

УДК 621.372.061

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ОБЛАСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
RTF ПРИ НЕМИНИМАЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Ильасова Ю.Х., Шарпан О.Б.

Представлен анализ разностных методов решения дифференциальных уравнений линейных систем в области преобразований RTF при использовании не минимальных формул вычисления производных.

Вступление. Постановка задачи

Известно [1], что при реализации разностных методов анализа линейных систем в области спектров трансформант ортогональных преобразований система дифференциальных уравнений

$$a_m \frac{d^m}{dt^m} y + a_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} y + \dots + a_1 y + a_0 = b_n \frac{d^n}{dt^n} x + b_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x + \dots + b_1 x + b_0$$

приводится к виду:

$$\left[a_m \left(\overline{A} \right)^m + a_{m-1} \left(\overline{A} \right)^{m-1} + \dots + a_1 \overline{A} + a_0 \overline{E} \right] \overline{Y}_\xi = \left[b_n \left(\overline{A} \right)^n + b_{n-1} \left(\overline{A} \right)^{n-1} + \dots + b_1 \overline{A} + b_0 \overline{E} \right] \overline{X}_\xi, \quad (1)$$

где N – формат преобразования; $\overline{A} = P_\gamma D_H$ – квадратная матрица порядка N ; \overline{P}_γ – нормированный матричный оператор используемого прямого дискретного ортогонального преобразования порядка N ; \overline{D}_H^{-T} – квадратная матрица производных от обратного дискретного нормированного преобразования $\left[\left(\overline{P}_\gamma \right)^{-1} = \left(\overline{P}_\gamma \right)^T \right]$; $\overline{Y}_\xi, \overline{X}_\xi$ – столбцы размера $N \times 1$ амплитуд трансформант преобразования соответственно реакции и воздействия; T – знак транспонирования. Обобщённая форма записи уравнения (1) имеет вид: $\overline{A}_\Sigma \overline{Y}_\xi = \overline{B}_\Sigma \overline{X}_\xi$, откуда решение задачи анализа (с дальнейшим обратным преобразованием спектра) сводится к обращению матрицы \overline{A}_Σ , т.е.

$$\overline{Y}_\xi = \left(\overline{A}_\Sigma \right)^{-1} \overline{B}_\Sigma \overline{X}_\xi. \quad (2)$$

Обращение матрицы \overline{A}_Σ наталкивается на значительные вычислительные трудности. Упрощение вычислений (2) связано с разложением матрицы \overline{A} по собственным значениям λ_i и собственным векторам π_i (при чём для каждого преобразования \overline{P}_γ матрицы \overline{A} будут различны)

$$\overline{A} = \overline{\Pi} \overline{\lambda} \overline{\Pi}^{-1}, \quad (3)$$

где $\overline{\lambda}$ – диагональная матрица собственных значений; $\overline{\Pi}^{-T}$ – матрица собственных векторов, строки которой – собственные вектора матрицы \overline{A} ; $\overline{\Pi}$ – мат-

рица собственных векторов $\overline{\pi_i^*}$; * - знак комплексного сопряжения. Собственные вектора $\overline{\pi_i}$, $\overline{\pi_i^*}$ для различных преобразований различны, в то время, как собственные значения матрицы $\overline{\lambda}$ для всех преобразований совпадают (если первая производная вычисляется как разделённая разность). Различия в матрице $\overline{\lambda}$ может быть только в упорядочении собственных значений (поблочная для блочно-диагональных матриц \overline{A} или “сквозная”). При этом вычисление собственных значений λ_i не представляет трудности, поскольку все они расположены на единичной окружности в комплексной плоскости $p = \sigma + j\omega$ с центром в точке (1,0). Тогда при формате $N=2$ собственные значения $\lambda_0 = 0, \lambda_\infty = 2$. При $N=4$ к ним добавляются значения, полученные путём деления полуокружностей секущей, которая перпендикулярна действительной оси в точке (1,0), на две части $\lambda_1 = 1 + j, \lambda_1^* = 1 - j$. При формате $N=8$ к уже найденным собственным значениям добавляются $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_2^*, \lambda_3^*$, расположенные посередине четырёх дуг, образованных точками $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_\infty, \lambda_1^*$. Каждое увеличение вдвое формата N добавляет в матрице $\overline{\lambda}$ последующие собственные значения, лежащие посередине дуг между парой уже найденных ранее собственных значений.

Анализ уравнения (1), с учётом (3), приводит уравнение (2) к виду

$$\overline{Y_\xi} = \overline{\Pi} \overline{K(\lambda)} \overline{\Pi} \overline{X_\xi}, \quad (4)$$

где $\overline{K(\lambda)}$ - связывающих спектры реакции $\overline{Y_\xi}$ и воздействия $\overline{X_\xi}$, диагональная матрица дискретных функций цепи, i -й элемент которой имеет вид

$$K(\lambda_i) = \frac{a_m (\lambda_i)^m + a_{m-1} (\lambda_i)^{m-1} + \dots + a_1 \lambda_i + a_0}{b_n (\lambda_i)^n + b_{n-1} (\lambda_i)^{n-1} + \dots + b_1 \lambda_i + b_0},$$

где $K(\lambda_i)$ можно получить заменой в операторном выражении $K(p)$ переменной p на λ_i .

Теоретические выкладки

Часто анализ степени подобия и различия сигналов удобно проводить в области спектров ортогональных преобразований с действительным ядром (Адамара, Хаара, косинусного, REX и т.д.), в то время как анализ линейных систем (как и кусочно-линейный анализ систем нелинейных) удобно производить в области трансформант преобразований Фурье. Это усложняет задачу, поскольку при этом необходимо оперировать различными понятиями и представлениями (характерными для двух различных базисов), связь между которыми не является простой.

При использовании алгоритма (4) анализ сигналов производится в базисе ортогонального преобразования, спектр которого $\overline{X_\xi}$ считается входным сигналом. Этот сигнал преобразуется дискретным ортогональным

преобразованием $\left(\overline{P}_\gamma\right)^T$ в область кратных спектров, для которых решение дифференциальных уравнений не представляет сложности, поскольку существует (отличная по форме, но аналогичная базису Фурье по структуре) теорема о свёртке, теоремы дифференцирования и интегрирования оригиналов и т.д. Приведенные результаты справедливы для дискретных преобразований в случае замены операции дифференцирования разделённой на величину шага разностью двух отсчётов сигнала $\frac{d}{dt}x \rightarrow x(k) - x(k-1)$.

Однако, существует множество других (не минимальных) формул вычисления производных в разностных методах, получаемых, например, в случае учёта трёх и более отсчётов сигнала (3). Такие не минимальные формулы, в частности при учёте трёх точек отсчётов сигнала, имеют вид:

$$\frac{d}{dt}x \rightarrow \frac{3x(k) - 4x(k-1) + x(k-2)}{2}; \quad (5a)$$

$$\frac{d}{dt}x \rightarrow \frac{x(k+1) - x(k-1)}{2}; \quad (5б)$$

$$\frac{d}{dt}x \rightarrow \frac{-x(k+2) + 4x(k+1) - 3x(k)}{2} \quad (5в)$$

для эквидистантной дискретизации сигнала $x(t)$ с нормированным шагом $\Delta t = 1$, где k – номер отсчёта в натуральных координатах. В этом случае

матрицы \overline{D}_H и \overline{A} в (1) и (3) имеют другие значения для того же ортогонального преобразования \overline{P}_γ , и собственные значения $\overline{\lambda}$ в матрице \overline{A} располагаются не на окружности, а на кардиоиде (рис.1) для формулы (5а), которая описывается следующими параметрическими уравнениями:

$\omega(\psi) = \sin(\psi)(2 + \cos(\psi)); \sigma(\psi) = \cos(\psi)(2 + \cos(\psi)) + 1$. Обозначив $\Lambda(\psi_i) = \sigma(\psi_i) + j\omega(\psi_i)$, получаем общий способ вычисления i -го собственного числа λ_i матрицы \overline{A} . При формате $N=2$ $\lambda_0 = \Lambda(\pi) = 0, \lambda_1 = \Lambda(0) = 4$, т.е. значения аргументов ψ_0 и ψ_1 получены путём деления окружности на две части. При $N=4$, к найденным добавляются собственные значения, аргументы ψ_{21} и ψ_{22} которых получены делением образовавшихся полуокружностей пополам: $\lambda_2 = \Lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2j, \lambda_2^* = \Lambda\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2j$. При $N=8$, к ним добавляются значения, аргументы, для нахождения которых получены делением пополам четырёх дуг, образованных значениями аргументов $\psi_1, \psi_{21}, \psi_0, \psi_{22}$

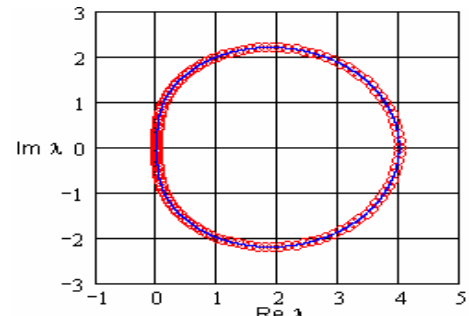


Рис.1

$$\lambda_3 = \Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.914 + 1.914j, \quad \lambda_3^* = \Lambda\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2.914 - 1.914j, \quad \lambda_4 = \Lambda\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0.086 + 0.914j,$$

$$\lambda_4^* = \Lambda\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 0.086 - 0.914j.$$

Последующее увеличение формата N вдвое приводит к появлению собственных значений в матрице $\bar{\lambda}$, аргументы ψ_i для нахождения которых, лежат посередине дуг, образованных парами найденных ранее. При этом произведение $\prod P_\gamma$ собственных векторов матрицы \bar{A} и дискретного оператора прямого ортогонального преобразования даст базовые функции преобразования $e^{\pm jw_1 n}$, упорядочение которых зависит от вида преобразования \bar{P}_γ . При вычислении производной функции $x(k)$ по четырём отсчётам получим

$$\frac{d}{dt}x \rightarrow \frac{2x(k+3) - 9x(k+2) + 18x(k+1) - 11x(k)}{6}, \quad (6a)$$

$$\frac{d}{dt}x \rightarrow \frac{-x(k+2) + 6x(k+1) - 3x(k) - 2x(k-1)}{6}, \quad (6б)$$

$$\frac{d}{dt}x \rightarrow \frac{2x(k+1) + 3x(k) - 6x(k-1) + x(k-2)}{6}, \quad (6в)$$

$$\frac{d}{dt}x \rightarrow \frac{11x(k) - 18x(k-1) + 9x(k-2) - 2x(k-3)}{6}, \quad (6г)$$

для которых собственные значения их матриц \bar{A} располагаются на кардиоидах рис.2. На рис.2 показаны собственные значения преобразования, для которого $\frac{d}{dt}x \rightarrow x(k) - x(k-1)$ - окружность 1, вычисленная по формуле (5a) - кардиоида 2, а также для производных по формулам (6в) и (6г) - кардиоиды 3 и 4, соответственно.

Для рассмотренных способов вычисления производных произведение матрицы собственных векторов $\bar{\Pi}$ на соответствующий матричный оператор дискретного ортогонального преобразования даёт оператор с дискретными отсчётами функций $e^{\pm jw_1 n}$, где $w_1 = \frac{2\pi}{N}$, как и для дискретного преобразования Фурье.

Численные примеры

Для иллюстрации возможностей предложенного метода, который можно назвать методом обобщённых *RTF*-функций (отличающийся от преобразования Фурье, анализом на комплексных λ_i , а не на частотах jnw_1), рас-

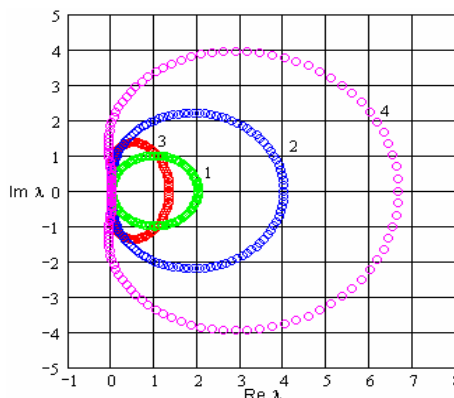
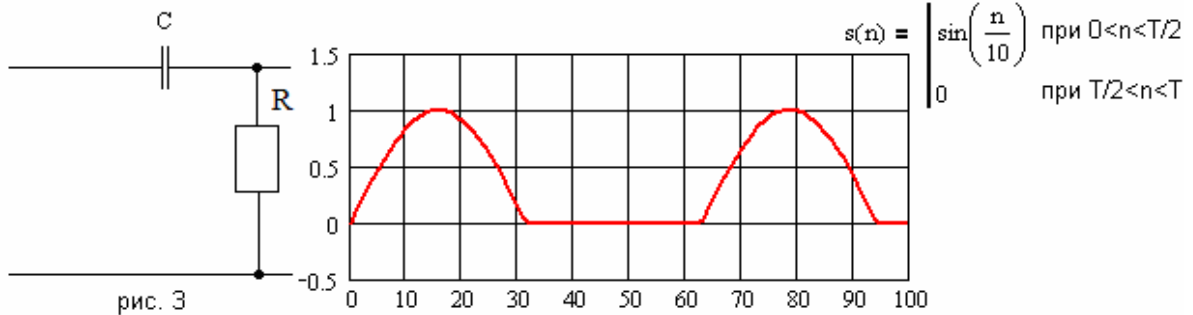


Рис. 2.

смотрим пример. Пусть на вход цепи (рис.3) поступает ограниченное снизу гармоническое колебание (рис.4).



Коэффициент передачи цепи при нормированных значениях параметров ($R=1, C=1$): $K(p) = \frac{p}{1+p}$. Заменяя p на λ_n , получим $K(\lambda_n) = \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}$.

На рис.5а, 6а приведены реакции, а на рис.5б, 6б - погрешности формул вычисления производных (кривая 1 для разделённой разности двух отсчётов входного сигнала; 2, 3 для формул 5а, 5в; 4, 5 для формул 6а, 6б).

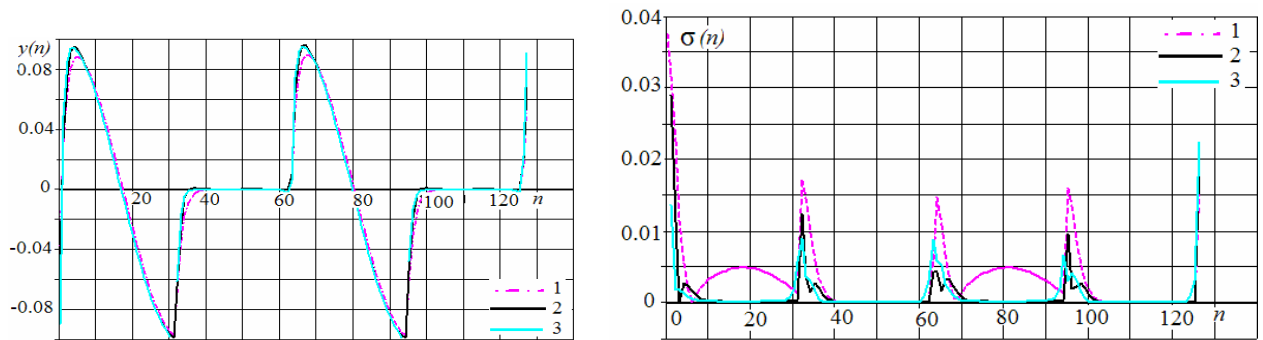


Рис.5а

Рис.5б

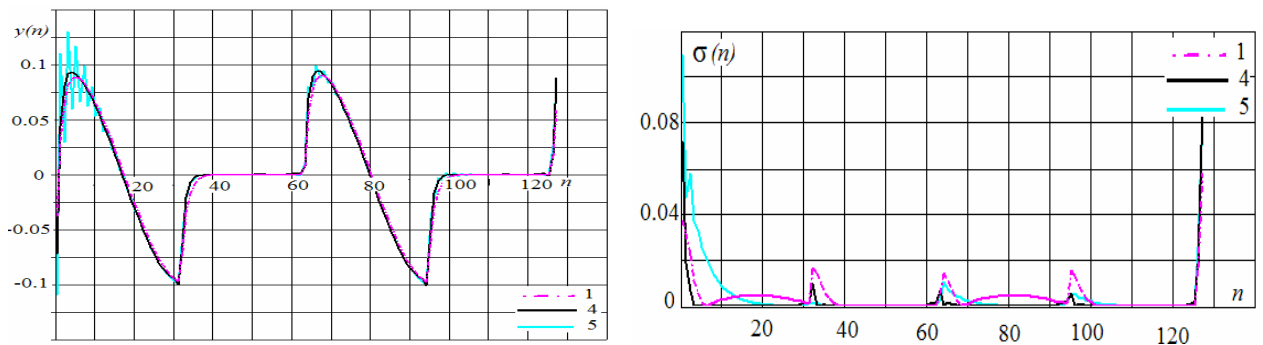


Рис.6а

Рис. 6б

Ожидаемое уменьшение погрешности вычислений с ростом числа точек, по которым производится вычисление производных, видно из рис. 7.

Повышение точности вычислений производных и точности анализа не приводит к какому-либо усложнению вычислений, поскольку все собственные значения λ_n (как и функции $e^{\pm j\omega n}$) формируются при формировании операторов дискретного преобразования *RTF* заранее.

При сравнении результатов,

полученных методом обобщённых

RTF-функций и методом дискретных преобразований отметим, что для некоторых входных сигналов первый из названных методов может дать более точное воспроизведение реакции. Так на рис. 8а приведена реакция, различных методов расчётов (кривая 3 и 4 – для результатов, полученных на основе формул 5в и 6а соответственно; кривая 6 – для дискретного преобразования Фурье). а на рис. 8б - погрешность для

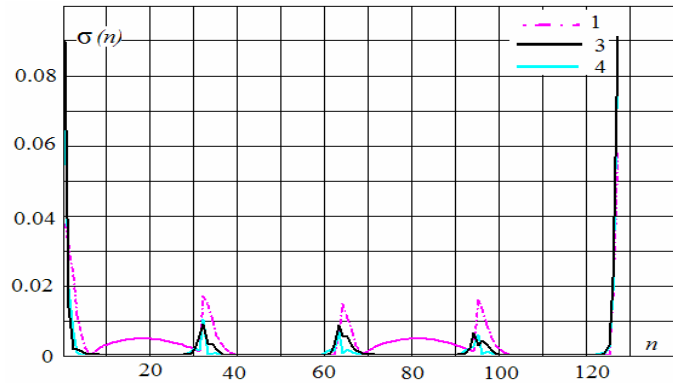


Рис.7

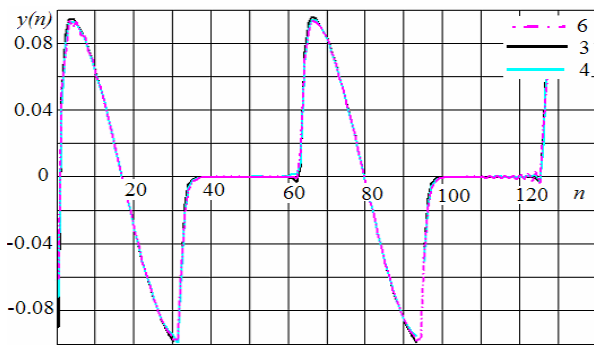


Рис. 8а

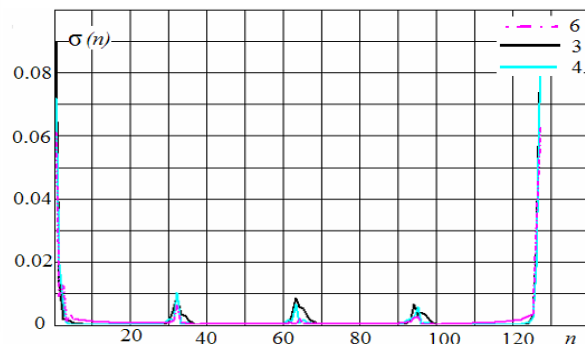


Рис. 8б

Выводы

Приведенные результаты показывают, что при данном входном сигнале метод дискретного преобразования Фурье даёт более точные результаты вычислений. Но, при другом входном сигнале (прямоугольный импульс) видно, что более точный результат получаем, используя метод обобщённых *RTF*-функций. На рис. 9а показана реакция, а на рис. 9б – погрешности вычислений для случая, когда на вход цепи поступает прямоугольный импульс (номера кривых как и на предыдущих рисунках):

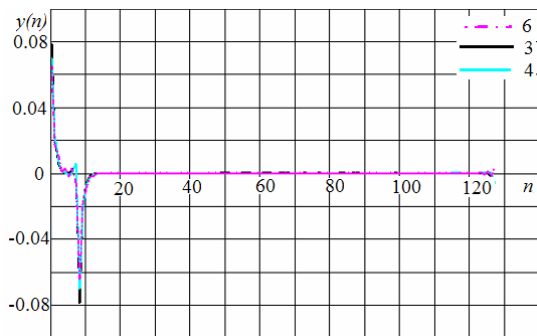


Рис.9а

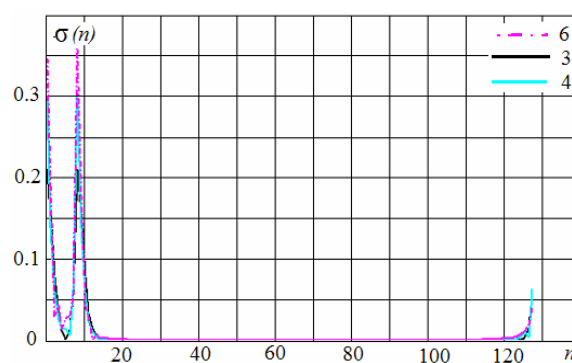


Рис.9б

Литература

- 1.Рыбин А.И. Анализ линейных цепей в базисе преобразований Уолша // Радиоэлектроника. – 2004. - №5. – с.36-41.
- 2.Рибін О.І., Ткачук А.П. Аналіз лінійних систем в області трансформант перетворення Уолша-Адамара // Вісник НТУУ “КПІ”. Вип.. 31. – 2006. – с.14-23.
- 3.Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы // Наука. – 1973.

<p>Ильясова Ю.Х., Шарпан О.Б. Аналіз лінійних систем в області перетворень при не мінімальних різницевих рівняннях. Наведено аналіз різницевих методів розв'язку диференціальних рівнянь лінійних систем в області перетворень RTF при використанні не мінімальних формул обчислення похідних.</p>	<p>Pijasova Yu.Kh., Sharpan O.B. The analysis of linear systems in the field of transformations at the minimal different equations. The analysis of different methods of the different equations decision of linear systems is submitted in the field of transformations RTF at use of the not minimal formulas of calculation derivative.</p>
---	---