

УДК 621.396.96

Адаптивне виявлення сигналу рухомої цілі в FMCW радарі при невідомій потужності шуму

Маленчик Т. В., Жук С. Я.

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, м. Київ, Україна

E-mail: tarasmalenchik@gmail.com

Одним з перспективних засобів виявлення рухомих цілей на малих відстанях є FMCW радар. Він забезпечує: високоточне вимірювання дальності, а також радіальної швидкості, низьке енергоспоживання. Вихідною інформацією для алгоритмів виявлення сигналів цілей в FMCW радарі є далекомірно-доплерівський портрет. Він формується шляхом двомірного дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) над отриманими на інтервалі когерентного накопичення демодульованими сигналами відповідних періодів модуляції. У випадку однорідного шуму з невідомою потужністю використання алгоритмів CFAR призводить до надлишкових обчислювальних витрат за рахунок ковзного оцінювання потужності шуму. Крім того розміри ковзного вікна обмежені, що не дозволяє отримати оцінку потужності шуму з необхідною точністю. В якості математичної моделі корисного сигналу від цілі може бути використаний гармонійний сигнал з невідомими амплітудою, частотою і початковою фазою. Розглянуто алгоритм адаптивного виявлення гармонійного сигналу з невідомими параметрами, отриманого на інтервалі когерентного накопичення FMCW радара при відомій потужності шуму. Пристрій виявлення побудовано за періодограмною схемою. Проведено аналіз характеристик виявлення сигналу FMCW радара при відомій потужності шуму, які можуть виступати в якості нижньої границі при невідомій дисперсії шуму. На основі методу максимальної правдоподібності запропоновано алгоритм оцінювання невідомої потужності шуму на основі тестової вибірки, отриманої з далекомірно-доплерівського портрету. Оцінка невідомої потужності шуму є вибіркоvim середнім. На основі методу інтервального оцінювання визначено довірчі інтервали щодо ймовірностей хибної тривоги і виявлення цілі в залежності від об'єму тестової вибірки. Границі ймовірності хибної тривоги не залежать від оцінки потужності шуму. На основі отриманих залежностей можна визначити об'єм вибірки, що забезпечує допустиме значення довжини довірчого інтервалу ймовірностей хибної тривоги і виявлення цілі.

Ключові слова: FMCW радар; далекомірно-доплерівський портрет; відношення правдоподібності; періодограма; пристрій виявлення; хибна тривога; максимально правдоподібна оцінка; розподіл хі-квадрат; об'єм вибірки; довірчий інтервал

DOI: [10.20535/RADAR.2024.96.32-41](https://doi.org/10.20535/RADAR.2024.96.32-41)

Вступ

Одним з перспективних засобів виявлення рухомих цілей на малих відстанях є FMCW (Frequency modulated continuous wave) радар [1, 2]. Він забезпечує: високоточне вимірювання дальності, а також радіальної швидкості; кращу безпеку через відсутність імпульсного випромінювання з великою потужністю; низьке енергоспоживання [3].

Вищезгадані переваги дозволяють використовувати FMCW радар у широкому колі застосунків. Наприклад такі радары використовуються для моніторингу навколишнього простору на наявність безпілотних літальних апаратів [4–6]. Висока роздільна здатність FMCW радара дозволяє виявляти та розрізняти близько розташовані об'єкти. А здатність одночасно вимірювати як дальність, так і радіальну швидкість забезпечує можливість ідентифікувати

та класифікувати цілі за характеристиками їх руху [1]. Також FMCW радары знаходять широке застосування в автомобільній галузі щодо вирішення таких завдань як: адаптивний круїз-контроль, уникнення зіткнень, моніторинг сліпих зон, допомога при паркуванні, автопілотування автомобіля [7, 8], а також в робототехніці для точного позиціонування та визначення місцеположення [9, 10].

Базовою задачею первинної обробки радіолокаційної інформації є виявлення цілі. Вихідною інформацією для алгоритмів виявлення сигналів цілей в FMCW радарі є далекомірно-доплерівський портрет [11]. Він формується шляхом двомірного дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) над отриманими на інтервалі когерентного накопичення демодульованими сигналами відповідних періодів модуляції.

Для виявлення сигналів цілі на далекомірно-доплерівському портреті широко використовуються

алгоритми сімейств CFAR (Constant False Alarm Rate) [12–14]. Для забезпечення постійного рівня хибної тривоги в таких алгоритмах відбувається ковзне оцінювання невідомої потужності шуму в межах вікна для корегування порогу CFAR детектора. Такі алгоритми найбільш ефективні коли дисперсія шуму є неоднорідною і має різні рівні потужності на далекомірно-доплерівському портреті. У випадку однорідного шуму розглянута процедура призводить до надлишкових обчислювальних витрат. Також розміри ковзного вікна як правило обмежені, що не дозволяє отримати оцінку потужності шуму з необхідною точністю. Недоліком CFAR детекторів є також можливе невиявлення близьких цілей, що знаходяться в межах ковзного вікна, за рахунок впливу сигнальних відліків на оцінку потужності шуму [15].

У багатьох практичних застосуваннях FMCW радара шумову складову на далекомірно-доплерівському портреті можна вважати стаціонарною з постійною, але невідомою потужністю. В якості математичної моделі корисного сигналу від цілі може бути використаний гармонійний сигнал з невідомими амплітудою, частотою і початковою фазою [14, 15]. За розглянутих умов задача виявлення цілі за даними FMCW радара може бути вирішена на основі адаптивного підходу [16, 18].

В роботі розглянуто алгоритм адаптивного виявлення гармонійного сигналу з невідомими параметрами, отриманого на інтервалі когерентного накопичення FMCW радара при відомій потужності шуму. Запропоновано алгоритм оцінювання невідомої потужності шуму на основі тестової вибірки, об'єм якої визначається з використанням заданої ймовірності хибної тривоги і довірчої ймовірності виходу реального значення хибної тривоги за межі довірчого інтервалу. Також проведено аналіз довірчих інтервалів для ймовірності виявлення в залежності від об'єму тестової вибірки.

1 Постановка задачі

Обробка сигналу в FMCW радарі включає [3–5]: прийом відбитого від цілі сигналу, його перемноження з опорним сигналом в змішувачі, низькочастотну фільтрацію сигналу з виходу змішувача з подальшим перетворенням в цифрову форму (Рис. 1). Цифрові відліки демодульованого сигналу надходять у пристрій цифрової обробки сигналу (ЦОС).

В процесі виявлення цілі в пристрої ЦОС на інтервалі когерентного накопичення розглядаються дві гіпотези [16, 17]:

$$\begin{aligned} H_1: x(n, m) &= A \cos(2\pi f n + 2\pi F m + \phi) + w(n, m), \\ H_0: x(n, m) &= w(n, m), \quad n=0, N-1, \quad m=0, M-1, \end{aligned} \quad (1)$$

де A – амплітуда; ϕ – початкова фаза; f, F – нормовані різницева частота зондуючого і отриманого сигналів та доплерівський зсув частоти цілі

$$f = \frac{2\rho R}{c} \Delta t, \quad F = \frac{2f_c V_R T}{c}$$

ρ – швидкість зміни частоти ЛЧМ-сигналу; R – дальність до цілі; f_c – носійна частота; V_R – радіальна швидкість цілі; c – швидкість світла; Δt – крок дискретизації демодульованого сигналу; T – період модуляції ЛЧМ-сигналу; $w(n, m)$ – дискретний білий гаусівський шум з дисперсією σ^2 , яка в загальному випадку є невідомою.

Амплітуда A , частоти f, F та початкова фаза ϕ гармонійного сигналу є невідомими. Будемо вважати, що на інтервалі когерентного накопичення ціль знаходиться в межах одного елемента розрізнення за дальністю і радіальною швидкістю. В цьому випадку частоти f, F на інтервалі спостереження не змінюються.

В якості критерію оптимальності використовується критерій Неймана-Пірсона, який при заданій ймовірності хибної тривоги забезпечує максимальну ймовірність правильного виявлення D .

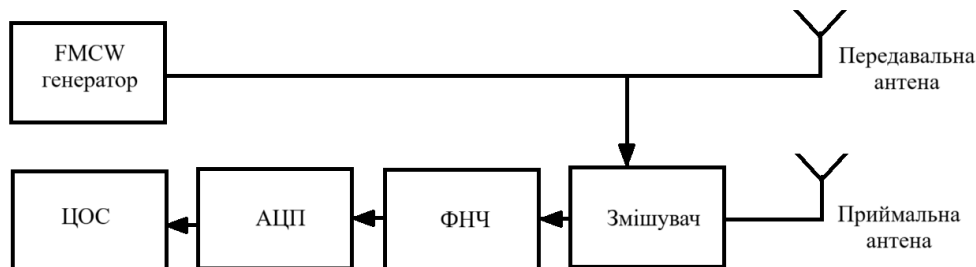


Рис. 1. Структурна схема FMCW радара

На першому етапі розглянемо задачу виявлення гармонійного сигналу з невідомими параметрами A, f, F, ϕ , отриманого на інтервалі когерентного накопичення FMCW радара при відомій потужності шуму σ^2 . Вона відноситься до класу задач виявлення з параметричної апріорною невизначеністю [16, 17]. Застосуємо для її вирішення адаптивний підхід без вчителя з використанням методу максимальної правдоподібності [16]. В даному підході при відомому вимірюванні $x(n, m)$, $n = 0, N-1$, $m = 0, M-1$ за критерієм максимальної правдоподібності визначаються оцінки невідомих параметрів. При цьому отримане максимальне значення функції правдоподібності невідомих параметрів використовується в якості функції правдоподібності гіпотези H_1 при подальшому вирішенні задачі оптимального виявлення.

На другому етапі у відповідності до адаптивного підходу з використанням навчаючої вибірки [15, 16] отримуємо оцінку $\hat{\sigma}^2$ невідомої дисперсії σ^2 шуму, яка в подальшому використовується в розглянутому на першому етапі алгоритмі виявлення. На основі методу інтервального оцінювання визначимо довірчі інтервали щодо ймовірностей хибної тривоги і виявлення цілі в залежності від об'єму тестової вибірки.

2 Оцінювання невідомих параметрів сигналу FMCW радара за методом максимальної правдоподібності

Функція правдоподібності невідомих параметрів має вигляд:

$$\begin{aligned} L(A, f, F, \phi) &= \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}\frac{M}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} (x(n, m) - \right. \\ &\quad \left. - A \cos(2\pi fn + 2\pi Fm + \phi))^2\right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Враховуючи неперервність функції правдоподібності $L(A, f, F, \phi)$ перейдемо до розгляду її логарифму

$$\begin{aligned} \ln L(A, f, F, \phi) &= c - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} (x(n, m) - \\ &\quad - A \cos(2\pi fn + 2\pi Fm + \phi))^2, \end{aligned} \quad (3)$$

де c – константа, що розраховується за формулою

$$c = -\frac{N}{2} \frac{M}{2} \ln(2\pi\sigma^2).$$

Представимо гармонійний сигнал у вигляді

$$\begin{aligned} A \cos(2\pi fn + 2\pi Fm + \phi) &= \\ &= A \cos \phi \cos(2\pi(fn + Fm)) - \\ &\quad - A \sin \phi \sin(2\pi(fn + Fm)) = \\ &= A_c \cos(2\pi(fn + Fm)) + A_s \sin(2\pi(fn + Fm)), \end{aligned} \quad (4)$$

де A_c, A_s визначаються по формулам

$$A_c = A \cos(\phi); \quad A_s = -A \sin(\phi). \quad (5)$$

Відповідно на основі зворотного перетворення параметри A, ϕ зв'язані з A_c, A_s виразами

$$A = \sqrt{A_c^2 + A_s^2}; \quad \phi = \arctg\left(-\frac{A_s}{A_c}\right). \quad (6)$$

З врахуванням (4) перепишемо вираз (3) у вигляді

$$\begin{aligned} \ln L(A_c, A_s, f, F) &= c - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} (x(n, m) - \\ &\quad - A_c \cos(2\pi(fn + Fm)) - A_s \sin(2\pi(fn + Fm)))^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Перейдемо до отримання оцінок $\hat{A}_c, \hat{A}_s, \hat{f}, \hat{F}$. Максимізацію логарифму функції правдоподібності (7) будемо проводити в два етапи. Спочатку визначимо умовні оцінки $\hat{A}_c(f, F), \hat{A}_s(f, F)$ при заданих значеннях f, F і підставимо їх у вираз (7). На другому етапі знайдемо оцінки \hat{f}, \hat{F} . При цьому оцінки амплітуди \hat{A} і початкової фази $\hat{\phi}$ знаходяться за формулами (6).

Знайдемо оцінки $\hat{A}_c(f, F), \hat{A}_s(f, F)$ за умови, що f, F відомі. Рівняння правдоподібності для оцінок $\hat{A}_c(f, F), \hat{A}_s(f, F)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{A}_c} \ln L(\hat{A}_c, \hat{A}_s, f, F) &= \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} 2(x(n, m) - \hat{A}_c \cos(2\pi fn + 2\pi Fm) - \\ &\quad - \hat{A}_s \sin(2\pi fn + 2\pi Fm)) \cos(2\pi fn + 2\pi Fm) = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{A}_s} \ln L(\hat{A}_c, \hat{A}_s, f, F) &= \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} 2(x(n, m) - \hat{A}_c \cos(2\pi fn + 2\pi Fm) - \\ &\quad - \hat{A}_s \sin(2\pi fn + 2\pi Fm)) \sin(2\pi fn + 2\pi Fm) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

За умови $NM \gg 1$ і враховуючи властивості гармонійних функцій, отримаємо

$$\hat{A}_c(f, F) = \frac{2}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) \cos(2\pi(fn + Fm)); \quad (10)$$

$$\hat{A}_s(f, F) = \frac{2}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) \sin(2\pi(fn + Fm)). \quad (11)$$

Підставимо оптимальні значення оцінок \hat{A}_c , \hat{A}_s в логарифм функції правдоподібності (7). Враховуючи співвідношення (10), (11), а також властивості гармонійних функцій, отримаємо

$$\begin{aligned} \ln L(\hat{A}_c, \hat{A}_s, f, F) &= c - \frac{1}{2\sigma^2} \times \\ &\times \left(\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x^2(n, m) - \frac{NM}{2} (\hat{A}_c^2(f, F) + \hat{A}_s^2(f, F)) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Перетворимо суму квадратів оцінок $\hat{A}_c(f, F)$, $\hat{A}_s(f, F)$ до вигляду

$$\begin{aligned} \hat{A}_c^2(f, F) + \hat{A}_s^2(f, F) &= \\ &= \frac{4}{(NM)^2} \left[\left(\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) \cos(2\pi(fn + Fm)) \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \left(\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) \sin(2\pi(fn + Fm)) \right)^2 \right] = \\ &= \frac{4}{NM} \frac{1}{NM} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m) e^{-i2\pi(fn + Fm)} \right|^2 = \\ &= \frac{4}{NM} \Gamma(f, F), \end{aligned} \quad (13)$$

де $\Gamma(f, F)$ – періодограма на частотах f, F [16].

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \ln L(\hat{A}_c, \hat{A}_s, f, F) &= \\ &= c - \frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x^2(n, m) - 2\Gamma(f, F) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Вираз (14) представляє оптимізований за параметрами $\hat{A}_c(f, F)$, $\hat{A}_s(f, F)$ логарифм функції правдоподібності (7). На основі виразу (14) можуть бути отримані максимально правдоподібні оцінки частот \hat{f}, \hat{F} . Оптимальними значеннями \hat{f}, \hat{F} є такі, при яких $\ln L(\hat{A}_c, \hat{A}_s, f, F)$ досягає максимуму. Це виконується за умови, що періодограма $\Gamma(f, F)$ приймає максимальне значення. Для пошуку максимуму $\Gamma(f, F)$ використовуються чисельні методи. Найбільш часто для оцінювання періодограми використовується двомірне ДПФ. Для пошуку її максимуму використовуються частоти $f_k, k = 0, N/2 - 1, F_l, l = 0, M - 1$. З врахуванням отриманих оцінок $\hat{A}_c, \hat{A}_s, \hat{f}, \hat{F}$ максимальне значення функції правдо-

подібності розраховується по формулі

$$\begin{aligned} L(\hat{A}_c, \hat{A}_s, \hat{f}, \hat{F}) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2} \frac{M}{2}}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x^2(n, m) - 2\Gamma(\hat{f}, \hat{F}) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

3 Виявлення сигналу ФМСВ радара на інтервалі когерентного накопичення при відомій потужності шуму

Виконаємо синтез алгоритму виявлення. У відповідності до розглянутого підходу гіпотеза H_1 приймається якщо виконується нерівність [16, 17]

$$\Lambda(\hat{A}_c, \hat{A}_s, \hat{f}, \hat{F}) = \frac{L(H_1 | \hat{A}_c, \hat{A}_s, \hat{f}, \hat{F})}{L(H_0)} > \gamma. \quad (16)$$

В результаті оцінювання невідомих параметрів функція правдоподібності $L(H_1 | \hat{A}_c, \hat{A}_s, \hat{f}, \hat{F})$ описується виразом (15). При цьому відношення правдоподібності має вигляд:

$$\begin{aligned} \Lambda(\hat{A}_c, \hat{A}_s, \hat{f}, \hat{F}) &= \\ &= \frac{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2} \frac{M}{2}}} e^{\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x^2(n, m) - 2\Gamma(\hat{f}, \hat{F}) \right) \right\}}}{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2} \frac{M}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x^2(n, m) \right\}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Знайдемо логарифм відношення правдоподібності. Виконавши перетворення, отримаємо

$$\ln \Lambda(\hat{A}_c, \hat{A}_s, \hat{f}, \hat{F}) = \frac{\Gamma(\hat{f}, \hat{F})}{\sigma^2}. \quad (18)$$

Таким чином гіпотеза H_1 приймається за загальним правилом двоальтернативного виявлення у випадку:

$$\Gamma(\hat{f}, \hat{F}) > \sigma^2 \ln \gamma = \gamma'. \quad (19)$$

Структурна схема пристрою виявлення наведена на Рис. 2.

Знайдемо оптимальний поріг γ' і характеристики виявлення такого алгоритму за критерієм Неймана-Пірсона. Представимо періодограму $\Gamma(\hat{f}, \hat{F})$ у вигляді:

$$\Gamma(\hat{f}, \hat{F}) = \xi_1^2 + \xi_2^2. \quad (20)$$

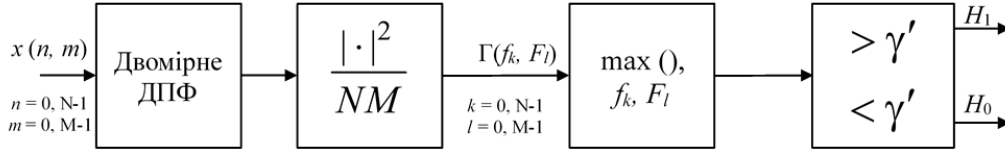


Рис. 2. Структурна схема пристрою виявлення

Випадкові величини ξ_1, ξ_2 є гаусівськими і статистично незалежними. За умови справедливості гіпотези H_0 математичні очікування випадкових величин ξ_1, ξ_2 дорівнюють нулю, а дисперсії приймають однакові значення $0.5\sigma^2$. Отже періодограма $\Gamma(\hat{f}, \hat{F})$ представляє собою суму квадратів двох незалежних гаусівських випадкових величин. Тому якщо про нормувати ξ_1, ξ_2 на $0.5\sigma^2$, то отримуємо при H_0 щільність розподілу ймовірності $f(\Gamma(\hat{f}, \hat{F})) = \chi^2$ (центральне розподілення хі-квадрат χ^2_2 з двома ступенями свободи).

За умови справедливості гіпотези H_1 математичні очікування випадкових величин ξ_1, ξ_2

$$\begin{aligned} E\{\xi_1|H_1\} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} A \cos\left(2\pi(\hat{f}n + \hat{F}m + \phi)\right) \times \\ &\times \cos\left(2\pi(\hat{f}n + \hat{F}m)\right) \approx \\ &\approx \frac{\sqrt{NM}}{2} A \cos \phi = m_1; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} E\{\xi_2|H_1\} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} A \cos\left(2\pi(\hat{f}n + \hat{F}m + \phi)\right) \times \\ &\times \sin\left(2\pi(\hat{f}n + \hat{F}m)\right) \approx \\ &\approx \frac{\sqrt{NM}}{2} A \sin \phi = m_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Дисперсії ξ_1, ξ_2 за умови справедливості гіпотези H_1 однакові і також приймають значення $0.5\sigma^2$. Отже при H_1 щільність розподілення ймовірності $f(\Gamma(\hat{f}, \hat{F}))$ є нецентральною розподілом хі-квадрат $\chi^2_2(\lambda)$ з параметром не центральності λ , що розраховується по формулі

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(\frac{m_1}{\sigma/\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{\sigma/\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{NM} \frac{A}{2} \cos \phi}{\sigma/\sqrt{2}}\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\sqrt{NM} \frac{A}{2} \sin \phi}{\sigma/\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{NMA^2}{2\sigma^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Розрахуємо ймовірність хибної тривоги. Особливістю отриманого алгоритму є необхідність перегляду $0.5NM$ відліків отриманої з використанням

двомірного ДПФ періодограми $\Gamma(f_k, F_l)$ для пошуку її максимуму. Тому ймовірність хибної тривоги алгоритму виявлення α пов'язана з ймовірністю хибної тривоги в елементі розрізнення далекомірно-доплерівського портрету α_e співвідношенням

$$\alpha = 1 - (1 - \alpha_e)^{\frac{NM}{2}}. \quad (24)$$

Звідки

$$\alpha_e = 1 - \sqrt[2]{1 - \alpha} \approx \frac{2\alpha}{NM}. \quad (25)$$

Щільність ймовірності χ^2_2 є експоненційною. Тому

$$\begin{aligned} \alpha_e &= P\{\Gamma(f, F) > \gamma' | H_0\} = \\ &= P\left\{\frac{\Gamma(f, F)}{\sigma^2/2} > \frac{\gamma'}{\sigma^2/2} | H_0\right\} = \\ &= \int_{2\gamma'/\sigma^2}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = \int_{\gamma'/\sigma^2}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-z} dz = e^{-\gamma'/\sigma^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Тоді при заданій ймовірності хибної тривоги α_3 і відповідно отриманій за формулою (25) ймовірності хибної тривоги α_{e3} оптимальний поріг розраховується по формулі

$$\gamma' = \sigma^2 \ln\left(\frac{1}{\alpha_{e3}}\right). \quad (27)$$

Знайдемо ймовірність виявлення

$$\begin{aligned} D &= P\{\Gamma(f, F) > \gamma' | H_1\} = \\ &= P\left\{\frac{\Gamma(f, F)}{\sigma^2/2} > \frac{\gamma'}{\sigma^2/2} | H_1\right\} = \\ &= P_{\chi^2_2(\lambda)}\left(\frac{2\gamma'}{\sigma^2}\right) = P_{\chi^2_2(\lambda)}(2 \ln\left(\frac{1}{\alpha_{e3}}\right)). \end{aligned} \quad (28)$$

Ймовірність виявлення виражається через Q_M - функцію Маркума [15, 16]

$$p = Q_M\left(\sqrt{\frac{NMA^2}{2\sigma^2}}; \sqrt{\frac{2\gamma'}{\sigma^2}}\right) = Q_M\left(\sqrt{h^2}; \sqrt{2 \ln \frac{1}{\alpha_{e3}}}\right), \quad (29)$$

де $Q_M(\nu, \mu)$ має вигляд

$$Q_M(\nu, \mu) = \int_{\mu}^{\infty} z \exp\left[-\frac{1}{2}(z^2 + \nu^2)\right] I_0(\nu z) dz,$$

$I_0(\nu z)$ - модифікована функція Бесселя нульового порядку; h^2 - відношення сигнал-шум (ВСП).

Залежності ймовірності правильного виявлення цілі D від ВСШ h^2 при $\alpha_3 = 10^{-3}$, розраховані за формулою (29) зображені на Рис. 3 суцільними лініями. При цьому ВСШ розраховується за формулою

$$h^2 = 10 \log \left(\frac{NMA^2}{2\sigma^2} \right).$$

Також на Рис. 3 штриховими лініями наведені аналогічні залежності, отримані шляхом статистичного моделювання, які співпадають з теоретичними розрахунками.

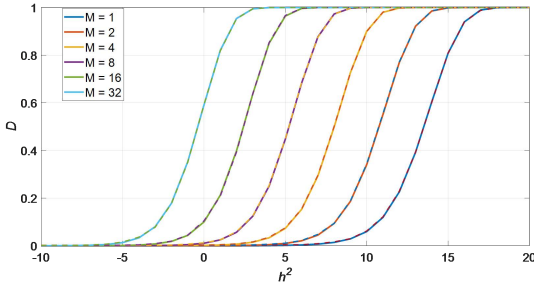


Рис. 3. Залежності ймовірності виявлення цілі D від ВСШ h^2

При збільшенні періодів зондування в два рази, необхідне для досягнення тієї ж ймовірності D ВСШ h^2 зменшується на 3 дБ, що відповідає закономірності когерентного накопичення сигналів.

Треба також відмітити, що для забезпечення заданого рівня хибної тривоги α_3 при збільшенні періодів зондування в два рази на інтервалі когерентного накопичення, в два рази необхідно зменшувати ймовірність хибної тривоги в елементі розрізнення α_{e3} .

Отримані характеристики можуть виступати в якості нижньої границі ймовірності D алгоритмів виявлення при невідомій дисперсії шуму σ^2 .

4 Оцінювання невідомої потужності шуму

Щоб встановити поріг в пристрої виявлення, потужність шуму σ^2 повинна бути відома. Для її оцінювання використаємо тестову вибірку, яку будемо формувати наступним чином: в кожному l -му стовбці $l = \overline{1, M}$ періодограми $\Gamma(f_k, F_l)$ на інтервалах $k = \overline{0, N/2 - 1}$ рівномірно обираємо ν вибірко-вих елементів. Загальний об'єм вибірки дорівнює $K = \nu M$. Розглянутий підхід дозволяє охопити всю площину далекомірно-доплерівського портрету. Ймовірність потрапляння цільового відліку у вибірку мала і нею можна знехтувати. Крім того, при значному обсязі вибірки поодинокі потрапляння цільового відліку практично не впливає на точність оцінювання потужності шуму.

Використаємо метод максимальної правдоподібності, який відноситься до небайєсівських параметричних методів.

Достатня статистика $\Gamma(\hat{f}, \hat{F}) = \zeta$ за наявності гіпотези H_0 має експоненційний закон розподілу [15, 18]

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{\zeta}{\sigma^2}}. \quad (30)$$

Запишемо функцію правдоподібності параметра σ^2 за наявності вибірки $\xi(i)$, $i = \overline{1, K}$ у вигляді

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^K \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{\xi(i)}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^{2K}} e^{-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^K \xi(i)}. \quad (31)$$

Логарифмічна функція правдоподібності має вигляд

$$\ln(L(\sigma^2)) = -K \ln(\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^K \xi(i). \quad (32)$$

З умови максимуму логарифмічної функції правдоподібності

$$\frac{d \ln(L(\sigma^2))}{d \sigma^2} = 0 \quad (33)$$

отримаємо

$$-K \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^K \xi(i) = 0. \quad (34)$$

З рівняння (34) випливає, що максимально правдоподібна оцінка $\hat{\sigma}^2$ потужності шуму визначається за формулою

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \xi(i). \quad (35)$$

Оцінка $\hat{\sigma}^2$ невідомої потужності шуму є вибірко-вим середнім.

Сформулюємо вимоги до об'єму вибірки K . Для цього використаємо двосторонню інтервальну оцінку параметра σ^2 , яка задається довірчим інтервалом $[\sigma_{\text{н}}^2, \sigma_{\text{в}}^2]$ і характеризується довірчою ймовірністю $P(\sigma_{\text{н}}^2 < \sigma^2 < \sigma_{\text{в}}^2) = \beta$ [19, 20]. Для отримання інтервальної оцінки параметра σ^2 експоненційного розподілу використовується центральна статистика, що має вигляд

$$T(\xi(i), i = \overline{1, K}; \sigma^2) = \frac{2K}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2. \quad (36)$$

Функція розподілу центральної статистики (36) має хі-квадрат розподіл з $2K$ ступенями свободи. По функції розподілу знаходимо квантілі $\chi_{(1-\beta)/2}^2(2K)$ і $\chi_{(1+\beta)/2}^2(2K)$. Оскільки достатня статистика (36) зменшується при збільшенні параметра σ^2 , границі довірчого інтервалу визначаються з рівнянь

$$\chi_{(1+\beta)/2}^2 = \frac{2K}{\sigma_{\text{н}}^2} \hat{\sigma}^2, \quad \chi_{(1-\beta)/2}^2 = \frac{2K}{\sigma_{\text{в}}^2} \hat{\sigma}^2. \quad (37)$$

Вирішивши рівняння (37) отримаємо граничні значення $\sigma_{\text{н}}^2$, $\sigma_{\text{в}}^2$ довірчого інтервалу

$$\sigma_{\text{н}}^2 = \frac{2K}{\chi_{(1+\beta)/2}^2} \hat{\sigma}^2, \quad \sigma_{\text{в}}^2 = \frac{2K}{\chi_{(1-\beta)/2}^2} \hat{\sigma}^2. \quad (38)$$

Далі можна встановити зв'язок між довірчим інтервалом $[\sigma_{\text{н}}^2, \sigma_{\text{в}}^2]$ і відповідним інтервалом $[\alpha_{\text{ен}}^2, \alpha_{\text{ев}}^2]$ ймовірності хибної тривоги α_e , в який її значення потрапляє також з довірчою ймовірністю β при невідомому значенні потужності шуму σ^2 .

На основі отриманої точкової оцінки $\hat{\sigma}^2$ поріг прийняття рішення розраховується за формулою

$$\hat{\gamma}' = \hat{\sigma}^2 \ln \left(\frac{1}{\alpha_{e3}} \right). \quad (39)$$

Враховуючи зв'язок між ймовірністю хибної тривоги α_e і значенням потужності шуму σ^2 (38) нижня границя ймовірності хибної тривоги $\alpha_{\text{ен}}$ розраховується за формулою

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{ен}} &= e^{-\hat{\gamma}'/\sigma_{\text{н}}^2} = e^{\hat{\sigma}^2 \ln \alpha_{e3} / \left(\frac{2K}{\chi_{(1+\beta)/2}^2} \hat{\sigma}^2 \right)} = \\ &= e^{\chi_{(1+\beta)/2}^2 \ln \alpha_{e3} / 2K} = \alpha_{e3} \chi_{(1+\beta)/2}^2 / 2K. \end{aligned} \quad (40)$$

Аналогічно можна показати, що верхня границя ймовірності хибної тривоги $\alpha_{\text{ев}}$ розраховується за формулою

$$\alpha_{\text{ев}} = \alpha_{e3} \chi_{(1-\beta)/2}^2 / 2K. \quad (41)$$

Як впливає з виразів (40), (41), нижня $\alpha_{\text{ен}}$ і верхня $\alpha_{\text{ев}}$ границі ймовірності хибної тривоги не залежить від оцінки потужності шуму $\hat{\sigma}^2$. Вони є функціями об'єму вибірки K , довірчої ймовірності β , заданої ймовірності хибної тривоги α_{e3} . На Рис. 4,а,б наведено залежності нижньої $\alpha_{\text{ен}}$ і верхньої $\alpha_{\text{ев}}$ границь ймовірності хибної тривоги α_e від об'єму вибірки K , при $N = 256$, $M = 8$, значеннях довірчої ймовірності $\beta = 0.95, 0.99, 0.999$ і заданої ймовірності хибної тривоги $\alpha_{e3} = 10^{-3}, 10^{-5}$ відповідно. Границі довірчих інтервалів є симетричними відносно заданої ймовірності хибної тривоги α_{e3} . При збільшенні довірчої ймовірності довжина довірчого інтервалу $\eta(\alpha_e) = \alpha_{\text{ев}} - \alpha_{\text{ен}}$ також збільшується. При збільшенні об'єму вибірки з $K = 30$ до $K = 150$ розміри довірчих інтервалів зменшуються в 3-3,5 рази. На основі отриманих результатів при заданих значеннях параметрів β і α_{e3} , можна визначити об'єм вибірки K , що забезпечує допустиме значення довжини довірчого інтервалу ймовірності хибної тривоги α_e .

Необхідно відмітити, що граничні значення $\alpha_{\text{н}}$ і верхня $\alpha_{\text{в}}$ для ймовірності хибної тривоги α можуть бути розраховані на основі граничних значень $\alpha_{\text{ен}}$ і $\alpha_{\text{ев}}$ за формулою (24).

Знайдемо також зв'язок між довірчим інтервалом $[\sigma_{\text{н}}^2, \sigma_{\text{в}}^2]$ і відповідним інтервалом $[D_{\text{н}}, D_{\text{в}}]$ ймовірності виявлення D . Після підстановки в формулу (40) виразів для порогу $\hat{\gamma}'$ (27) і границі довірчого інтервалу $\sigma_{\text{в}}^2$ (38), отримаємо

$$\begin{aligned} D_{\text{н}} &= P \left\{ \Gamma(f, F) > \hat{\gamma}' | H_1 \right\} = \\ &= P \left\{ \frac{\Gamma(f, F)}{\sigma_{\text{в}}^2/2} > \frac{\hat{\gamma}'}{\sigma_{\text{в}}^2/2} | H_1 \right\} = \\ &= Q_M \left(\sqrt{\frac{NMA^2}{2\sigma_{\text{в}}^2}}; \sqrt{\frac{2\hat{\gamma}'}{\sigma_{\text{в}}^2}} \right) = \\ &= Q_M \left(\sqrt{\frac{NMA^2}{2 \frac{2K}{\chi_{(1-\beta)/2}^2} \hat{\sigma}^2}}; \sqrt{\frac{2\hat{\sigma}^2 \ln \left(\frac{1}{\alpha_{e3}} \right)}{\frac{2K}{\chi_{(1-\beta)/2}^2} \hat{\sigma}^2}} \right) = \\ &= Q_M \left(\sqrt{\frac{NMA^2}{k2\hat{\sigma}^2}}; \sqrt{\frac{2 \ln \left(\frac{1}{\alpha_{e3}} \right)}{k_{\text{в}}}} \right) = \\ &= Q_M \left(\sqrt{\frac{\hat{h}^2}{k_{\text{в}}}}; \sqrt{\frac{2 \ln \left(\frac{1}{\alpha_{e3}} \right)}{k_{\text{в}}}} \right), \end{aligned} \quad (42)$$

де $\hat{h}^2, \hat{\gamma}', k$ – параметри, що розраховуються по формулам

$$\hat{h}^2 = \frac{NMA^2}{2\hat{\sigma}^2}, \quad k_{\text{в}} = \frac{2K}{\chi_{(1-\beta)/2}^2}.$$

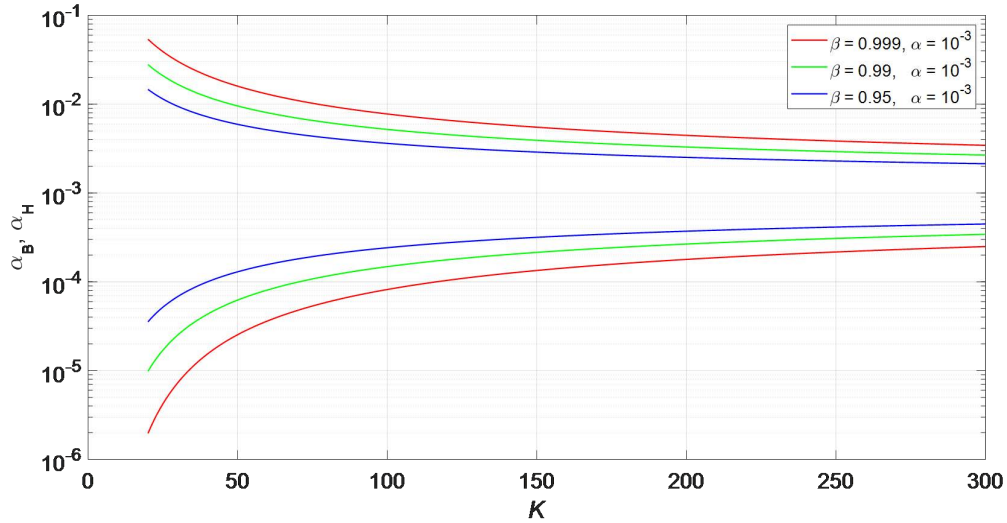
Аналогічно можна показати, що верхня границя ймовірності правильного виявлення $D_{\text{в}}$ розраховується за формулою

$$\begin{aligned} D_{\text{в}} &= P \left\{ \Gamma(f, F) > \hat{\gamma}' | H_1 \right\} = \\ &= P \left\{ \frac{\Gamma(f, F)}{\sigma_{\text{н}}^2/2} > \frac{\hat{\gamma}'}{\sigma_{\text{н}}^2/2} | H_1 \right\} = \\ &= Q_M \left(\sqrt{\frac{\hat{h}^2}{k_{\text{н}}}}; \sqrt{\frac{2 \ln \left(\frac{1}{\alpha_{e3}} \right)}{k_{\text{н}}}} \right), \end{aligned} \quad (43)$$

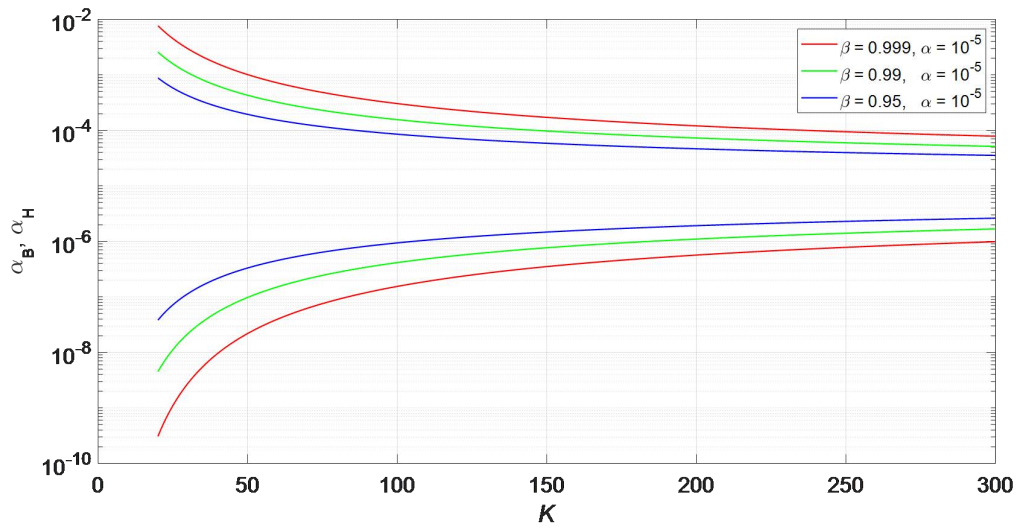
де $k_{\text{н}}$ – параметри, що розраховуються по формулам

$$k = \frac{2K}{\chi_{(1+\beta)/2}^2}.$$

На відміну від границь довірчого інтервалу хибної тривоги, границі $D_{\text{н}}$ і $D_{\text{в}}$ довірчого інтервалу ймовірності виявлення D залежать від оцінки потужності шуму $\hat{\sigma}^2$.



(a)



(б)

Рис. 4. Залежності нижньої α_{eH} і верхньої α_{eB} границь ймовірності хибної тривоги α_B від об'єму вибірки

На Рис. 5,а,б наведено залежності нижньої D_H і верхньої D_B границь ймовірності правильного виявлення D при $N = 256$, $M = 8$, $\alpha_{e3} = 10^{-3}$ від оціненого ВСШ \hat{h}^2 при значеннях довірчої ймовірності $\beta = 0.95, 0.99, 0.999$ і об'ємах вибірки $K = 30$ і $K = 150$ відповідно. При збільшенні довірчої ймовірності довжина довірчого інтервалу $\eta(D) = D_B - D_H$ також збільшується. При збільшенні об'єму вибірки з $K = 30$ до $K = 150$ розміри довірчих інтервалів зменшуються. Наприклад, при $\hat{h}^2 = 8$ дБ розміри довірчих інтервалів зменшуються приблизно в два рази. Отримані залежності дозволяють оцінити вплив довірчої ймовірності β і об'єму вибірки K на довжину довірчого інтервалу ймовірності виявлення D .

5 Висновки

Отриманий пристрій виявлення сигналу FMCW радара на інтервалі когерентного накопичення побудовано за періодограмною схемою. В якості максимально правдоподібної оцінки потужності шуму використовується середнє значення навчаючої вибірки, отриманої з далекомірно-доплерівського портрету.

Отримані характеристики виявлення сигналу FMCW радара на інтервалі когерентного накопичення при відомій потужності шуму можуть виступати в якості нижньої границі при невідомій дисперсії шуму σ^2 . При збільшенні періодів зондування в два рази, необхідне для досягнення тієї ж ймовірності D ВСШ h^2 зменшується на 3 дБ, що відповідає закономірності когерентного накопичення сигналів. Але ж для забезпечення заданого рівня хибної тривоги

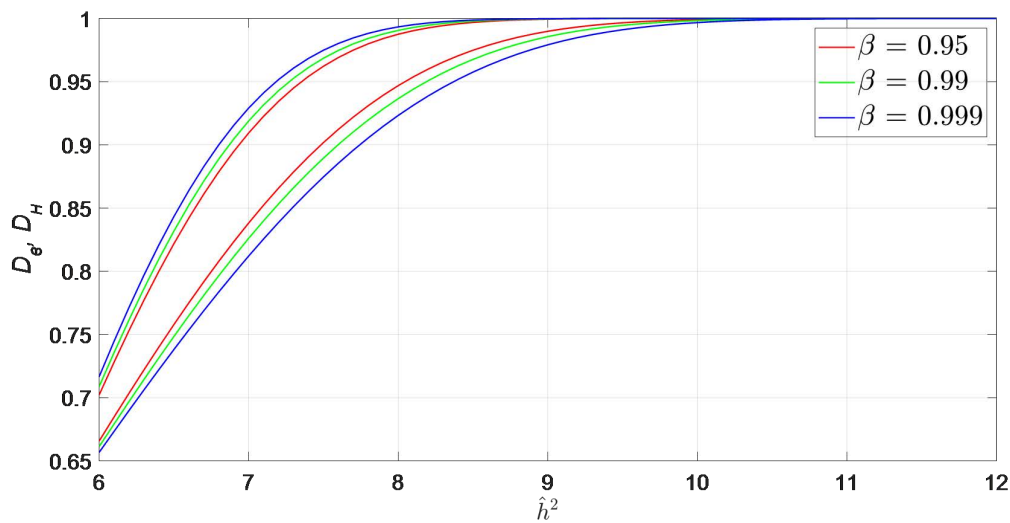
α_3 при збільшенні періодів зондування в два рази на інтервалі когерентного накопичення, в два рази необхідно зменшувати ймовірність хибної тривоги в елементі розрізнення α_{e3} .

Нижня $\alpha_{eн}$ і верхня $\alpha_{eв}$ границі ймовірності хибної тривоги α_e не залежать від оцінки потужності шуму $\hat{\sigma}^2$. Вони є функціями об'єму вибірки K , довірчої ймовірності β , заданої ймовірності хибної тривоги α_{e3} . При заданих значеннях параметрів β і α_{e3} , на основі отриманих залежностей можна визначити об'єм вибірки K , що забезпечує допустиме значення довжини довірчого інтервалу ймовірності хибної тривоги α_e .

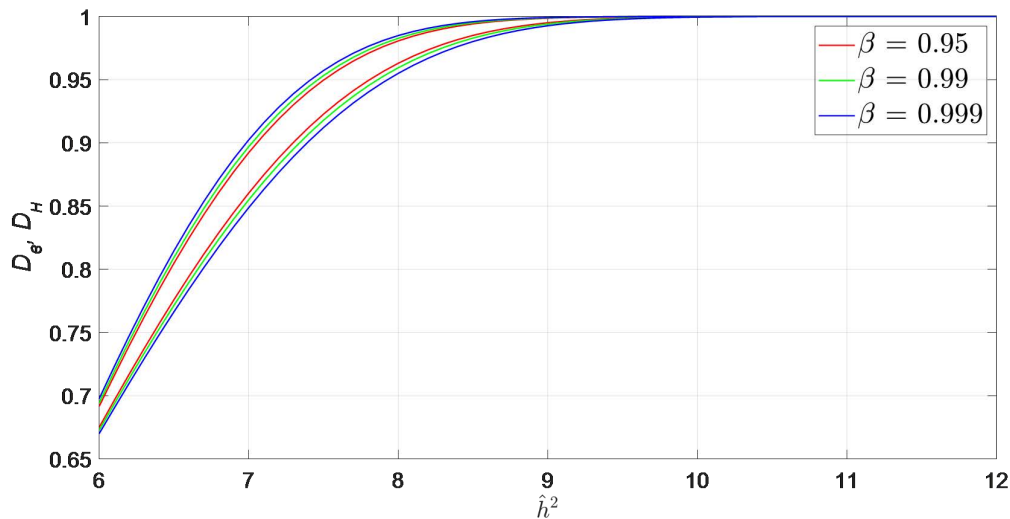
На відміну від границь довірчого інтервалу хибної тривоги, границі D_n і D_v довірчого інтервалу

ймовірності виявлення D залежать не тільки від об'єму вибірки K , довірчої ймовірності β , заданої ймовірності хибної тривоги α_{e3} , а також від оцінки потужності шуму $\hat{\sigma}^2$.

З проведеного аналізу випливає, що найбільш чутливою до неточного визначення потужності шуму σ^2 є ймовірність хибної тривоги α_e , оскільки при незначному об'єму вибірки K , розміри довірчого інтервалу можуть перевищувати її задане значення на порядок і більше. Це вимагає формувати такий об'єм вибірки K , що забезпечує допустиме значення довжини довірчого інтервалу ймовірності хибної тривоги α_e .



(a)



(b)

Рис. 5. Залежності нижньої D_n і верхньої D_v границь ймовірності правильного виявлення D від оціненого ВСП

References

- [1] Rai P., et al. (2021). Localization and Activity Classification of Unmanned Aerial Vehicle Using mmWave FMCW Radars. *IEEE Sensors Journal*, Vol. 21, pp. 16043–16053; doi:10.1109/JSEN.2021.3075909.
- [2] Kim B.-S., Jin Y., Kim S., Lee J. (2019). A Low-Complexity FMCW Surveillance Radar Algorithm Using Two Random Beat Signals. *Sensors*, Vol. 19, Iss. 3, 608; doi:10.3390/s19030608.
- [3] Jankiraman M. (2018). FMCW – Radar Design. *ARTECH HOUSE*, 415 p.; doi:10.1080/03772063.2019.1615392.
- [4] Choi B., Oh D., Kim S., et al. (2018). Long-Range Drone Detection of 24 G FMCW Radar with E-plane Sectoral Horn Array. *Sensors*, Vol. 18, Iss. 12, 4171; doi:10.3390/s18124171.
- [5] Santos D., Sebastião P., Souto N. (2019). Low-cost SDR based FMCW radar for UAV localization. *22nd International Symposium on Wireless Personal Multimedia Communications (WPMC) IEEE*, pp. 1-6; doi:10.1109/WPMC48795.2019.9096117.
- [6] Kim B., Park J., Park S., et al. (2018). Drone Detection with Chirp-Pulse Radar Based on Target Fluctuation Models. *ETRI Journal*, Vol. 40, Iss. 2, pp. 188-196; doi:10.4218/etrij.2017-0090.
- [7] Son Y., Sung H. K., Heo S. W. (2018). Automotive Frequency Modulated Continuous Wave Radar Interference Reduction Using Per-Vehicle Chirp Sequences. *Sensors*, Vol. 18, Iss. 9, 2831; doi.org/10.3390/s18092831.
- [8] Moussa A., Liu W. (2020). Fast and Accurate Range-Doppler Estimation in Multi-Target Wideband Automotive FMCW Radar. *2020 International Conference on UK-China Emerging Technologies (UCET)*, pp. 1-4; doi:10.1109/UCET51115.2020.9205374.
- [9] Stetco C., Ubezio B., Muhlbacher-Karrer S. and Zangl H. (2020). Radar Sensors in Collaborative Robotics: Fast Simulation and Experimental Validation. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 10452–10458; doi:10.1109/ICRA40945.2020.9197180.
- [10] Doer C., Trommer G. F. (2020). Radar Inertial Odometry with Online Calibration. *2020 European Navigation Conference (ENC)*, pp. 1-10. doi:10.23919/ENC48637.2020.9317343.
- [11] Ouaknine A., Newson A., Rebut J., et al. (2020). CARRADA Dataset: Camera and Automotive Radar with Range-Angle-Doppler Annotations. *2020 25th International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, pp. 5068-5075; doi:10.1109/ICPR48806.2021.9413181.
- [12] Kabakchiev C., Doukovska L., Garvanov I. (2006). Cell Averaging Constant False Alarm Rate Detector with Hough Transform in Randomly Arriving Impulse Interference. *CYBERNETICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES*, Vol.6, No.1, pp. 83-89.
- [13] Wang J. (2022). CFAR-Based Interference Mitigation for FMCW Automotive Radar Systems. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Vol. 23, Iss. 8, pp. 12229-12238; doi:10.1109/TITS.2021.3111514.
- [14] Stimson G. W. (1998). *Introduction to Airborne Radar*. Scitech publishing, 592 p. DOI: 10.1049/SBRA014E.
- [15] Richards M. A. (2014). *Fundamentals of Radar Signal Processing*. New York: McGraw - Hill Education, 894 p.; doi:10.1109/ICPR48806.2021.9413181.
- [16] Brooker G. (2009) *Introduction to Sensors for Ranging and Imaging*. Scitech publishing, 740 p.; doi:10.1049/SBRA014E.
- [17] McDonough R. N., Whalen A. D. (1995). *Detection of Signals in Noise*. Academic Press, Inc., 495 p. doi:10.1109/TITS.2021.3111514.
- [18] Richards M. A., Scheer J. A., Holm W. A. (2013). *Principles of Modern Radar: Basic Principles*. Scitech publishing, 924 p.; doi:10.23919/ENC48637.2020.9317343.
- [19] Horban I. I. (2003). Teoriia ymovirnostei ta matematychna statystyka dlia naukovykh pratsivnykiv ta inzheneriv. *Kyiv*, 244 p.
- [20] Prykhodko S. B., Makarova L. M. (2012). Vyznachennia dovirchoho intervalu tochkovoi otsinky parametra eksponentsiinoho rozpodilu. *Problemy informatsinykh tekhnolohii*, No. 2, pp. 84-87.

Adaptive Detection of Signal of Moving Target in FMCW Radar with Unknown Noise Power

Malenchyk T. V., Zhuk S. Ya.

One of the most promising ways of detecting moving targets at short distances is a FMCW radar. It provides: high-precision of range and radial velocity measurement and low power consumption. The source information for a target detection algorithm in the FMCW radar is the range-Doppler map. It is formed by two-dimensional discrete Fourier transformation (DFT) over the demodulated signals of the corresponding modulation periods obtained during the interval of coherent accumulation. In the case of homogeneous noise with unknown power, the usage of CFAR (constant false alarm rate) algorithms leads to excessive computational costs due to the sliding estimation of the noise power. In addition, the dimensions of the sliding window are limited, which does not allow obtain an estimate of the noise power with necessary accuracy. A harmonic signal with unknown amplitude, frequency and initial phase can be used as a mathematical model of the useful signal from the target. The algorithm for adaptive detection of a harmonic signal with unknown parameters, received at the interval of coherent accumulation of FMCW radar with known noise power, is considered. The detection device is built according to the periodogram scheme. An analysis of the FMCW radar signal detection characteristics at known noise power, which can act as a lower limit at unknown noise dispersion, was performed. Based on the maximum likelihood method, an algorithm for estimating the unknown power of noise based on a test sample obtained from a range-Doppler map is proposed. The estimate of the unknown noise power is a sample mean. Based on the method of interval estimation, confidence intervals will be determined regarding the probabilities of false alarm and target detection depending on the volume of the test sample. The limits of the probability of a false alarm do not depend on the estimation of the noise power. Based on the obtained dependencies, it is possible to determine the volume of the sample, which provides an acceptable value of the length of the confidence interval of the probabilities of a false alarm and target detection.

Keywords: FMCW radar; range-Doppler map; likelihood ratio; periodogram; detector; false alarm; maximum likelihood estimation; chi-square distribution; sample size; confidence interval