РАДІОТЕХНІЧНІ КОЛА ТА СИГНАЛИ

УДК 621.372.061

ОЦЕНКА ЧИСЛА ОПЕРАЦИЙ РАЗЛИЧНЫХ СТРАТЕГИЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ АНАЛОГОВЫХ ЦЕПЕЙ

Земляк А.М., к.т.н., доцент; Маркина Т.М., аспирантка
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина

Задача проектирования электронной системы была обобщена и формализована для получения множества различных стратегий проектирования [1]. При таком подходе можно поставить задачу выбора из этого множества одной стратегии, наилучшей в смысле быстродействия. С точки зрения процессорного времени оптимальная стратегия проектирования может быть определена как стратегия, которая достигает оптимальную точку целевой функции процесса проектирования за минимальное время. Один из главных вопросов в таком определении есть вопрос о том, какие именно условия необходимо выполнить для построения оптимального по времени алгоритма. Ответ на этот вопрос позволит существенно сократить затраты необходимого компьютерного времени для целей проектирования.

С математической точки зрения процесс проектирования цепи заключается в условной минимизации неотрицательной целевой функции $C(X)$ в пространстве R^N, где N есть общее число переменных электронной цепи и вектор X включает все переменные цепи. Вектор $X \in R^N$ разделим на две части: $X = (X', X'')$, где вектор $X' \in R^K$ является вектором независимых переменных, вектор $X'' \in R^M$ является вектором зависимых переменных и $N = K + M$. Подразумевается, что целевая функция $C(X)$ является критерием процесса проектирования, т.е. достижение минимума этой функции приводит к достижению всех целей проектирования. Дополнительные условия в процедуре минимизации функции $C(X)$ связаны с необходимостью выполнения законов Кирхгофа. Задачу проектирования аналоговой системы выбранной топологии на основе процесса условной оптимизации можно определить в виде двухшаговой процедуры следующего вида

$$X^{s+1} = X^s + t_s \cdot H^s, \tag{1}$$

где s – номер итерации оптимизационной процедуры, t_s – итерационный параметр, $t_s \in R^1$, функция H задает направление движения в пространстве переменных R^N, и вид её определяется тем или иным методом минимизации целевой функции $C(X)$.

Предполагаем далее, что система ограничений в виде равенств, т.е. математическая модель электронной цепи может быть описана системой нелинейных алгебраических уравнений

$$g_j(X)=0,\ j=1,2,\ldots,M, \tag{2}$$

для M зависимых компонент вектора X.

Описанный традиционный подход к проектированию включает анализ электронной цепи, т.е. решение нелинейной системы (2) на каждом шаге процедуры оптимизации (1). Следуя [2], назовем этот традиционный подход традиционной стратегией проектирования (ТСП).

Специфика процесса проектирования систем, по крайней мере электронных схем, состоит в том, что нет необходимости выполнять условия (2) для каждого шага процесса оптимизации и вполне достаточно удовлетворить условиям (2) в конечной точке процесса проектирования. На эвристическом уровне подобная идея для проектирования электронных цепей была выдвинута в работе [3] и реализована в системах проектирования [4, 5]. При таком подходе вектор-функция процедуры оптимизации H зависит не только от целевой функции $C(X)$, но также и дополнительной штрафной функции $\varphi(X)$, структура которой должна включать все уравнения системы (2). Формализация этой идеи прежде всего предполагает задание специальной формы штрафной функции, которая может быть определена например следующим образом:

$$\varphi(X^s)=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{M}g_j^2(X^s) \tag{3}$$

где параметр ε введен для дополнительной регулировки. Во многих случаях значение этого параметра можно выбрать равным 1.

В этом случае мы определяем процесс проектирования как задачу безусловной оптимизации (4)

$$X^{s+1}=X^s+t_s\cdot H^s \tag{4}$$

в пространстве R^N без какой либо дополнительной системы ограничений, но для новой целевой функции $F(X)$, которая должна включать информацию об электронной цепи в форме дополнительной штрафной функции (3) и может быть определена, например, аддитивным выражением (5)

$$F(X)=C(X)+\varphi(X) \tag{5}$$

При таком подходе, при достижении минимума целевой функции $F(X)$, обеспечивается достижение минимума целевой функции $C(X)$ и удовлетворяется система (2) в конечной точке процесса оптимизации. В то же время можно констатировать, что на протяжении всего процесса проектирования законы Кирхгофа для цепи не выполняются ни на одном шаге процедуры оптимизации, но естественно выполняются в конечной точке. Этот метод может быть назван модифицированным традиционным методом проектирования. Он воспроизводит иную стратегию проектирования, которую назовем модифицированной традиционной стратегией проектирования (МТСП), и иную траекторию в пространстве R^N. В этом случае, как мы видим, анализ электронной схемы, т. е. решение системы (2), полностью отсутствует, однако вся сложность задачи теперь переносится на процедуру оптимизации. Процесс оптимизации приходится осуществлять в пространстве R^N, а не R^K как в случае ТСП, и для функции $F(X)$ намного более сложной, чем исходная функция $C(X)$.

Идея применения дополнительной штрафной функции обобщается, если штрафную функцию формировать только из части системы (2), в то время как оставшуюся часть системы (2) интерпретировать как систему ограничений. В этом случае обобщенная штрафная функция включает, например, только *Z* первых членов

$$\psi\left(X^s\right)=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{Z}g_i^2\left(X^s\right), \tag{6}$$

где $Z\in[0, M]$, в то время как оставшиеся *M–Z* уравнений формируют модифицированную систему (7), полученную из системы (2)

$$g_j(X)=0, \qquad j=Z+1, Z+2, \dots, M. \tag{7}$$

Ясно, что каждое новое значение параметра *Z* производит новую стратегию проектирования и новую траекторию в пространстве параметров. Другими словами каждая стратегия проектирования определяется своей системой ограничений (7) и своей процедурой оптимизации, в которой целевая функция (5) включает штрафную функцию (6), включающую в свою очередь *Z* первых уравнений исходной системы (2).

Эта идея легко обобщается в случае, когда штрафная функция $\psi(X)$ включает *Z* произвольных уравнений системы (2). В этом случае полное количество различных стратегий проектирования равно 2^M. Все эти стратегии существуют в рамках той же самой процедуры оптимизации. Процедура оптимизации реализуется в пространстве R^{K+Z}, а число уравнений системы, подлежащей решению на каждом шаге процедуры оптимизации, равно *M–Z*. Все множество стратегий проектирования, появляющееся в рамках такого подхода, формирует обобщенную стратегию проектирования.

Число зависимых параметров *M* возрастает с ростом сложности системы, в данном случае электронной цепи, и может достигать значений сотен тысяч для БИС. Полное число различных стратегий в рамках обобщенной стратегии проектирования, достигающее величины 2^M, назовем структурным базисом проектирования. Все эти стратегии имеют одну и ту же начальную точку S в пространстве параметров, так как выбор начальной точки не зависит от стратегии, и одну и ту же конечную точку F, так как конечная точка и есть цель процесса проектирования. На рис. 1 условно показаны различные возможные траектории проектирования в пространстве параметров.

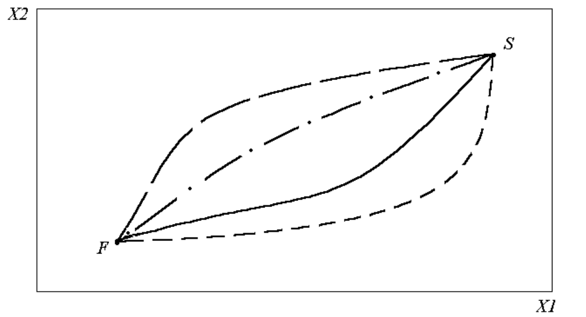

Рис. 1

Все эти стратегии имеют различное число операций, различное полное процессорное время и различные траектории в пространстве параметров. В этом случае возможно сформулировать задачу поиска оптимальной по времени стратегии проектирования, имеющей минимальные число операций и процессорное время. Процессорное время является производной от числа операций. Проведем оценку числа операций для различных стратегий проектирования.

Традиционная стратегия проектирования включает две системы уравнений. Предположим для конкретности, что процедура оптимизации основана на градиентном методе и может быть определена посредством системы обыкновенных дифференциальных уравнений для независимых переменных в следующем виде

$$\frac{dx_i}{dt} = -b \cdot \frac{\delta}{\delta x_i} C(X), \qquad i = 1,2,\ldots,K, \tag{8}$$

где b – итерационный параметр. Оператор $\frac{\delta}{\delta x_i}$ здесь и далее означает:

$$\frac{\delta}{\delta x_i}\sigma(X) = \frac{\partial \sigma(X)}{\partial x_i} + \sum_{p=K+1}^{K+M} \frac{\partial \sigma(X)}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial x_i}.$$

Использование градиентного метода не сужает, однако, общность полученных результатов. Для любого иного метода необходимо только представить процесс оптимизации как систему обыкновенных дифференциальных уравнений для независимых переменных.

Математическая модель электронной системы в таком случае представляет собой систему ограничений и описывается системой уравнений (2). Число операций для решения системы (2) методом Ньютона оценим как $S \cdot \left[M^3 + M^2(1+P) + MP\right]$, где P среднее число операций для расчета функции $g_j(X)$ и S число итераций в методе Ньютона для решения системы (2). Число операций для одного шага интегрирования системы (8) при решении системы (2) по методу Ньютона равно: $K + C\cdot(1+K) + (1+K)\cdot S \cdot \left[M^3 + M^2(1+P) + MP\right]$, где C число операций для расчета целевой функции. Полное число операций для решения задачи (2), (8) в этом случае равно

$$N_1 = L_1\left\{K+(1+K)\left\{C+S\cdot\left[M^3+M^2(1+P)+MP\right]\right\}\right\}, \tag{9}$$

где L_1 – полное число шагов в алгоритме оптимизации.

Модифицированная традиционная стратегия проектирования полностью определяется системой уравнений оптимизацион-ной процедуры без каких-либо дополнительных ограничений. То есть, в этом случае, система (2) отсутствует и число независимых переменных равно $K+M$. Основная система имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = -b\cdot\frac{\delta}{\delta x_i}F(X),\ i=1,2,\dots,K+M, \tag{10}$$

где $F(X)$ – обобщенная целевая функция:

$$F(X)=C(X)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{M}g_j^2(X).$$

Полное число операций для решения задачи (10) равно:

$$N_2 = L_2\left\{K+M+(1+K+M)\cdot\left[C+(P+1)M\right]\right\}. \tag{11}$$

Обобщенная стратегия проектирования имеет переменное число независимых параметров, которое равно $K+Z$. При этом используются следующие две системы уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = -b\cdot\frac{\delta}{\delta x_i}F(X),\ i=1,2,\dots,K+Z, \tag{12}$$

$$g_j(X)=0,\ i=Z+1,Z+2,\dots,M, \tag{13}$$

где $F(X)=C(X)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{Z}g_j^2(X)$.

В этом случае полное число операций N_3 для решения систем (12), (13) может быть оценено как

$$N_3 = L_3\{K+Z+(1+K+Z)\{C+(P+1)Z+S\cdot[(M-Z)^3+ \\ +(M-Z)^2(1+P)+(M-Z)P]\}\} \tag{14}$$

Эта формула трансформируется в формулу (9) в случае $Z=0$ и в формулу (11) в случае $Z=M$. Анализ числа операций N_3 как функции параметра Z, позволяет найти условия для определения стратегии, имеющей минимальное машинное время. В случае, когда система (2) линейна, число итераций S в методе Ньютона равно единице, и традиционный подход является оптимальным, однако для нелинейной системы это не так. Далее, для конкретности, предполагается также, что число итераций в алгоритме оптимизации L_3 и число операций C для расчета целевой функции зависят от числа независимых параметров по следующему закону: $L_3 = L_0\cdot(K+Z)^n$;

$C = C_0 \cdot (K+Z)^m$. Это предположение можно считать тривиальным, но основная трудность заключается в неопределенных степенях n и m. С другой стороны, число итераций S в методе Ньютона не зависит, в первом приближении, от порядка системы (13) и является константой S_0. Практическое значение этой константы, учитывая квадратичность метода Ньютона, равно 4–5 для достижения точности $\delta = 10^{-10} - 10^{-12}$. Среднее значение числа операций P для расчета функции $g_j(X)$ не зависит от Z в случае анализа электронной системы. Это верно, т. к. матрица проводимостей электронной схемы разреженная. Предполагаем, что это значение постоянно и равно P_0. В этом случае формула (14) для расчета функции $N_3(Z)$ преобразуется в следующую:

$$
\begin{aligned}
N_3(Z) = L_0 \cdot (K+Z)^n \cdot \{K + Z + (1+K+Z)[C_0 \cdot (K+Z)^m + Z(1+P_0)] + \\
+ S_0 \cdot ((M-Z)^3 + (M-Z)^2 (1+P_0) + (M-Z) P_0)]\}
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

В соответствии с основным определением оптимальной стратегии проектирования мы можем найти эту стратегию посредством анализа формулы (15). Мы должны найти оптимальную точку Z_{opt}, в которой функция $N_3(Z)$ принимает минимальное значение. В случае $Z_{opt} = 0$ – традиционная стратегия является оптимальной. В случае $Z_{opt} = M$ – модифицированная традиционная стратегия является оптимальной. Если точка Z_{opt} принадлежит открытому интервалу (0, M), это означает, что промежуточная стратегия является оптимальной. В этом случае реализуется одна из зависимостей, представленных на Рис. 2, имеющая один или два минимума внутри интервала (0, M) или более сложная зависимость с большим числом минимумов внутри этого интервала.

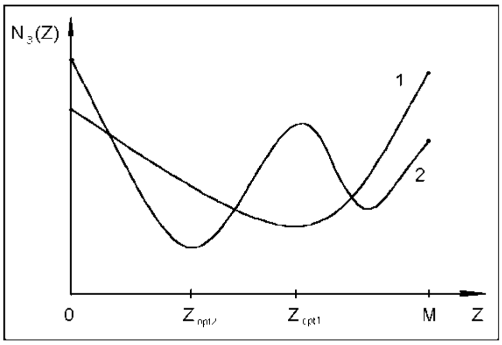

Рис. 2

Производная функции $N_3(Z)$ определяется следующей формулой:

$$
\begin{aligned}
N_3'(Z) = L_0 n (K+Z)^{n-1} \{K + Z + (1+K+Z)[C_0 (K+M)^m + + Z(1+P_0) + S_0((M-Z)^3 \\
+ (M-Z)^2 (1+P_0) + (M-Z)P_0)]\} + + L_0 (K+Z)^n \{1 + C_0 (K+M)^m \\
+ (1+K+2Z)(1+P_0) + S_0[(M-Z)^3 + (M-Z)^2 (1+P_0) \\
+ (M-Z)P_0 - (1+K+Z)(3(M-Z)^2 + 2(M-Z)(1+P_0) + P_0)]\}
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

Для того чтобы оптимальная точка лежала внутри интервала [0, M], а не на его границе, необходимо и достаточно обеспечить следующие два условия для производной на границах интервала: $N_3'(0) < 0$ и $N_3'(M) > 0$.

Удобно ввести дополнительный параметр $q=\dfrac{M}{K}$. В этом случае значение производной $N_3'(0)$, при условиях *m=1* и $M,K\to\infty$, задается следующей формулой: $N_3'(0)=L_0K^{n+1}M^2S_0\left[(1+n)q-3\right]$. Необходимо обеспечить специальное условие для параметра *n* для выполнения неравенства $N_3'(0)<0$. Это условие задается формулой $n<\dfrac{3}{q}-1$. Параметр q для большинства систем меньше или равен 1. В этом случае для параметра *n* условие задается в виде: $n<2+\varepsilon$. С другой стороны, производная $N_3'(Z)$ в точке *Z*=*M*, при условии $M,K\to\infty$, имеет следующий вид

$$N_3'(M)=L_0(K+M)^{n+1}\left[C_0(1+n)+\frac{(1+K+2M+nM)(1+P_0)}{K+M}-S_0P_0\right].\qquad(17)$$

Предположим, что порядок *n* равен *2*. В этом случае для того, чтобы обеспечить неравенство $N_3'(M)>0$, необходимо выполнить условие $3C_0+\dfrac{1+4q}{1+q}\left(1+P_0\right)-S_0P_0\ >\ 0$. Эта формула преобразуется в случае $q\to1$ и $C_0\approx P_0$, в следующее условие: $P_0\left(5.5-S_0\right)+2.5\ >\ 0$. В случае если *n*=1, выводится другое условие: $P_0\left(4-S_0\right)+2\ >\ 0$. Существует возможность обеспечить условие $N_3'(M)>0$, если число итераций S_0 равно 4 или 5. Следовательно, в этом случае, оптимальная точка Z_{opt} лежит внутри интервала [0, *M*], а не на границе. Это означает, что оптимальная по времени стратегия не совпадает ни с ТСП, ни с МТСП.

Выводы

Оценка числа операций для различных стратегий проектирования структурного базиса позволяет сделать вывод, что при определенных условиях оптимальной стратегией, в смысле минимума числа операций, может явиться стратегия отличная как от традиционной стратегии проектирования, так и от модифицированной традиционной стратегии проектирования.

Литература

1. Земляк А.М. Проектирования аналоговых цепей методами теории управления. I. Теория /А.М. Земляк // Изв. ВУЗов: Радиоэлектроника.— 2004.—Т.47, №5.— С.18—28.

2. Земляк А.М. Проектирования аналоговой системы как управляемый динамический процесс / А.М. Земляк // Нелинейный мир. — 2006. — № 11. — С. 609—618.

3. Каширский И.С. Обобщенная оптимизация электронных схем / И.С. Каширский, Я.К. Трохименко. — Киев: Техника. — 1979.— 192 с.

4. Rizzoli V. Numerical optimization of broadband nonlinear microwave circuits / V. Rizzoli, A. Costanzo, C. Cecchetti // IEEE MTT-S Int. Symp. — 1990. — Vol. 1.— P. 335—338.

5.Ochotta E.S. Synthesis of High-Performance Analog Circuits in ASTRX/OBLX / E.S. Ochotta, R.A. Rutenbar, L.R. Carley // IEEE Trans. on CAD. — 1996. — Vol.15, № 3. — P. 273–294.

Земляк О.М., Маркіна Т.М. ***Оцінка числа операцій різних стратегій оптимізації при проектуванні аналогових кіл.*** *Формалізація процесу проектування електронних кіл при невиконанні законів Кірхгофа приводить до узагальнення процесу проектування і появи множини різних стратегій проектування, що відрізняються числом рівнянь, які вирішуються на кожному кроці процедури оптимізації. Загальноприйнятий підхід до проектування, або що те ж саме традиційна стратегія проектування, є одній з можливих стратегій даної множини. Аналіз числа операцій для різних стратегій проектування структурного базису дозволяє зробити висновок, що за певних умов оптимальною стратегією, в сенсі мінімуму числа операцій, може з'явитися стратегія, яка є відмінною як від традиційної стратегії проектування, так і від модифікованої традиційної стратегії проектування.*

Ключові слова: *оптимізація аналогових кіл, число операцій, узагальнена стратегія оптимізації, оптимальна стратегія.*

Земляк А.М., Маркина Т.М. ***Оценка числа операций различных стратегий оптимизации при проектировании аналоговых цепей.*** *Формализация процесса проектирования электронных цепей при невыполнении законов Кирхгофа приводит к обобщению процесса проектирования и появлению множества различных стратегий проектирования, отличающихся числом уравнений, решаемых на каждом шаге процедуры оптимизации. Общепринятый подход к проектированию, или что то же самое, традиционная стратегия проектирования, является одной из возможных стратегий данного множества. Анализ числа операций для различных стратегий проектирования структурного базиса позволяет сделать вывод, что при определенных условиях оптимальной стратегией, в смысле минимума числа операций, может явиться стратегия, отличная как от традиционной стратегии проектирования, так и от модифицированной традиционной стратегии проектирования.*

Ключевые слова: *оптимизация аналоговых цепей, число операций, обобщенная стра-тегия оптимизации, оптимальная стратегия.*

Zemliak A., Markina T. ***Estimating the number of operations for various optimization strategies in analog circuit designing.*** *Formalization of the electronic circuits designing process ignoring Kirkhhof's laws leads to designing process generalization and emergence of various designing strategies. These strategies differ in the number of equations, solving on each step of optimization procedure. The standard designing approach or that the same traditional designing strategy is one of possible strategy of this set. The number of operations analysis for structural basis various designing strategies enables us to conclude that under certain conditions an optimum strategy, in sense of a minimum number of operations, is a strategy differed both from traditional designing strategy and the modified traditional designing strategy.*

Keywords: *analog circuit optimization, number of the operations, the generalized optimization strategy, optimum strategy.*