

Моделі та методи обробки сигналів на фоні корельованих ексцесних процесів

Палагін В. В., Палагіна О. А., Воробкало Т. В., Мартиненко С. С., Зорін О. С.

Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси, Україна

E-mail: palahin@ukr.net

В роботі представлено нові математичні моделі та методи обробки сигналів, сформовані під впливом корельованих ексцесних негаусових завад, які широко зустрічаються в телекомунікаційних системах, радіолокаційних пристроях, засобах технічного контролю та інших прикладних системах. Основою побудови запропонованого підходу є моментно-кумулянтне представлення випадкових процесів, що дозволяє описати не лише базові статистичні характеристики досліджуваних сигналів, але й урахувати вплив негаусових параметрів, зокрема коефіцієнта ексцесу та кореляційних зв'язків між вибірковими значеннями. Такий підхід є актуальним у випадках, коли традиційні та широкого вживані гаусові моделі не забезпечують належної точності опису досліджуваних процесів, а побудова повної багатовимірної PDF є надмірно складною або неможливою з практичної точки зору. Запропоновано методи синтезу поліноміальних стохастичних розв'язувальних правил (РП), які формуються на основі модифікованого моментного критерію якості для оцінки верхніх границь ймовірностей помилок у задачах статистичного виявлення сигналів. Побудовано як лінійні, так і нелінійні РП для різних степенів поліномів, що дає змогу адаптувати модель до різних типів завадових умов. Досліджено вплив коефіцієнта ексцесу та параметрів кореляції на ефективність виявлення сигналів. Показано, що використання статистик вищих порядків та нелінійна обробка вибіркових значень призводить до зменшення ймовірностей помилок першого та другого роду РП. Запропоновані моделі та методи виявлення сигналів можуть бути інтегровані в інтелектуальні системи обробки інформації, а також використані для розробки адаптивних алгоритмів виявлення в реальному часі.

Ключові слова: моментно-кумулянтні моделі; виявлення сигналів; статистики вищих порядків; поліноміальні розв'язувальні правила; модифікований моментний критерій; корельовані негаусові процеси

DOI: [10.20535/RADAP.2025.101.6-17](https://doi.org/10.20535/RADAP.2025.101.6-17)

Вступ

У сучасних умовах розвитку систем управління, діагностики та моніторингу зростає необхідність у створенні високоточних методів виявлення сигналів на фоні складних завадових умов. Аналіз літературних джерел демонструє, що у багатьох практичних ситуаціях характеристики завад, які впливають на корисний сигнал, суттєво відрізняються від широко вживаних гаусових моделей, демонструючи асиметрію, високий ексцес і статистичну залежність вибіркових значень, що призводить до істотного зниження ефективності традиційних методів обробки сигналів [1–3].

Особливої уваги потребують випадки, коли завади є ексцесними та мають складні статистичні характеристики, що не підпорядковуються нормальному закону розподілу. Ексцесні моделі завад характеризуються наявністю «важких» хвостів розподілу, що свідчить про підвищену ймовірність появи вибіркових значень, значно віддалених від середнього. Такі завади є типовими для задач, де

присутні імпульсні завади або флуктуації великої амплітуди, зокрема в радіолокаційних системах, при передачі даних у перевантажених мережах тощо. Найбільш уживаними розподілами для моделювання ексцесних завад є розподіли Коші, Лапласа, узагальнений розподіл Гаусса (*Generalized Gaussian Distribution, GGD*) та ін., які здатні описувати процеси з високим ексцесом навіть за умови симетрії або помірної асиметрії [4–7]. У таких моделях традиційне припущення про нормальність розподілу не лише втрачає ефективність, а й може призводити до суттєвих помилок виявлення або класифікації сигналів, що зумовлює потребу у спеціалізованих підходах до обробки даних, здатних враховувати властивості та характеристики середовища [7–12].

У таких складних завадових умовах обробки сигналів застосування щільності ймовірності розподілу (*probability density function – PDF*), як базової моделі виявлення сигналів, обмежується високою алгоритмічною та обчислювальною складністю [11, 12]. Альтернативним підходом є використання моментно-кумулянтного опису випадкових проце-

сів, який дозволяє компактно представити негаусові процеси та створити ефективні методи статистичного аналізу [11–15].

Упродовж останніх років значну увагу дослідників привертає альтернативний підхід до моделювання і обробки негаусових випадкових процесів, який базується на використанні моментів та кумулянтів — так званих статистик вищих порядків (*higher-order statistics, HOS*), які дозволяють враховувати не лише середнє та дисперсію, а й асиметрію та ексцес розподілу досліджуваних випадкових процесів [16–20]. Цей підхід демонструє ефективність при описі статистичних характеристик випадкових величин, що не підпорядковуються нормальному закону розподілу. Кумулянти, на відміну від класичних моментів, мають чіткий фізичний зміст і дозволяють кількісно оцінювати ступінь відхилення розподілу від гаусового. Завдяки цьому забезпечується більш адекватне представлення негаусових процесів та покращується точність їхнього аналізу. Особливу увагу приділено поліноміальним правилам прийняття рішень, які формуються без використання точного вигляду PDF, але з урахуванням моментів і кумулянтів заданого порядку [11–15]. Це забезпечує гнучкість моделей та їх придатність до реалізації в умовах невизначеності статистичних характеристик завад.

Застосування такого підходу створює умови для зниження обчислювальної складності при реалізації алгоритмів виявлення та ідентифікації сигналів, а також дозволяє враховувати як адитивні, так і мультиплікативні типи впливу завад негаусового характеру. Особливо важливою є здатність цього підходу моделювати кореляційну залежність між компонентами негаусових процесів, що не завжди можливо у рамках традиційного кореляційного аналізу. У цілому, моментно-кумулянтний опис забезпечує збалансовану точність і обчислювальну ефективність при моделюванні негаусових сигналів, перевершуючи класичні підходи за умов статистичної складності [14].

Методи обробки сигналів, що спираються на статистики вищих порядків, активно застосовуються у системах прийому даних, які функціонують в умовах інтенсивного зашумлення каналів зв'язку. У таких випадках класичні методи часто виявляються непридатними або надмірно ресурсоемними, тоді як *HOS*-методи дозволяють досягти високої точності при розумній обчислювальній складності [16–18].

Метою роботи є підвищення ефективності систем виявлення сигналів в умовах адитивної взаємодії з корельованими ексцесними негаусовими завадами, що досягається через розробку нових моментно-кумулянтних моделей вищих порядків для опису випадкових негаусових процесів, синтез нелінійних розв'язувальних правил, які є оптимальними за модифікованим моментним критерієм якості перевірки статистичних гіпотез, що дає до-

даткові можливості для створення нових методів та комп'ютерних засобів виявлення сигналів в складних завадових умовах.

1 Математичні моделі корельованих ексцесних негаусових процесів на основі HOS

У низці прикладних задач обробки сигналів надзвичайно важливим є урахування кореляційних зв'язків між вибірковими значеннями випадкових процесів $\xi(t)$. Це дозволяє точніше моделювати реальну поведінку сигналів, які формуються під впливом зовнішніх або внутрішніх залежних факторів. Для таких задач традиційно застосовується багатовимірна функція щільності ймовірності (*MD PDF – MultiDimensional Probability Density Function*), яка дає повний статистичний опис залежностей між змінними:

$$f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{X}^T |\Sigma|^{-1} \mathbf{X}\right), \quad (1)$$

де Σ — матриця коваріацій між випадковими величинами, $\mathbf{X}$ — вектор значень цих величин.

Проте, коли йдеться про негаусові досліджувані процеси, побудова та оцінка багатовимірної PDF стає надзвичайно складною через відсутність аналітичних виразів, складну параметризацію та високу обчислювальну складність. Альтернативним шляхом подолання цих обмежень є застосування *HOS*. Замість повної побудови багатовимірної щільності *MD PDF*, *HOS* дозволяє описати основні характеристики випадкових процесів через моменти та кумулянти до заданого порядку. Цей підхід є ефективним у випадках, коли розподіл даних невідомий або складний, але потрібно врахувати асиметрію, ексцес і залежності між компонентами. *HOS*-представлення значно знижує обчислювальну складність порівняно з повноцінною *PDF* і дає змогу будувати розв'язувальні правила (*ПП*), які ефективно працюють навіть при частково відомій статистиці.

У цьому контексті двовимірні моментно-кумулянтні моделі (*2D-HOS*) виступають як перспективна альтернатива традиційним *MD PDF*-орієнтованим методам. Такі моделі базуються на аналізі сумісних моментів і кумулянтів двох випадкових величин, що дає змогу оцінювати ступінь їхньої статистичної залежності та відхилення від гаусової поведінки.

Представлення одновимірних (*1D*) та двовимірних (*2D*) *PDF* через моментно-кумулянтний опис випадкових процесів виглядає таким чином. Наприклад, *1D* моменти m_i порядку i випадкової величини

ξ визначаються за допомогою *PDF* $p(\xi)$

$$m_i = E(\xi^i) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^i p(\xi) dx, \quad (2)$$

та для негаусових статистично незалежних випадкових величин (із нульовим середнім значенням і дисперсією χ_2) залежність між початковими моментами m_i та кумулянтами χ_i до четвертого порядку описується таким чином [11, 12]:

$$m_1 = 0, \quad m_2 = \chi_2, \quad m_3 = \chi_3, \quad m_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2, \quad (3)$$

де для гаусових процесів кумулянтні коефіцієнти третього та вищих порядків ($\chi_3, \chi_4, \dots$) дорівнюють нулю.

Застосування сумісних, або *2D-HOS* моделей випадкових процесів, дозволяє описати не тільки степінь негаусовості випадкових процесів, але і їхні кореляційні властивості. Для цього надамо визначення сумісним моментам двох випадкових величин, які виражають статистичний зв'язок між двома вибірковими величинами досліджуваного випадкового процесу.

Визначення 1. Сумісним моментом двох випадкових величин ξ і η розмірності (ij) буде величина, що виражається як математичне сподівання добутку i -го степеня випадкової величини ξ та j -го степеня випадкової величини η :

$$m_{ij}^{(\xi, \eta)} = E\xi^i \eta^j = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i y^j p(x, y) dx dy, \quad (4)$$

де $p(x, y)$ – сумісний розподіл випадкових величин ξ та η .

В цьому випадку, для опису статистичного зв'язку між двома вибірковими значеннями будуть використовуватися сумісні моменти m_{ij} та кумулянти χ_{ij} розмірності (ij) , які до 4-го порядку мають такий вид [14]:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \chi_{11}, \quad m_{12} = \chi_{12}, \quad m_{13} = \chi_{13} + 3\chi_2\chi_{11}, \\ m_{22} &= \chi_{22} + \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Використання сумісних кумулянтів другого, третього та четвертого порядків дозволяє описати як лінійні (коваріаційні), так і нелінійні зв'язки між вибірковими значеннями. Це особливо актуально в умовах, де сигнали є корельованими, але мають складну внутрішню структуру, яка не може бути відтворена за допомогою лише перших двох моментів.

Завдяки своїй структурі, *2D-HOS* моделі забезпечують баланс між аналітичною зручністю та адекватністю опису реальних процесів. Вони дозволяють реалізовувати обчислювально ефективні алгоритми, які здатні враховувати як негаусову природу завад, так і їхню взаємну залежність. Таким чином, застосування двовимірного моментно-кумулянтного підходу можна розглядати як ефективний інструмент для моделювання складних завадових середовищ і підвищення достовірності прийнятих рішень.

У сучасній теорії випадкових процесів для опису негаусових розподілів зі складною структурою

широко використовується поняття перфорованих випадкових величин [11, 12]. Такі величини представляють собою випадкові процеси, чий статистичний опис здійснюється неповним набором моментів або кумулянтів, тобто лише тією їх частиною, яка відображає ключові властивості розподілу. Це дозволяє зменшити обчислювальне навантаження без суттєвої втрати точності моделювання. Перфоровані моделі є зручними в задачах, де повна реконструкція багатовимірного розподілу неможлива або недоцільна, наприклад, у випадках обмеженого обсягу вибірки, складної форми *PDF* або за умов обмеженого доступу до даних. Завдяки такому підходу можна сфокусуватись на найважливіших статистичних характеристиках, таких як кумулянти певного порядку, що найбільше впливають на ефективність прийняття рішень у системах обробки сигналів.

Класифікація негаусових випадкових величин за їх кумулянтною структурою дозволяє виділити асиметричні, ексцесні та асиметрично-ексцесні типи. Асиметричні випадкові величини характеризуються наявністю ненульових кумулянтів третього та інших непарного порядку, що свідчить про відхилення розподілу від симетрії. Ексцесні – мають підвищені кумулянти четвертого та інших парних порядків, що вказує на важкі хвости та більшу ймовірність екстремальних відхилень. Найскладнішими є асиметрично-ексцесні величини, для яких одночасно відмінними від нуля є як кумулянти непарного, так і парного порядків. Такі процеси потребують спеціалізованих моделей і є типовими для реальних сигналів у складних завадових умовах.

Вибір кореляційних функцій є важливим елементом при дослідженні статистичних зв'язків випадкових процесів. Такий перелік функцій є досить великим, разом з тим виділені деякі найбільш поширені кореляційні функції, які мають своє застосування в багатьох додатках:

$$\begin{aligned} \rho_{\xi}(\tau) &= \sigma^2 e^{-A|\tau|}, \quad \rho_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}(1 + A|\tau|), \\ \rho_{\xi}(\tau) &= \sigma^2 e^{-A|\tau|}(1 - A|\tau|), \\ \rho_{\xi}(\tau) &= \sigma^2 e^{-A|\tau|} \left(1 + A|\tau| + \frac{A^2 \tau^2}{3} \right), \\ \rho_{\xi}(\tau) &= \sigma^2 e^{-A|\tau|} \left(\cos B\tau + \frac{A}{B} \sin B|\tau| \right), \\ \rho_{\xi}(\tau) &= \sigma^2 e^{-A|\tau|} \cos B\tau, \\ \rho_{\xi}(\tau) &= \sigma^2 e^{-A|\tau|} \left(\cos B\tau - \frac{A}{B} \sin B|\tau| \right), \end{aligned} \quad (6)$$

де $\tau = |t_v - t_k|$ – кореляційний інтервал, який при врахуванні статистичних зв'язків менший інтервалу кореляції $\tau = |t_v - t_k| \leq \tau_{\text{кор}}$, $v, k = 1, n$; $\tau_{\text{кор}}$ – час кореляції; $\sigma^2 = \rho_{\xi}(0)$ – дисперсія досліджуваного випадкового процесу; $A, B > 0$ – масштабуючі коефіцієнти, які визначають статистичні зв'язки між вибірковими значеннями. Часове представлення деяких кореляційних функцій (6) від параметрів кореляції представлено на Рис. 1.

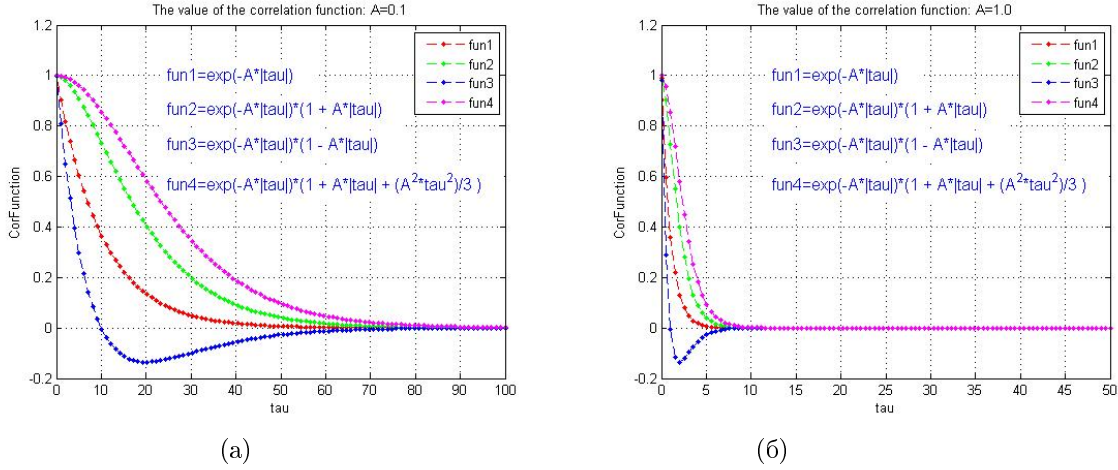


Рис. 1. Залежність кореляційних функцій $\rho_\xi(\tau)$ з параметрами масштабування « A » від інтервалу кореляції τ (τ): (а) $A=0.1$; (б) $A=1.0$.

Розглянемо поняття ексцесних корельованих випадкових величин, представлених у термінах HOS та $1D$ і $2D$ моментно-кумулянтних моделей.

Визначення 2. Ексцесними статистично залежними випадковими величинами будемо називати такі, для яких відмінними від нуля будуть χ_2 і χ_4 , а також сумісні кумулянти $\chi_{04}, \chi_{11}, \chi_{31}, \chi_{22}, \chi_{13}, \chi_{40}$, а всі інші кумулянти третього і вище четвертого порядків, а також сумісні кумулянти вище четвертого порядку дорівнюють нулю. Тоді початкові моменти до шостого порядку включно запишуться як:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \chi_1, \quad \alpha_2 = \chi_2, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2, \\ \alpha_5 &= 0, \quad \alpha_6 = 15\chi_2\chi_4 + 15\chi_2^3 \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Представимо зв'язок сумісних моментів з сумісними кумулянтами таким чином:

$$\begin{aligned} m_{11}^{(v,k)} &= \chi_{11} = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, \quad m_{12}^{(v,k)} = \chi_{12} = 0, \\ m_{13}^{(v,k)} &= \gamma_4 \chi_{11}^2 + 3\chi_2 \chi_{11}, \\ m_{22}^{(v,k)} &= \chi_2^2 \left(\gamma_4 \rho^{(v,k)^2} + 1 + 2\rho^{(v,k)^2} \right), \dots \end{aligned} \quad (8)$$

де $\rho^{(v,k)}$ – кореляційна функція заданого виду між v -м і k -м вибірковими значеннями, представлена в (6).

На базі розроблених математичних моделей, що описують корельовані ексцесні негаусові процеси, сформовано нові підходи до виявлення сигналів, які ґрунтуються на застосуванні модифікованого моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез. Запропоновані методи принципово відрізняються від традиційних, оскільки враховують тонку структуру статистичних залежностей через використання багатовимірних моментно-кумулянтних характеристик вищих порядків (HOS). Зазначена методологія слугуватиме основою для побудови поліноміальних стохастичних правил прийняття рішень, орієнтованих на ефективне виявлення сигналів на фоні корельованих ексцесних негаусових завад.

2 Застосування модифікованого моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез для побудови поліноміальних РП

Нехай на інтервалі часу $(0, T)$ спостерігаються випадкові сигнали $\xi(t)$. Необхідно синтезувати алгоритми обробки сигналів $\xi(t)$, які дозволять визначити наявність корисного сигналу $s(t)$ (реалізується гіпотеза H_1), або ж його відсутність, коли випадкові сигнали $\xi(t)$ складаються лише із завади $\eta(t)$ (реалізується гіпотеза H_0). У цьому випадку $\xi(t) = s(t) + \eta(t)$, де $\eta(t)$ – стаціонарний корельований негаусовий ексцесний випадковий процес, який описується набором $1D$ і $2D$ кумулянтів та початкових моментів.

Будемо вважати, що при реалізації гіпотези H_1 множина початкових моментів має вигляд $(m_i^{(v)}, m_{ij}^{(\tau)})$, а при реалізації гіпотези H_0 – $(u_i^{(v)}, u_{ij}^{(\tau)})$, де $\{u_i^{(v)}, m_i^{(v)}\}$ – $1D$ моменти в момент часу t_v порядку i та $\{u_{ij}^{(\tau)}, m_{ij}^{(\tau)}\}$ – $2D$ сумісні моменти розмірності (ij) при реалізації гіпотези H_0 і H_1 відповідно.

При дискретизації сигналу $\xi(t)$ отримана вибірка буде мати вид $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ в моменти часу t_v , де реалізація гіпотез H_0 та H_1 запишеться як:

$$\begin{aligned} H_1 : \xi_v &= s_v(\alpha_k) + \eta_v \left(\gamma_k, \chi_{ij}^{(\tau)} \right), \\ H_0 : \xi_v &= \eta_v \left(\gamma_k, \chi_{ij}^{(\tau)} \right), \quad v = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (9)$$

де $s_v(\alpha_k)$ – сигнал, який описується параметрами α_k , $\eta_v \left(\gamma_k, \chi_{ij}^{(\tau)} \right)$ – ексцесна негаусова випадкова величина, яка описується послідовністю кумулянтів $\chi_{ij}^{(\tau)}$ та кумулянтних коефіцієнтів γ_k .

Як відомо, оптимальний Байєсівський алгоритм виявлення сигналів має мінімізувати середній ризик [4, 5]. Тоді достатня статистика при перевірці гіпотез, визначається як відношення правдоподібності:

$$\Lambda(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X}|H_1)/P(\mathbf{X}|H_0). \quad (10)$$

У більшості випадків відношення правдоподібності (10) ефективно застосовується для випадків, коли ймовірнісні характеристики процесів описуються нормальними законами розподілу, що забезпечує його просту інтерпретацію та реалізацію. Проте, коли мова йде про негаусові та корельовані випадкові процеси, практичне використання такого підходу стикається зі значними труднощами. Це пов'язано як із невизначеністю форми *PDF*, параметрів, а також зі складністю реалізації обчислювальних процедур. У зв'язку з цим виникає потреба у використанні альтернативних методів, які б дозволили обійти ці обмеження. Одним із таких рішень є апроксимація виразу (10) за допомогою степеневі поліноміальної функції. Зокрема, пропонується розклад логарифму відношення правдоподібності у вигляді стохастичного ряду, що в свою чергу, дозволяє синтезувати РП, оптимальні за обраним моментним критерієм якості [15]. Такий підхід позбавляє необхідності застосовувати *PDF*, натомість використовує узагальнені статистичні характеристики, такі як математичне сподівання та дисперсію РП.

Отримані напрацювання демонструють позитивний результат синтезу поліноміальних РП, оптимальних за моментним критерієм якості верхніх границь ймовірностей помилок перевірки статистичних гіпотез, або коротко критерієм *Ku* [13, 15]. Врахування параметрів негаусового розподілу досліджуваного процесу та нелінійна обробка вибірових значень може суттєво зменшити ймовірності помилок першого та другого роду синтезованих РП у порівнянні з добре відомими результатами для гаусових моделей випадкових процесів.

Для ефективного виявлення сигналів у середовищі корельованих негаусових завад виникає потреба в проведенні додаткових досліджень, орієнтованих на врахування статистичної залежності між елементами вибірки досліджуваного процесу. З цією метою необхідно так змінити підхід до побудови РП, щоб з одного боку, забезпечити відображення кореляційних зв'язків, властивих негаусовим процесам, а з іншого — зберегти і максимально реалізувати переваги застосування моментного критерію якості *Ku*, який дозволяє оцінити ефективність РП без використання повної ймовірнісної моделі.

Нехай на заданому інтервалі спостереження є n статистично залежних випадкових величин $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Скористаємося підходом, коли логарифм відношення правдоподібності (10), за теоремою Вейерштраса, для n статистично залежних випадкових величин представляється у вигляді ряду для функції багатьох змінних. В цьому випадку

існують такі коефіцієнти, що логарифм відношення правдоподібності можна представити як:

$$\ln \frac{P(\mathbf{X}|H_1)}{P(\mathbf{X}|H_0)} = k_0 + \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} k_{(v)}^{(\tau)} x_{(v)}^i + \sum_{v=1}^n \sum_{p=2}^n \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k_{(v,p)}^{(\tau)} x_{(v)}^i x_{(p)}^j + \dots \quad (11)$$

У виразі (11) можна бачити, що окрім першого доданку у вигляді суми певних степенів самої змінної із заданими коефіцієнтами, фігурують також комбінації добутоків змінної з різними степенями, що дозволяє враховувати статистичні зв'язки між випадковими величинами. Разом з тим відмітимо, що такий підхід не визначає методів знаходження самих невідомих коефіцієнтів такого ряду. Таким чином, ряд (11) будемо використовувати як РП для розрізнення статистичних гіпотез, де невизначені коефіцієнти знаходяться з умови екстремуму (мінімуму чи максимуму) вибраного критерію якості.

При розв'язанні практичних задач доцільно використовувати не ряди, а поліноми із заданою кількістю членів s в (11), які в загальному випадку не можуть дорівнювати логарифму відношення правдоподібності. Разом з тим, певна кількість доданків в такому поліномі надасть можливість наближення до логарифма відношення правдоподібності, і найпростішим таким наближенням буде наявність в поліномі перших двох доданків:

$$\Lambda(\mathbf{X})_{(sn)}^{(\tau)} = k_0^{(\tau)} + \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n k_{iv}^{(\tau)} x_v^i \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} 0, \quad (12)$$

де невідомі коефіцієнти $k_0^{(\tau)}$ і $k_{iv}^{(\tau)}$ повинні мати такі властивості, щоб врахувати статистичні зв'язки (τ) між досліджуваними вибіровими значеннями і визначатися із заданого критерію якості перевірки статистичних гіпотез.

Нехай РП для перевірки статистичних гіпотез представлено в наступній формі:

$$\Lambda(\mathbf{X}) = \gamma(\mathbf{X}) - k_0 \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} 0, \quad (13)$$

де $\gamma(\mathbf{X})$ є функцією вибірових значень з вибірки $\mathbf{X}$ та коефіцієнт k_0 обраний з наступних умов

$$M_0 = E[\Lambda(\mathbf{X})|H_0] = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\mathbf{X})p(\mathbf{X}|H_0)Pdx < 0,$$

$$M_1 = E[\Lambda(\mathbf{X})|H_1] = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\mathbf{X})p(\mathbf{X}|H_1)Pdx \geq 0.$$

Тоді, відповідно до нерівності Чебишева, ймовірність помилок першого та другого роду РП запишеться таким чином:

$$\begin{aligned}\alpha &= P[\Lambda(\mathbf{X}) \geq 0 | H_0] \leq G_0/M_0^2 = \alpha_0, \\ \beta &= P[\Lambda(\mathbf{X}) < 0 | H_1] \leq G_1/M_1^2 = \beta_0,\end{aligned}\quad (14)$$

де $G_i(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(\mathbf{X}) - M_i]^2 p(\mathbf{X} | H_i) d\mathbf{x}$ – дисперсія розв'язувальної функції $\gamma(X)$ при гіпотезі та альтернативі H_i , $i = 0, 1$.

Тоді сума ймовірностей помилок першого та другого роду виразиться таким чином

$$F(\alpha, \beta) = \alpha + \beta \leq \alpha_0 + \beta_0 = \frac{G_0}{M_0^2} + \frac{G_1}{M_1^2} = \Phi(G, M). \quad (15)$$

Для зазначених виразів M_0 та M_1 коефіцієнт k_0 визначимо як:

$$k_0 = 0.5(E_0 + E_1), \quad (16)$$

де $E_i(\gamma) = E[\gamma(\mathbf{X}) | H_i]$ – математичне очікування розв'язувальної функції $\gamma(\mathbf{X})$ (13) при гіпотезі та альтернативі H_i , $i = 0, 1$.

Тоді, функція $\Phi(G, M)$ (15) для таких коефіцієнтів k_0 (16) отримає таку форму

$$\Phi(G, M) = 4Ku(G, E),$$

де

$$Ku(E, G) = (G_{0(sn)} + G_{1(sn)}) / (E_{1(sn)} - E_{0(sn)})^2. \quad (17)$$

Моментний критерій якості (17) тісно пов'язаний із класичними ймовірнісними критеріями, і має прозорий фізичний зміст. Найкращим буде таке поліноміальне РП, для якого сума дисперсій $G_{i(sn)}$ РП при гіпотезі та альтернативі будуть мінімальними, а відстань між математичними очікуваннями $E_{i(sn)}$, $i = 0, 1$, буде максимальною.

Для опрацювання корельованих негаусових процесів необхідно так внести зміни у формування моментного критерію якості перевірки статистичних гіпотез, щоб врахувати статистичні зв'язки вибірових значень та їх негаусовий розподіл. Для цього пропонується використати сумісні моменти та кумулянти різних порядків, математичні моделі яких отримані вище (7), (8). Легко показати, що коефіцієнти $k_0^{(\tau)}$ і $k_{iv}^{(\tau)}$ РП (12) будуть враховувати кореляційні залежності вибірових значень, оскільки залежать як від $1D$, так і від $2D$ початкових моментів. Тоді математичне сподівання $E_{i(sn)}^{(\tau)}$ та дисперсія $G_{i(sn)}^{(\tau)}$ РП (12) будуть залежати від сумісних моментів і кумулянтів та мають вид:

$$\begin{aligned}E_{0(sn)}^{(\tau)} &= \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s k_{iv}^{(\tau)} u_{iv}, \\ E_{1(sn)}^{(\tau)} &= \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s k_{iv}^{(\tau)} m_{iv},\end{aligned}\quad (18)$$

$$\begin{aligned}G_{0(sn)}^{(\tau)} &= \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{iv}^{(\tau)} k_{jv}^{(\tau)} F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_0), \\ G_{1(sn)}^{(\tau)} &= \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{iv}^{(\tau)} k_{jv}^{(\tau)} F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_1),\end{aligned}\quad (19)$$

де

$$\begin{aligned}F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_0) &= u_{(ij)v}^{(\tau)} - u_i^{(v)} u_j^{(k)}, \\ F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_1) &= m_{(ij)v}^{(\tau)} - m_i^{(v)} m_j^{(k)}.\end{aligned}\quad (20)$$

У цьому випадку визначення кореляційних моментів (20) залежать не лише від одновимірних моментів $u_i^{(v)}$ та $m_i^{(v)}$, але й від двовимірних (2D) або сумісних моментів $u_{(ij)}^{(\tau)}$ and $m_{(ij)}^{(\tau)}$ (8) для гіпотез H_0 та H_1 відповідно. Очевидно, що оптимальні коефіцієнти $k_{iv}^{(\tau)}$ поліноміального РП (12) мають бути визначені в такий спосіб, щоб мінімізувати суму ймовірностей помилок першого та другого роду РП (15), або знаходитися з мінімуму наступного функціоналу, який відрізняється від (17) і враховує статистичні зв'язки вибірових значень:

$$Ku(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}) = (G_{0(sn)}^{(\tau)} + G_{1(sn)}^{(\tau)}) / (E_{1(sn)}^{(\tau)} - E_{0(sn)}^{(\tau)})^2. \quad (21)$$

Показано, що мінімальне значення критерію $Ku(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ (21) отримується для таких оптимальних коефіцієнтів $k_{iv}^{(\tau)}$, які знаходяться з такої системи рівнянь:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^s k_{iv}^{(\tau)} (F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_0) + F_{(ij)v}^{(\tau)}(H_1)) &= m_i^{(v)} - u_i^{(v)}, \\ v &= \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, s}.\end{aligned}\quad (22)$$

Для розв'язання системи рівнянь (22) використовують доповнення Шура для обробки блокових матриць.

Визначення 3. Нехай функціонал $Ku(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ (21) буде визначений як моментний критерій якості перевірки статистичних гіпотез для статистично залежних вибірових значень у вигляді РП виду (12). Нехай отримані оптимальні коефіцієнти РП $k_0^{(\tau)}$ і $k_{iv}^{(\tau)}$, які мінімізують праву частину рівняння (21), визначають цей критерій. Тоді назовемо цей критерій як **"модифікований моментний критерій якості верхніх границь ймовірностей помилок для перевірки статистичних гіпотез"**.

Зазначимо, що чим менше значення критерію $Ku(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ (21), тим менше значення суми ймовірностей помилок першого та другого роду РП виду (12).

Властивість 1. Якщо шукані коефіцієнти РП (12) отримані через розв'язок системи алгебраїчних рівнянь (22), то вони задовольняють умову:

$$I_{sn}^{(\tau)} = \sum_{v=1}^n \sum_{i=1}^s k_{iv}^{(\tau)} (m_i^{(v)} - u_i^{(v)}). \quad (23)$$

Визначення 4. Прийемо значення $I_{sn}^{(\tau)}$ (23) за кількість інформації, яка отримується при розрізненні гіпотез H_0 та H_1 з вибірових значень розмірності n при застосуванні РП виду (12) і є оберненою величиною до значення $Ku(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ (21).

Значення $Ku(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ (21) та $I_{sn}^{(\tau)}$ (23) використовуються для оцінювання ефективності синтезованих поліноміальних РП при різних степенях поліномів.

3 Поліноміальні алгоритми виявлення сигналів на фоні корельованих ексцесних негаусових завад

Розглянемо повністю відомий постійний сигнал a , виявлення якого є класичною задачею в теорії виявлення сигналів. Цей тип сигналу зустрічається у випадках, коли характеристики сигналу, такі як форма і спектр, повністю відомі й залишаються постійними з часом. Така постановка завдань виникає в системах, де існує чітке знання про сигнал, який необхідно виявити на фоні шуму, наприклад передача цифрових сигналів по каналам зв'язку.

Для синтеза поліноміального РП при степені $s = 1$ скористаємося загальним РП, представленим в (12), де оптимальні коефіцієнти знаходяться з мінімуму модифікованого моментного критерію $Ku(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ (21). Моментно-кумулятний опис у вигляді одновимірних (1D) моментів до другого порядку (2s порядку) для корельованих ексцесних негаусових процесів має вид:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \chi_2, \quad m_1 = a, \quad m_2 = a^2 + \chi_2, \quad (24)$$

а сумісні моменти $u_{11}^{(v,k)}$ при гіпотезі H_0 та $m_{11}^{(v,k)}$ при гіпотезі H_1 запишуться як:

$$\begin{aligned} u_{11}^{(v,k)} &= \chi_{11} = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, \\ m_{11}^{(v,k)} &= a^2 + \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, \end{aligned} \quad (25)$$

де $\rho^{(v,k)}$ – кореляційна функція випадкового процесу, яка визначається згідно з (6) і обирається згідно з відповідною задачею дослідження.

Показано, що синтезоване РП при $s = 1$ прийме таке значення

$$\sum_{v=1}^n \Delta_{Av} \left(x_v - \frac{a}{2} \right) \begin{matrix} H_1 \\ > \\ H_0 \end{matrix} 0, \quad (26)$$

де Δ_{Av} – визначник, який отримується з Δ_1 при заміні v стовбця на новий стовбець, який складається

з одиниць, а Δ_1 запишеться як:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \det \left\| F_{(11)}^{(\tau)} \right\| = \det \left\| \rho^{(\tau_{v,k})} \right\| = \\ &= \begin{vmatrix} \rho^{(1,1)} & \rho^{(1,2)} & \dots & \rho^{(1,n)} \\ \rho^{(2,1)} & \rho^{(2,2)} & \dots & \rho^{(2,n)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho^{(n,1)} & \rho^{(n,2)} & \dots & \rho^{(n,n)} \end{vmatrix} \neq 0, \end{aligned} \quad (27)$$

де $F_{(ij)}^{(\tau)} = F_{(ij)}^{(\tau)}(H_0) + F_{(ij)}^{(\tau)}(H_1)$ і визначаються згідно з (20) при врахуванні (24) та (25).

Показано, що ефективність лінійного РП (26) визначається через показник критерію якості $Ku(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ (21) або кількість інформації при розрізненні гіпотез згідно з (23)

$$\begin{aligned} Ku_1(E^{(\tau)}, G^{(\tau)}) &= \frac{\Delta_1}{a^2 \sum_{v=1}^n \Delta_{Av}}, \\ I_{1n}^{(\tau)} &= a^2 \sum_{v=1}^n \frac{\Delta_{Av}}{\Delta_1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Показано, що лінійне РП (26) є еквівалентним правилу, яке отримується з відношення правдоподібності для гаусових корельованих моделей випадкових процесів. Окрім того, при статистично незалежних вибірових значеннях РП (26) вироджується в добре відомий лінійний вираз РП, який є оптимальним для гаусових моделей завад та має такий вид:

$$\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v - \frac{a}{2} \begin{matrix} H_1 \\ > \\ H_0 \end{matrix} 0. \quad (29)$$

При цьому значення критерію якості $Ku_1(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ та показник $I_{1n}(E, G)$ трансформуються до такого виду:

$$Ku_1(E, G) = 2/nq, \quad I_{1n}(E, G) = nq/2, \quad (30)$$

де q – відношення сигнал/шум (SNR – signal-to-noise ratio).

Синтезоване РП (26) не враховує негаусовий характер досліджуваного випадкового процесу, оскільки для його побудови використовувалися лише початкові моменти першого та другого порядку. Теж саме буде і при $s = 2$, тому збільшимо степінь поліному РП до $s = 3$, що надасть можливість оперувати початковими моментами до 6-го порядку включно, і відповідно, характеризувати випадковий процес через значення коефіцієнта ексцесу, який буде відмінним від нуля для даного типу досліджуваного випадкового процесу:

$$\Lambda(\mathbf{X})_{(3n)}^{(\tau)} = k_0^{(\tau)} + \sum_{v=1}^n k_{1v}^{(\tau)} x_v + \sum_{v=1}^n k_{2v}^{(\tau)} x_v^2 + \sum_{v=1}^n k_{3v}^{(\tau)} x_v^3 \begin{matrix} H_1 \\ > \\ H_0 \end{matrix} 0. \quad (31)$$

Для обчислення оптимальних коефіцієнтів РП (31) необхідна апіорна інформація про досліджуваний корельований ексцесний негаусовий процес. Показано, що початкові u_i та сумісні моменти $u_{ij}^{(v,k)}$ досліджуваної випадкової величини при гіпотезі H_0 до 6-го порядку мають такий вид:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0, \quad u_2 = \chi_2, \quad u_3 = 0, \\
 u_4 &= \chi_4 + 3\chi_2^2 = \chi_2^2(\gamma_4 + 3), \\
 u_5 &= 0, \quad u_6 = \chi_2^3(15 + 15\gamma_4); \\
 u_{11}^{(v,k)} &= \chi_{11} = \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, \quad u_{12}^{(v,k)} = u_{21}^{(v,k)} = 0, \\
 u_{13}^{(v,k)} &= u_{31}^{(v,k)} = \gamma_4 \chi_{11}^2 + 3\chi_2 \chi_{11} = \\
 &= \chi_2^2 \left(\gamma_4 \rho^{(v,k)^2} + 3\rho^{(v,k)} \right), \\
 u_{22}^{(v,k)} &= \chi_2^2 \left(\gamma_4 \rho^{(v,k)^2} + 1 + 2\rho^{(v,k)^2} \right), \\
 u_{23}^{(v,k)} &= u_{32}^{(v,k)} = \chi_2^{5/2} \gamma_3 + 6\chi_2^{5/2} \rho^{(v,k)^{5/2}} \gamma_3 + \\
 &\quad + 3\chi_2^{5/2} \rho^{(v,k)^{3/2}} \gamma_3, \\
 u_{33}^{(v,k)} &= 3\chi_2^3 \gamma_4 \rho^{(v,k)^2} \chi_2^2 \gamma_3^2 + 9\chi_2^3 \rho^{(v,k)^3} \gamma_4 + \\
 &\quad + 3\chi_2^3 \rho^{(v,k)^2} \gamma_4 + 9\chi_2^3 \rho^{(v,k)} + 6\chi_2^3 \rho^{(v,k)^3} + 9\chi_2^3 \rho^{(v,k)^3} \gamma_3^2,
 \end{aligned} \tag{32}$$

та початкові m_i та сумісні $m_{ij}^{(v,k)}$ моменти при гіпотезі H_1 запишуться як:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= a, \quad m_2 = a^2 + \chi_2, \quad m_3 = a^3 + 3a\chi_2, \\
 m_4 &= a^4 + 6a^2\chi_2 + \gamma_4\chi_2^2 + 3\chi_2^2, \\
 m_5 &= a^5 + 10a^3\chi_2 + 5a\chi_2^2(3 + \gamma_4), \\
 m_6 &= a^6 + 15a^4\chi_2 + 15a^2\chi_2^2(3 + \gamma_4) + 15\chi_2^3(1 + \gamma_4^2); \\
 m_{11}^{(v,k)} &= a^2 + \chi_2 \cdot \rho^{(v,k)}, \\
 m_{12}^{(v,k)} &= m_{21}^{(v,k)} = a^3 + a\chi_2 + 2a\chi_2\rho^{(v,k)}, \\
 m_{13}^{(v,k)} &= a^4 + 3a^2\chi_2\rho^{(v,k)} + 3a^2\chi_2 + 4a\chi_2^{\frac{3}{2}}\gamma_3\rho^{(v,k)^{\frac{3}{2}}} + \\
 &\quad + \chi_2^2\rho^{(v,k)^2}(\gamma_4 + 3), \\
 m_{22}^{(v,k)} &= a^4 + 2a^2\chi_2 + 4a^2\chi_2\rho^{(v,k)} + \chi_2^2 \left(\gamma_4\rho^{(v,k)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + 1 + 2\rho^{(v,k)^2} \right), \\
 m_{23}^{(v,k)} &= m_{32}^{(v,k)} = a^5 + 4a^3\chi_2 + 6a^3\chi_2\rho^{(v,k)} + \\
 &\quad + 5a\chi_2^2\rho^{(v,k)^2}(3 + \gamma_4), \\
 m_{33}^{(v,k)} &= a^6 + 6a^4\chi_2 + 9a^4\chi_2\rho^{(v,k)} + \\
 &\quad + 15a^2\chi_2^2\rho^{(v,k)^2}(\gamma_4 + 3) + 15\chi_2^3\rho^{(v,k)^3}(\gamma_4 + 1).
 \end{aligned} \tag{33}$$

Вирази (32) та (33) використовуються для розв'язку системи рівнянь (22) при знаходженні оптимальних коефіцієнтів $k_{1v}^{(\tau)}, k_{2v}^{(\tau)}, k_{3v}^{(\tau)}$, які підставляються в РП (31) для перевірки статистичних гіпотез. Для оцінки ефективності синтезованого нелінійного РП (31) використані показники (21) або (23), які характеризують ймовірності помилок першого та другого роду синтезованих РП.

4 Результати та обговорення

Проведено аналіз отриманих поліноміальних РП при степенях полінома $s = 1, 3$ при різних значеннях параметрів коефіцієнта ексцесу γ_4 , відношення SNR q та параметрів кореляційних функцій $\rho_\xi(\tau)$ (6). Ефективність синтезованих РП порівнювалася по значенню критерію якості $Ku(E^{(\tau)}, G^{(\tau)})$ (21) або кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез $I_{1n}^{(\tau)}$ (23) для лінійного (26) та нелінійного (31) РП. Відмітимо, що чим більше значення кількості добутої інформації $I_{1n}^{(\tau)}$ або $I_{3n}^{(\tau)}$, тим менші ймовірності помилок першого та другого роду синтезованих РП. Таким чином, РП з більшим показником кількості добутої інформації буде вважатися більш ефективним.

На Рис. 2 приведені залежності $I_{1n}^{(\tau)}/I_{3n}^{(\tau)}$ від коефіцієнта ексцеса негаусової завади γ_4 (4). Дослідження проводилися при різних значеннях SNR ($q=0.1; 1; 10$) та параметрах кореляції для кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$, яка має широке застосування для опису стаціонарних процесів з експоненціальним згасанням кореляції.

На Рис. 2 (а) масштабуючий коефіцієнт має відносно невелике значення $A = 0.5$, що свідчить про сильні статистичні зв'язки вибірових значень, а на Рис. 2 (б) – $A = 5.0$, що свідчить про практичну відсутність таких статистичних залежностей. При нульовому значенні $\gamma_4=0$, що відповідає гаусовій моделі досліджуваного випадкового процесу, відношення $I_{1n}^{(\tau)}/I_{3n}^{(\tau)} = 1$. При зміні параметра γ_4 таке відношення стає менше одиниці. Це свідчить про те, кількість добутої інформації $I_{3n}^{(\tau)}$ більша у порівнянні з $I_{1n}^{(\tau)}$, і відповідно, таке нелінійне РП (25) характеризується меншими ймовірностями помилок у порівнянні з лінійним РП (20), яке є оптимальним для гаусової моделі випадкового процесу.

Наприклад, при сильному експоненційному кореляційному зв'язку з масштабуючим коефіцієнтом $A = 0.5$ (Рис. 2 (а)) при значенні коефіцієнта ексцесу $\gamma_4=4.5$ і відношенні сигнал/шум $q=0.1$ відношення $I_{1n}^{(\tau)}/I_{3n}^{(\tau)}$ буде дорівнювати 0.5. Це свідчить про те, що ймовірності помилок першого та другого роду синтезованого нелінійного РП при степені полінома $s=3$ (25) будуть вдвічі менші за аналогічний показник для лінійного РП при $s=1$ (20), яке є оптимальним для гаусової моделі завад. Таким чином, врахування коефіцієнта ексцесу дозволяє збільшити у двічі ефективність РП у порівнянні з поширеними і добре відомими лінійними моделями РП, оптимальними для гаусових щільностей розподілу досліджуваних процесів.

Відмітимо, що найбільший позитивний ефект від нелінійної обробки у порівнянні з лінійною спостерігається для слабких сигналів ($\text{SNR} < 1$), що є важливим для обробки сигналів в сильно зашумлених каналах.

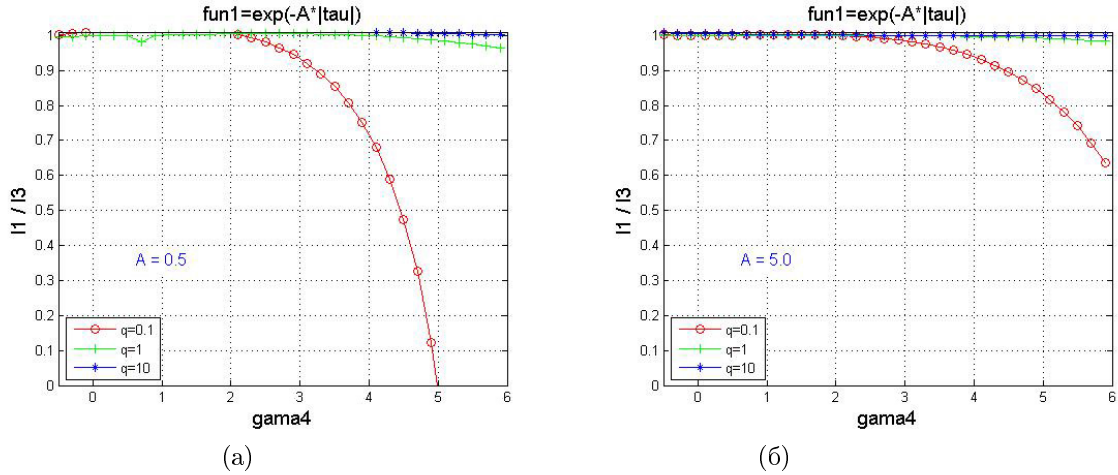


Рис. 2. Залежність відношення кількості добутої інформації про розрізнення гіпотез I_1/I_3 для різних РП від коефіцієнта ексцесу негаусової завади γ_4 при різних значеннях SNR (q) та параметрах кореляційної функції $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$: (а) $A = 0.5$; (б) $A = 5.0$

На основі отриманих нових моделей опису корельованих негаусових процесів та розробки методів їх опрацювання проведено імітаційне моделювання процесів виявлення послідовності зашумлених постійних сигналів на фоні досліджуваних завад запропонованими поліноміальними РП, що імітує систему передачі даних в складних завадових умовах в телекомунікаційних системах. На Рис. 3. наведено часове представлення послідовності зашумлених постійних сигналів (а), результат обробки лінійним ($S=1$) та нелінійним ($S=3$) РП (б), прийняття рішення про реалізацію гіпотези H_0 чи H_1 (в) при адитивному впливі експоненційно корельованої негаусової завади для $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$, $\gamma_4 = 3$, $A = 0.5$, $q = 1$.

Подібне значення коефіцієнта ексцесу притаманне випадковим процесам, ймовірнісна структура яких описується Лапласівським розподілом. Ексцесні випадкові процеси з "довгими хвостами" є досить поширеним явищем у природі та технічних системах, і для них характерні значні відхилення від гаусової моделі. У технічних системах довгохвості розподіли виникають у радіоканалах з імпульсними завадами, у радарних відбиттях від складних об'єктів, де значення ексцесу може змінюватися у широкому діапазоні: від відносно невеликих $\gamma_4=1-5$ значень, до значних $\gamma_4=10-50$, або формально нескінченних (наприклад, для розподілу Коші).

Як видно з наведених результатів моделювання (Рис. 3), для лінійної обробки (РП $S=1$) характерні хибні спрацювання, які обведені в синій еліпс (в), в той час, як обробка такої самої зашумленої послідовності нелінійним (РП $S=3$) демонструє правильне прийняття рішення щодо реалізації гіпотез H_0 та H_1 .

Аналіз ефективності нелінійної обробки (РП $S=3$) (31) виявлення зашумлених сигналів у порівнянні з лінійною (РП $S=1$) (26) продемонстровано вище на Рис. 2. Необхідно відмітити, що лінійна

обробка сигналів при степені полінома $S=1$ еквівалента оптимальним правилам, отриманим з відношення правдоподібності для гаусової моделі завад. Таким чином, на даному рисунку приведений порівняльний аналіз зменшення ймовірностей помилок першого та другого роду нелінійними РП ($S=3$) у порівнянні з добре відомими і широко вживаними гаусовими моделями досліджуваних процесів. Як видно з отриманих результатів дослідження, виграш у обробці корельованих ексцесних випадкових процесів суттєво залежить як від параметрів SNR, значень кореляційних зв'язків, так і від параметрів ексцесної завади.

На основі запропонованих моментно-кумулянтних моделей корельованих негаусових процесів та поліноміальних алгоритмів виявлення сигналів, оптимальних за модифікованим критерієм якості прийняття рішень, розроблена узагальнена структурна схема обробки сигналів при різних степенях стохастичних поліномів (Рис. 4).

Запропонована система функціонує у режимі реального часу, де методом скочного вікна опрацьовуються вибірккові значення заданого обсягу n . Структурна схема алгоритму формування рішень побудована на основі послідовного з'єднання степеневих блоків перетворення. У кожному з таких блоків вибірккові значення вхідного сигналу підносяться до визначеного степеня та множаться на відповідні вагові коефіцієнти $k_1^{(\tau)}$, $k_2^{(\tau)}$, $k_3^{(\tau)}$, ..., що відповідають параметрам поліноміального правила прийняття рішень. Результати обчислень накопичуються всередині кожного блоку, утворюючи вихідні величини, які відображають внесок даного степеневого перетворення у загальний процес обробки. Після завершення роботи усіх блоків їхні результати підсумовуються, і до отриманого значення додається пороговий коефіцієнт $k_0^{(\tau)}$. Сумарний результат передається на пристрій прийняття рішень, який здійснює порівняння із заздалегідь визначеним по-

рогом та формує висновок про реалізацію однієї з гіпотез: у випадку перевищення порога сигнал приймається рішення про нульову гіпотезу (H_0). вважається виявленим (H_1), тоді як за відсутності

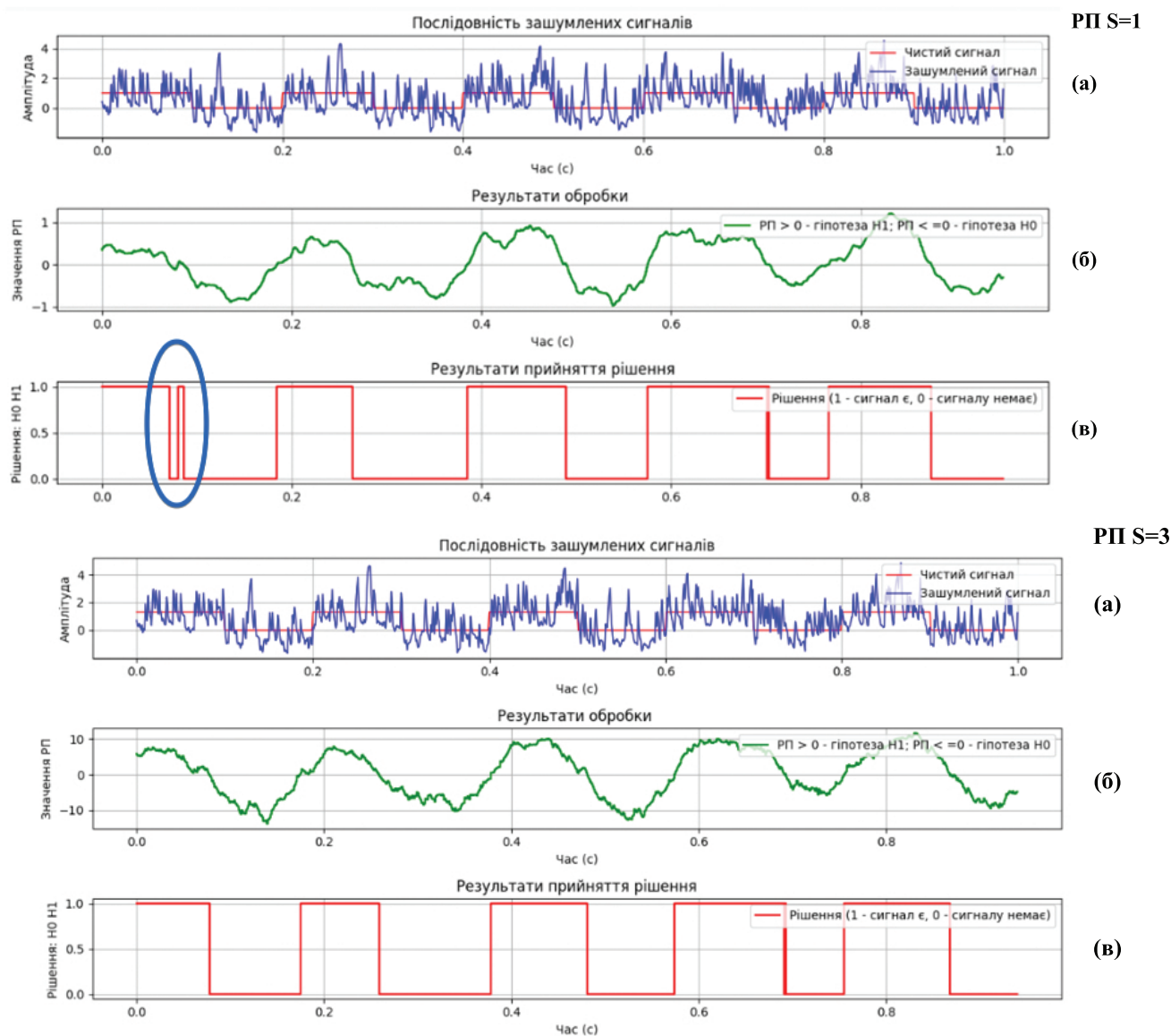


Рис. 3. Часове представлення послідовності зашумлених постійних сигналів (а), результат обробки лінійним ($S=1$) та нелінійним ($S=3$) РП (б), прийняття рішення про реалізацію гіпотези H_0 чи H_1 (в) при $\rho_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$, $\gamma_4 = 3$, $A = 0.5$, $q = 1$

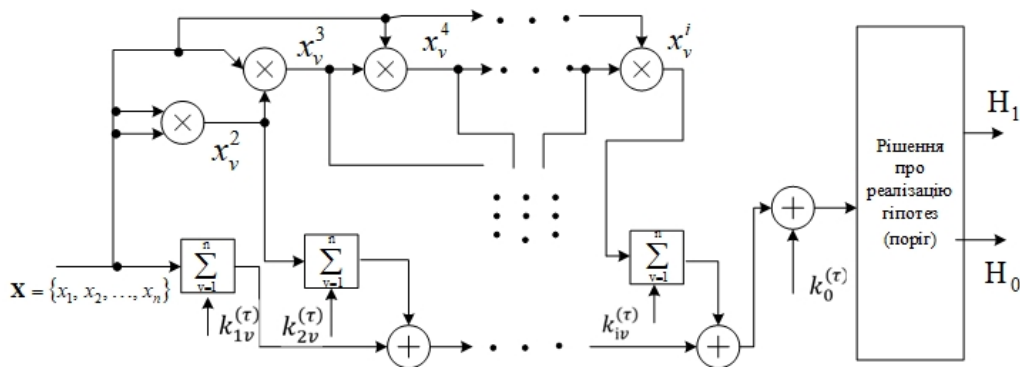


Рис. 4. Узагальнена структурна схема поліноміальних розв'язувальних правил виявлення сигналів на фоні завад

Запропонована структурна організація є універсальною та інваріантною відносно типу завад, а також від вибору конкретного моментного критерію якості. При зміні параметрів завадового середовища, зокрема коефіцієнтів асиметрії, ексцесу чи характеристик кореляції, схема та послідовність обчислювальних операцій залишаються незмінними. Змінюються лише значення визначених коефіцієнтів, що істотно спрощує адаптацію алгоритмів до конкретних умов функціонування системи.

У роботі розглянуто синтез поліноміального правила прийняття рішень до степеня $s=3$. Подальше підвищення порядку полінома, хоча й забезпечує можливість більш точного відображення статистичної структури сигналів та завад, водночас потребує компромісу між підвищенням ефективності обробки та зростанням складності практичної реалізації. Це зумовлено як ускладненням самого алгоритму, так і обмеженням діапазону допустимих значень параметрів негаусових випадкових величин.

Практична реалізація розглянутої структури не становить суттєвих труднощів та може бути виконана як програмними, так і апаратними засобами на сучасній елементній базі. Для забезпечення високої швидкодії та можливості реалізації нелінійних операцій доцільним є використання програмно-апаратних платформ, зокрема, FPGA (Field-Programmable Gate Arrays) та DSP-процесорів (Digital Signal Processors), які спеціалізуються на швидкому виконанні операцій піднесення до степеня, множення та додавання. Для підвищення швидкодії обчислення в окремих степеневих блоках можуть виконуватися паралельно, що істотно скорочує час обробки сигналів. Для забезпечення підвищення швидкості обробки даних значення коефіцієнтів доцільно розраховувати заздалегідь та зберігати у пам'яті для оперативного використання під час функціонування системи.

Висновки

Обробка сигналів на фоні завад є актуальною проблемою для багатьох прикладних систем. Традиційно основою для побудови оптимальних РП є відношення правдоподібності, яке порівнюється з порогом, обраним за відповідним критерієм якості. Однак, для корельованих негаусових процесів цей підхід ускладнюється через невизначеність щільності розподілу, складність оцінювання її параметрів та обмежену придатність класичних алгоритмів. У зв'язку з цим у роботі запропоновано альтернативу – використання моментно-кумулянтних моделей для опису корельованих негаусових випадкових величин, що дозволяє апроксимувати статистичні властивості випадкового процесу без повного знання його PDF.

В роботі розроблено нові математичні моделі для корельованих ексцесних негаусових процесів, які

стали основою для синтезу поліноміальних стохастичних РП, оптимізація яких здійснюється за модифікованим моментним критерієм якості, що оцінює верхні границі ймовірностей помилок. У межах дослідження побудовано як лінійні, так і нелінійні РП, проаналізовано їх властивості та ефективність за наявності корельованих негаусових завад. Встановлено, що лінійні РП, які враховують лише перші два моменти, збігаються з класичними правилами для гаусових моделей, але не враховують негаусовість розподілу. Натомість, використання нелінійних РП з урахуванням статистик вищих порядків, таких як коефіцієнт ексцесу, забезпечує підвищення ефективності виявлення сигналів, що проявляється у зменшенні ймовірностей помилок синтезованих поліноміальних РП. Запропоновані моделі та методи можуть бути корисними для інтелектуального аналізу даних і знайти своє широке застосування для різноманітних задач виявлення сигналів, де традиційні методи обробки не забезпечують належної ефективності через складну статистичну природу завад.

References

- [1] Peppas K., et al. (2018). High-Order Statistics for the Channel Capacity of EGC Receivers Over Generalized Fading Channels. *IEEE Commun. Lett.*, Vol. 22, Iss. 8, pp. 1740-1743. doi:10.1109/LCOMM.2018.2846229.
- [2] Guo G., Mandal M., Jing Y. (2019). A robust detection of known signal in non-Gaussian noise using threshold systems. *Signal Processing*, Vol. 92, Iss. 11, pp. 2676-2688. doi:10.1016/j.sigpro.2012.04.014.
- [3] Herzog, M. H., Francis, G., Clarke, A. (2019). Experimental Design and the Basics of Statistics: Signal Detection Theory (SDT). In: *Understanding Statistics and Experimental Design*. Springer, Cham., 139 p. doi:10.1007/978-3-030-03499-3_2.
- [4] Van Trees, H., Bell, K., Tiany, Z. (2013). *Detection Estimation and Modulation Theory*. Wiley; 2nd edition, New Jersey, 1145 p.
- [5] Kay, S. M. (2008). *Fundamentals of Statistical Signal Processing*. Prentice Hall PTR, NJ., 614 p.
- [6] Zhu, X., Wang, T., Bao, Y., Hu, F., Li, S. (2019). Signal Detection in Generalized Gaussian Distribution Noise With Nakagami Fading Channel. *IEEE Access*, Vol. 7, pp. 23120-23126. doi:10.1109/ACCESS.2019.2895627.
- [7] Kassam, S. (2011). *Signal Detection in Non-Gaussian Noise*. Springer Verlag, New York, 233 p.
- [8] Krasilnikov, A., Beregun, V. (2024). Cumulant Detector of Non-Gaussian Signals against Background of Non-Gaussian Interferences. *Radioelectronics and Communications Systems*, Vol. 67, pp. 317-330. doi:10.3103/S0735272724060037.
- [9] Beregun, V., Krasilnikov A. (2020). The Use of Cumulant Methods for Distinction of Diagnostic Signals with Gamma Distribution. *2020 IEEE 40th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO)*, pp.741-746. doi: 10.1109/ELNANO50318.2020.9088804.

- [10] T. V. Malenchyk, S. Ya. Zhuk (2024). Algorithm for Sequential Detection of Trajectory of Small Sized UAV by FMCW Radar According to Strongest Neighbor Criterion. *Visnyk NTUU KPI Seriya – Radioelekhnika Radioaparotobuduvannia*, Iss. 98, pp. 23–29. doi:10.20535/RADAP.2024.98.23-29.
- [11] Kunchenko Y. P. (2002). *Polynomial Parameter Estimation of Close to Gaussian Random Variables*. Aachen: Shaker, 396 p.
- [12] Kunchenko Y. P. (2006) *Stokhasticheskie polinomyi [Stochastic Polynomials]*. K.: Naukova Dumka, 275 p.
- [13] V. Palahin, J. Juhár, O. Zorin, D. Viediernikov and E. Palahina (2018). Computer Modeling of Noise Signals Processing System in Non-Gaussian Noise. *2018 IEEE 38th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO)*, pp. 658–662. doi:10.1109/ELNANO.2018.8477442.
- [14] L. Vokorokos, S. Marchevský, A. Ivchenko, E. Palahina, V. Palahin (2017). Parameters Estimation of Correlated non-Gaussian processes by the Method of Polynomial Maximization. *IET Signal Processing*, Vol. 11, Iss. 3, pp. 313–319. doi:10.1049/iet-spr.2016.0142.
- [15] V. Palahin, and O. Zorin (2024). Models and methods for RZ-signals distinction in non-Gaussian noise for information-measurement systems. *Journal of Electrical Engineering*, Vol. 75, No. 5, pp. 372–382, Slovak University of Technology. DOI: 10.2478/jee-2024-0045.
- [16] Peppas, K., Mathiopoulos, P., Yang, J., Zhang, C., Sasase, I. (2018). High-Order Statistics for the Channel Capacity of EGC Receivers Over Generalized Fading Channels. *IEEE Communications Letters*, Vol. 22, No. 8, pp. 1740–1743. doi:10.1109/LCOMM.2018.2846229.
- [17] M. Coulon, J.-Y. Tourneret, and A. Swami (2000). Detection of Multiplicative Noise in Stationary Random Processes Using Second- and Higher Order Statistics. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 48, No. 9, pp. 2566–2575. DOI: 10.1109/78.863059.
- [18] Denkovski, D., Atanasovski, V., Gavrilovska, L. (2012). HOS Based Goodness-of-Fit Testing Signal Detection. *IEEE Communications Letters*, Vol. 16, Iss. 3, pp.310–313. doi:10.1109/LCOMM.2012.010512.111830.
- [19] C. Chen, W. Xu, Y. Pan, H. Zhu and J. Wang (2022). A Nonparametric Approach to Signal Detection in Non-Gaussian Noise. *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 29, pp. 503–507. doi:10.1109/LSP.2022.3143031.
- [20] Dgani, B.; Cohen, I. (2024). Efficient Cumulant-Based Automatic Modulation Classification Using Machine Learning. *Sensors*, Vol. 24, Iss. 2, 701. doi:10.3390/s24020701.

Models and Methods for Signal Processing in Correlated Excess Processes

Palahin V. V., Palahina O. A., Vorobkalo T. V., Martynenko S. S., Zorin O. S.

The paper presents new mathematical models and signal processing methods developed in correlated excess non-Gaussian noise, which is commonly encountered in telecommunication systems, radar devices, technical control systems, and other applied domains. The foundation of the proposed approach is the moment-cumulant representation of random processes, which makes it possible to describe not only the basic statistical characteristics of the observed signals but also to account for the influence of non-Gaussian parameters, particularly the excess coefficient and the correlation between sample values. This approach becomes especially relevant when conventional and widely used Gaussian models fail to provide adequate accuracy in describing the processes under study, and when constructing a complete multidimensional probability density function (PDF) is computationally infeasible or practically impossible.

The paper proposes methods for the synthesis of polynomial stochastic decision rules (DRs), based on a modified moment-based quality criterion used to estimate the upper bounds of error probabilities in statistical signal detection problems. Both linear and nonlinear DRs have been developed for different polynomial orders, enabling the adaptation of the model to a variety of interference conditions. The study investigates the impact of excess coefficients and correlation parameters on detection efficiency. It is demonstrated that the use of higher-order statistics and nonlinear processing of sample values leads to a reduction in the probabilities of type I and type II errors for the decision rules. The proposed models and signal detection methods can be integrated into intelligent information processing systems and applied to the development of adaptive real-time detection algorithms.

Keywords: moment-cumulant models; signal detection; higher-order statistics; polynomial decision rules; modified moment criterion; correlated non-Gaussian processes