provedena metodom intehralnykh rivnyan [Estimation of the distance between objects, at which their electromagnetic interaction can be neglected, carried out by the method of integral equations]. *Systemy ozbroiennia i viiskova tekhnika [Weapon systems and military equipment]*, Vol. 2, pp. 59-63.
- [7] Mittra R., Lee S. W. (1971). *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves*. NewYork: Macmillan, 302 p.
- [8] Kuznetsov V. L., Filonov P. V. (2010). Uravnenie pogruzheniya dlya obobschennoy matritsy rasseyaniya v teorii neregulyarnykh volnovodov [The immersion equation for the generalized scattering matrix in the theory of irregular waveguides]. *Nauchnyiy vestnik MGTU GA [Scientific Bulletin of MSTU GA]*, Vol. 157, pp. 5-11.
- [9] Konnikov I. A. (2017). Raschet polya v ploskosloistyykh sredah mikroelektroniki [Calculation of the field in plane-layered media of microelectronics]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki [Journal of technical physics]*, Vol. 87, pp. 1615-1623.
- [10] Grinchik N. N. (2008). *Modelirovanie elektricheskikh i teplovykh protsesov v sloistyykh sredah [Modeling of electrical and thermal processes in layered media]*. Minsk, 252 p.
- [11] Li L.-W., Lee C.-K., Yeo T.-S. and Leong M.-S. (2004). Wave mode and path characteristics in a four-layered anisotropic forest environment. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 52, No. 9, pp. 2445-2455. doi: 10.1109/TAP.2004.834021.
- [12] Sautbekov S., Bourgiotis S., Chrysostomou A., Frangos P. (2018). A Novel Asymptotic Solution to the Sommerfeld Radiation Problem: Analytic Field Expressions and the Emergence of the Surface Waves. *Progress In Electromagnetics Research M*, Vol. 64, pp. 9-22. DOI: 10.2528/PIERM17082806.
- [13] Michalski, K. A., and H.-I. Lin (2017). On the far-zone electromagnetic field of a vertical Hertzian dipole over an imperfectly conducting half-space with extensions to plasmonics. *Radio Science*, Vol. 52, Iss. 7, pp. 798-810. doi:10.1002/2017RS006299.
- [14] Christie L., Mondal P. (2016). Mode Matching Method for the Analysis of Cascaded Discontinuities in a Rectangular Waveguide. *Proceedings of the 6th International Conference on Advances in Computing and Communications*, Vol. 93, P. 251-258. doi: 10.1016/j.procs.2016.07.208.

- [15] Vorob'ev S. N., Litvinenko L. N., Prosvirnin S. L. (2005). Operatornyiyy metod v zadache difraktsii elektromagnitnykh voln na polubeskonechnykh lentochnykh reshetkakh [Operator method in the problem of diffraction of electromagnetic waves on semi-infinite strip gratings]. *Radiofizika i radioastronomiya [Radiophysics and radio astronomy]*, Vol. 10, No. 3, pp. 273–283.

Solving an Equation by the Saddle Point Method for the Electromagnetic Field Scattered by the Opening Horn Emitter

Sydorchuk O. L., Sobolenko S. O., Kovalchuk V. V., Maryshchuk L. M.

Horn emitters are widely used as part of antenna systems in modern radio-electronic equipment, radars, television, etc. The simplicity of their design and high-level technical characteristics are major advantages of the emitters. However, there are certain disadvantages. In order to assess and possibly eliminate them, we usually do electrodynamic calculations of the electromagnetic field scattered from the horn emitter when designing new antenna systems and take into account all the factors, which cause scattering in order to reduce it. The well-known calculation methods result in the appearance of algorithms in open form, which usually do not have any exact solutions. In the few cases where their strict solutions are known, the algorithms look rather complex and, even with the help of modern software packages of computing tools, do not allow us to understand physics or causes of such a process. In such cases, approximate asymptotic methods shall be widely applied.

It has been established that it is appropriate to use the saddle point method to solve boundary value problems in determining the electromagnetic field scattered from a horn emitter.

We carried out a detailed analysis of the saddle point method by solving an equation for the electromagnetic field scattered by an opening horn emitter, which was a cause of diffraction on the horn in order to reduce the diffraction.

The publication involves two tasks: a detailed analysis of the saddle point method for solving the integral electromagnetic field equation and determination of the field scattered by the opening horn emitter with application of the saddle point method.

The problem statement includes one of the cases of a plane wave free incidence, namely, when the wave is polarized normally to the plane of incidence (S-polarization), that is, the plane of wave polarization and the incidence plane are mutually perpendicular.

We have obtained an expression for the field scattered by the opening horn emitter with normal polarization of the incident wave to the plane of its incidence after taking integrals by the saddle point method.

Unlike complex modern software products, this solution will allow us to analyze physical processes that occur when the electromagnetic field is reflected by the opening horn emitter. For example, we have analysed the scattered field in two planes. These simple expressions may be used to easily make scattered field diagrams in Mathcad.

Further studies will take into account beyond cutoff reflection coefficients and the horn emitter load.

Keywords: asymptotic research methods; saddle point method; scattered electromagnetic field; horn emitter