РАДІОТЕХНІЧНІ КОЛА ТА СИГНАЛИ

УДК 621.372.061

АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ В ОБЛАСТІ ТРАНСФОРМАНТ ПЕРЕТВОРЕННЯ УОЛША-АДАМАРА

Рибін О.І., Ткачук А.П.

Запропоновано алгоритм розв'язання диференційних рівнянь рівноваги лінійних систем в базисі спектрів перетворення Уолша-Адамара. Означена область ефективного використання запропонованого методу, у порівнянні з іншими, які стали традиційними.

Вступ. Постановка задачі

Останнім часом при розв'язанні задач оброблення, архівації, передачі інформації, розпізнавання (класифікації) образів все більш широке застосування одержують нетрадиційні (відмінні від перетворення Фур'є та споріднених з ним) ортогональні перетворення, зокрема дискретні перетворення Уолша, косинусноїдальне, похиле, REX і т. ін. [1–5]. Так, при аналізі ступеня відхилень досліджуваного сигналу-реакції системи від тестового (який відповідає нормі) часто більш, у порівнянні до Фур'є перетворення, виразні відмінності можна спостерігати (наприклад при аналізі пульсограм) на спектрі трансформант таких перетворень, як перетворення Уолша, REX, CoREX [6].

Водночас усі логічні висновки про досліджувані сигнали та системи базуються на "фізичних" представленнях, основаних на поняттях і термінології перетворення Фур'є. Це зумовлено тим, що перетворення Фур'є базується на функціях, "натуральних" для навколишнього світу (реакція лінійної системи на гармонічну дію – це гармонічна функція тієї самої частоти, але іншої амплітуди та початкової фази).

Метою даної роботи є розроблення алгоритмів розв'язання диференційних рівнянь в базисі функцій Уолша-Адамара в області трансформант, що забезпечує єдність математичного апарату оброблення сигналів, діагностики, архівації та аналізу їх проходження через лінійні системи.

Опис запропонованого алгоритму аналізу лінійної системи

Як відомо, розв'язання лінійних рівнянь в базисі перетворення Уолша в області натуральних координат призводить до використання різницевих методів [7, 8] аналізу.

В області трансформант при використанні функцій Уолша при їх впорядкуванні за Адамаром диференційне рівняння

$$a_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m} + a_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + ... + a_1 \cdot \frac{du}{dt} + a_0 \cdot u = \\ = b_n \cdot \frac{d^n i}{dt^n} + b_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + ... + b_1 \cdot \frac{di}{dt} + b_0 \cdot i \tag{1}$$

перетворюється до матричного рівняння [7,8]

$$\left(a_m \cdot \overline{\overline{A}}^m + a_{m-1} \cdot \overline{\overline{A}}^{m-1} + ... + a_1 \cdot \overline{\overline{A}} \cdot x + a_0 \cdot \overline{\overline{E}} \right) \cdot \overline{U}_\xi = \\ = \left(b_n \cdot \overline{\overline{A}}^n + b_{n-1} \cdot \overline{\overline{A}}^{n-1} + ... + b_1 \cdot \overline{\overline{A}} \cdot x + b_0 \cdot \overline{\overline{E}} \right) \cdot \overline{I}_\xi , \tag{2}$$

де $\overline{\overline{A}}^m = \left[\overline{\overline{W}} \cdot \overline{\overline{D}}_H^T \right]^m$; $\overline{\overline{E}}$ – одинична матриця; $\overline{\overline{W}}$ – матриця (дискретний оператор) перетворення Уолша-Адамара; $\overline{\overline{D}}_H$ – нормована (поділена на N) матриця похідних від оператора $\overline{\overline{W}}$; T – знак транспонування; N – порядок квадратних матриць $\overline{\overline{A}}^k$ та $\overline{\overline{E}}$; $\overline{U}$, $\overline{I}$ – стовпці амплітуд трансформант відповідно реакції та дії розміру $N \times 1$.

Відомо також [7, 9], що матриці $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ мають блочно-діагональний вигляд і складаються з блоків діагоналі 1, 2, 4,… 2^{n-1} порядків, якщо $N = 2^n$. Зрозуміло, що такий самий вигляд мають і всі *k*–ті степені (*k* = 1, 2,…, *m*) $\overline{\overline{A}}^k$ матричних операторів (2), одержувані поблочним зведенням у відповідну степінь кожного блока діагоналі окремо.

Матричне рівняння (2) можна записати у скороченому вигляді

$$\overline{\overline{A}}_\Sigma \cdot \overline{U}_\xi = \overline{\overline{B}}_\Sigma \cdot \overline{I}_\xi , \tag{3}$$

звідки розв’язок диференційного рівняння (1) в області трансформант має вигляд

$$\overline{U}_\xi = \overline{\overline{A}}_\Sigma^{-1} \cdot \overline{\overline{B}}_\Sigma \cdot \overline{I}_\xi , \tag{4а}$$

а розв’язок зворотної задачі (пошук дії, відповідної до одержаної реакції досліджуваної системи)

$$\overline{I}_\xi = \overline{\overline{B}}_\Sigma^{-1} \cdot \overline{\overline{A}}_\Sigma \cdot \overline{U}_\xi . \tag{4б}$$

Оскільки задача формування кожного з матричних операторів $\overline{\overline{A}}$ порядку *N*=2*ⁿ* не викликає труднощів [7, 9] і може бути розв’язана заздалегідь, основну задачу становить обернення матриць $\overline{\overline{A}}_{\Sigma}$, $\overline{\overline{B}}_{\Sigma}$ (для кожного блоку діагоналі).

Для обернення матриці $\overline{\overline{A}}_{\Sigma}$ представимо кожний i-й блок діагоналі відповідним ортогональним матричним розкладом на власні вектори [10]

$$\overline{\overline{A}}_{\Sigma i} = \overline{\overline{\Pi}}_{\Sigma} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma} \cdot \overline{\overline{\Pi}}^{*}_{\Sigma}, \tag{5}$$

де $\overline{\overline{\Pi}}_{\Sigma}$ – матриця власних векторів; * – знак комплексного спряження та транспонування; $\overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma}$ – діагональна матриця власних значень матриці $\overline{\overline{A}}_{\Sigma i}$, причому

$$\overline{\overline{\Pi}}_{\Sigma} \cdot \overline{\overline{\Pi}}^{*}_{\Sigma} = \overline{\overline{\Pi}}_{\Sigma} \cdot \overline{\overline{\Pi}}^{-1}_{\Sigma} = \overline{\overline{E}}.$$

Якщо матриця $\overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma}$ не має нульових значень, то

$$\overline{\overline{A}}^{-1}_{\Sigma i} = \overline{\overline{\Pi}}_{\Sigma} \cdot \overline{\overline{\lambda}}^{-1}_{\Sigma} \cdot \overline{\overline{\Pi}}^{*}_{\Sigma}. \tag{6}$$

Для реалізації виразів (5), (6) необхідно обчислити власні значення блоків матриці $\overline{\overline{A}}_{\Sigma}$, структура якої детальніше описана виразом (2). Матриця $\overline{\overline{A}}_{\Sigma i}$ має жорстку структуру, але чисельні значення (як і слід було очікувати) для кожного диференційного рівняння залежать не тільки від (завжди однакових) коефіцієнтів i-го блоку матриці $\overline{\overline{A}}$, але й від коефіцієнтів диференційного рівняння a_i та b_i. Покажемо зв'язок між власними значеннями i-го блоку матриці $\overline{\overline{A}}_{\Sigma i}$ і власними значеннями i-го блоку матриці $\overline{\overline{A}}_{i}$ в (2).

Нехай для блока матриці $\overline{\overline{A}}_{i}$ в (2) знайдено усі власні значення і власні вектори, тоді вірно

$$\overline{\overline{A}}_{i} = \overline{\overline{\Pi}}_{i} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{i} \cdot \overline{\overline{\Pi}}^{*}_{i}.$$

Блок діагоналі матриці $\overline{\overline{\mathrm{A}}}^{2}$, тобто $\overline{\overline{\mathrm{A}}}^{2}_{\mathrm{i}}$, одержимо множенням матричних виразів

$$\overline{\overline{A}}^{2}_{i} = \overline{\overline{A}}_{i} \cdot \overline{\overline{A}}_{i} = \left(\overline{\overline{\Pi}}_{i} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{i} \cdot \overline{\overline{\Pi}}^{*}_{i}\right) \cdot \left(\overline{\overline{\Pi}}_{i} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{i} \cdot \overline{\overline{\Pi}}^{*}_{i}\right) = \overline{\overline{\Pi}}_{i} \cdot \overline{\overline{\lambda}}^{2}_{i} \cdot \overline{\overline{\Pi}}^{*}_{i}.$$

$$\overline{\overline{A}}^{0}_{i} = \overline{\overline{\Pi}}_{i} \cdot \overline{\overline{\lambda}}^{0}_{i} \cdot \overline{\overline{\Pi}}^{*}_{i} = \overline{\overline{\Pi}}_{i} \cdot \overline{\overline{E}} \cdot \overline{\overline{\Pi}}^{*}_{i}.$$

Розклад (2), після винесення за дужки матриць власних векторів, матиме вигляд

$$\overline{\overline{\Pi}}_i \cdot (a_m \cdot \overline{\overline{\lambda}}_i^{\,m} + a_{m-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_i^{\,m-1} + ... + a_1 \cdot \overline{\overline{\lambda}}_i + a_0 \cdot \overline{\overline{E}}) \cdot \overline{\overline{\Pi}}_i^{*} \cdot \overline{U}_{i\xi} =$$

$$= \overline{\overline{\Pi}}_i \cdot (b_n \cdot \overline{\overline{\lambda}}_i^{\,n} + b_{n-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_i^{\,n-1} + ... + b_1 \cdot \overline{\overline{\lambda}}_i + b_0 \cdot \overline{\overline{E}}) \cdot \overline{\overline{\Pi}}_i^{*} \cdot \overline{I}_{i\xi}, \quad (7)$$

або

$$\overline{\overline{\Pi}}_\Sigma \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A} \cdot \overline{\overline{\Pi}}_\Sigma^{*} \cdot \overline{U}_{i\xi} = \overline{\overline{\Pi}}_\Sigma \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B} \cdot \overline{\overline{\Pi}}_\Sigma^{*} \cdot \overline{I}_{i\xi}. \quad (7а)$$

В дужках виразу (7) записано суму зважених коефіцієнтів a_k, b_k діагональних матриць, тобто сума теж буде діагональною матрицею, а елементи діагоналі – це власні значення того самого i-го блоку матриці $\overline{\overline{\lambda}}_k$ в (5). Аналогічно для кожного блоку.

Тоді розв'язок (4а) одержує вигляд

$$\overline{U}_{i\xi} = \overline{\overline{\Pi}}_\Sigma \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A}^{-1} \cdot \overline{\overline{\Pi}}_\Sigma^{*} \cdot \overline{\overline{\Pi}}_\Sigma \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B} \cdot \overline{\overline{\Pi}}_\Sigma^{*} \cdot \overline{I}_{i\xi} = \overline{\overline{\Pi}}_\Sigma \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A}^{-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B} \cdot \overline{\overline{\Pi}}_\Sigma^{*} \cdot \overline{I}_{i\xi}, \quad (8а)$$

а розв'язок (4б) -

$$\overline{I}_{i\xi} = \overline{\overline{\Pi}}_\Sigma \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B}^{-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A} \cdot \overline{\overline{\Pi}}_\Sigma^{*} \cdot \overline{U}_{i\xi}. \quad (8б)$$

Алгоритм розв'язання лінійних диференційних рівнянь

Таким чином при реалізації алгоритму аналізу лінійних систем (диференційних рівнянь) в базисі перетворення Уолша-Адамара необхідно:

1. Сформувати лінійне матричне диференційне рівняння (1), внаслідок чого будуть одержані коефіцієнти a_i та b_i в чисельному вигляді або у вигляді функцій від деяких параметрів, компонентів системи.

2. Знайти спектр сигналу дії або реакції в базисі перетворення Уолша-Адамара:

$$\overline{I}_\xi = \overline{\overline{W}} \cdot \overline{I}_t, \quad (9а)$$

$$\overline{U}_\xi = \overline{\overline{W}} \cdot \overline{U}_t. \quad (9б)$$

3. Для прямої задачі сформувати масив діагональних елементів для кожного і-го блоку добутку матриць $\overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A}^{-1} \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B}$, де q-й елемент діагоналі має вигляд $\lambda_{\Sigma\Sigma q\,(i)}$

$$\lambda_{\Sigma\Sigma q(i)} = \frac{b_n \cdot \lambda_{q(i)}^{\;n} + b_{n-1} \cdot \lambda_{q(i)}^{\;n-1} + ... + b_1 \cdot \lambda_{q(i)} + b_0}{a_m \cdot \lambda_{q(i)}^{\;m} + a_{m-1} \cdot \lambda_{q(i)}^{\;m-1} + ... + a_1 \cdot \lambda_{q(i)} + a_0}. \quad (10а)$$

Аналогічно для зворотної задачі

$$\lambda_{\Sigma\Sigma q(i)} = \frac{a_m \cdot \lambda_{q(i)}^{\ m} + a_{m-1} \cdot \lambda_{q(i)}^{\ m-1} + ... + a_1 \cdot \lambda_{q(i)} + a_0}{b_n \cdot \lambda_{q(i)}^{\ n} + b_{n-1} \cdot \lambda_{q(i)}^{\ n-1} + ... + b_1 \cdot \lambda_{q(i)} + b_0}. \tag{10б}$$

4. За формулою (8а) або (8б) обчислити спектр шуканої реакції.
5. За формулами зворотного перетворення Уолта

$$\overline{U}_t = \frac{1}{N}\overline{\overline{W}} \cdot \overline{U}_\xi, \tag{11а}$$

$$\overline{I}_t = \frac{1}{N}\overline{\overline{W}} \cdot \overline{I}_\xi \tag{11б}$$

знайти відліки реакцій у натуральних координатах.

Оцінимо трудомісткість запропонованого алгоритму розв’язання диференційних рівнянь в базисі перетворення Уолша-Адамара.

Для формування діагональних елементів матриці $\overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A}^{-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B}$ необхідно $2 \cdot N$ операцій множення і стільки ж операцій алгебраїчного додавання.

Для множення матриць $\overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A}^{-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B} \cdot \overline{\overline{\Pi}}^{*}$ необхідно N^2 операцій множення, а для множення одержаного добутку на матрицю $\overline{\overline{\Pi}}$ ще $N^3/8$ операцій множення і стільки ж операцій додавання.

Отже, трудомісткість розв’язання задачі аналізу диференційного рівняння в базисі перетворення Уолша-Адамара становить приблизно $N^3/8$ операцій множення (без операцій ділення), що приблизно в вісім разів менше кількості трудомістких операцій обернення матриці $\overline{\overline{A}}_\Sigma$ методом Гауса. Але відсутність операції ділення в запропонованому алгоритмі забезпечує більшу точність обчислень з обмеженою розрядністю операндів, що є однією з найсуттєвіших переваг у порівнянні з методом прямого обернення матриць $\overline{\overline{A}}_\Sigma$, $\overline{\overline{B}}_\Sigma$.

Алгоритм пошуку власних векторів та власних значень

Отже, за наявності ефективного алгоритму пошуку власних значень матриці $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ (поблочно) та відповідних власних векторів, розв’язання задачі аналізу зводиться лише до зведення у степені 0, 1,…, k власних значень та їх підсумовування з вагами a_i, b_i для подальшої реалізації формул (8а), (8б). Самі власні значення $\overline{\overline{\lambda}}$ можуть бути знайдені для матриці довільного формату (як і усі власні вектори в матриці $\overline{\overline{\Pi}}$). При великих порядках матричних виразів (7) точність обчислень (8) залежить від точності обчислення власних значень.

Власні значення матриці $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ будемо знаходити для кожного *i*-го блоку $\overline{\overline{A}}_i$ окремо. Власні значення блочно-діагональної матриці $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ будуть мати вигляд прямої суми власних значень окремих блоків $\overline{\overline{A}}_i$

$$\overline{\overline{\lambda}} = \overline{\overline{\lambda}}_0 \oplus \overline{\overline{\lambda}}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{\overline{\lambda}}_n,$$

де $\overline{\overline{\lambda}}_i$ – діагональна матриця власних значень *i*-го блоку $\overline{\overline{\mathrm{A}}}_i$; порядок матриць $\overline{\overline{\lambda}}_0$ становить N=1; порядок матриці $\overline{\overline{\lambda}}_i$ становить $N= 2^{i-1}$, i= 1, 2,…, n; порядок матриці $\overline{\overline{\mathrm{A}}}$ становить $N = 2^n$; $\oplus$ – знак прямої власної суми [10].

Власне значення нульового блоку $\overline{\overline{\mathrm{A}}}_0$

$$\lambda_0 = \{0\}. \tag{12а}$$

Власні значення довільного *i*-го блоку $\overline{\overline{A}}_i$

$$\lambda_i = \{2 \cdot \cos(\varphi_k) \cdot \exp(\varphi_k)\}, \tag{12б}$$

де $\varphi_k = \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot k + 1}{2^{i-1}}\right)$ радіан або $\varphi_k = 90^o \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot k + 1}{2^{i-1}}\right)$ градусів; k – номер елемента діагональної матриці $\overline{\overline{\lambda}}_i$, $k = 0,1,\ldots,2^{i-1}$-1; i = 1,2,3…n.

Аналогічно до власних значень, власні вектори для кожного *i*-го блоку $\overline{\overline{A}}_i$ будемо знаходити окремо.

Матриці власних векторів перших трьох блоків

$$\overline{\overline{\Pi}}_0 = [1], \ \overline{\overline{\Pi}}_1 = [1], \ \overline{\overline{\Pi}}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -j/\sqrt{2} & j/\sqrt{2} \end{bmatrix}. \tag{13а}$$

Власні вектори довільного *i*-го (i = 3, 4,..., n) блоку $\overline{\overline{\mathrm{A}}}_i$

$$\overline{\overline{\Pi}}_{i+1}^{\langle k \rangle} = \overline{\overline{\Pi}}_i^{\langle \mathrm{mod}(k,N) \rangle} \otimes \begin{bmatrix} j \cdot \sin(\varphi_k) \\ \cos(\varphi_k) \end{bmatrix}, \tag{13б}$$

де $\overline{\overline{\Pi}}_i^{\langle k \rangle}$ – *k*-й власний вектор блока $\overline{\overline{A}}_i$; $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$; $\otimes$ – знак кронекеровського добутку матриць, φ_{k} – число, що відповідає значенню аргументу відповідного *k*-го комплексного власного значення; mod(k, N) – значення числа *k* по модулю *N*.

Наприклад, при N = 2:

$$\mathrm{mod}(0,2) = 0,\ \mathrm{mod}(1,2) = 1,\ \mathrm{mod}(2,2) = 0,\ \mathrm{mod}(3,2) = 1\,;$$

Знайдемо, наприклад, власні значення у вигляді діагональної матриці $\overline{\overline{\lambda}}_i$ та власні вектори $\overline{\overline{\Pi}}_i^{\langle k\rangle}$ для блоку $\overline{\overline{A}}_i$ при $i = 3$. $\overline{\overline{A}}_3$ та $\overline{\overline{\Pi}}_3$ мають розмір $N = 2^{i-1} = 4$. Множина відповідних значень аргументу φ_k у градусах та діагональна матриця $\overline{\overline{\lambda}}_2$, згідно (12б):

$$\varphi_k = \left\{67{,}5^o;\ 22{,}5^o;\ -22{,}5^o;\ -67{,}5^o\right\};$$

$$\overline{\overline{\lambda}}_2 = diag\left(2\cos(\varphi_0)e^{j\varphi_0}, 2\cos(\varphi_1)e^{j\varphi_1}, 2\cos(-\varphi_2)e^{-j\varphi_2}, 2\cos(-\varphi_3)e^{-j\varphi_3}\right) =$$

$$= diag\left(0{,}765\cdot e^{j67{,}5^o}; 1{,}848\cdot e^{j22{,}5^o}; 1{,}848\cdot e^{-j22{,}5^o}; 0{,}765\cdot e^{-j67{,}5^o}\right).$$

Відповідно до (13а) та (13б) власний вектор $\overline{\overline{\Pi}}_3^{\langle 2\rangle}$

$$\overline{\overline{\Pi}}_3^{\langle 2\rangle} = \overline{\overline{\Pi}}_2^{\langle \mathrm{mod}(2,2)\rangle} \otimes \begin{bmatrix} j\cdot\sin\left(-22{,}5^o\right) \\ \cos\left(-22{,}5^o\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -j/\sqrt{2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} j\cdot\sin\left(-22{,}5^o\right) \\ \cos\left(-22{,}5^o\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j\cdot 0{,}271 \\ 0{,}653 \\ -0{,}271 \\ -j\cdot 0{,}653 \end{bmatrix}$$

Власні вектори $\overline{\overline{\Pi}}_3^{\langle 0\rangle}$, $\overline{\overline{\Pi}}_3^{\langle 1\rangle}$, $\overline{\overline{\Pi}}_3^{\langle 3\rangle}$ шукаються аналогічно.

Одержані результати

Для ілюстрації запропонованого алгоритму розглянемо реакцію лінійного кола (рис. 1) на одиничний прямокутний імпульс. Коло обране, виходячи з простоти перевірки одержаних результатів, прямокутний імпульс з точки зору характерності одержуваного результату.

В теорії лінійних електричних кіл застосовуються перехідна та імпульсна характеристики кола. Внаслідок періодичності функцій Уолша неможливо отримати спектр функції Хевісайда, а внаслідок скінченої частоти дискретизації та формату перетворення N – отримати спектр функції Дірака.

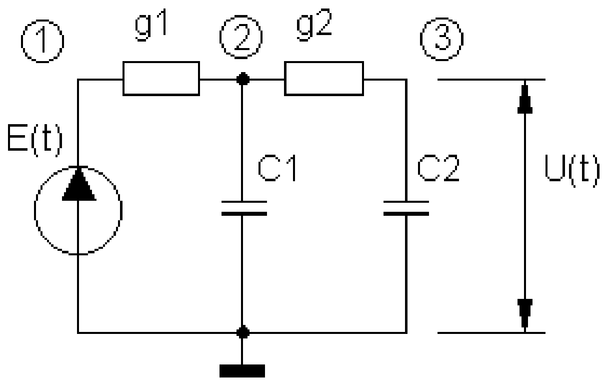


Рис. 1. Лінійне електричне коло

При цьому слід мати на увазі наступне

- внаслідок періодичності функцій Уолша ми, насправді, отримуємо реакцію на періодичну послідовність, період якої дорівнює часовому інтервалу T на якому досліджується функція;
- якщо тривалість імпульсу τ набагато менша, а період послідовності одиночних імпульсів T набагато більший за постійну часу електричного кола, то реакція буде наближатися до імпульсної характеристики даного кола;
- якщо тривалість імпульсу τ та період послідовності одиночних імпульсів T набагато більші за постійну часу електричного кола, причому $\tau \ll T$, то реакція буде наближатися до перехідної характеристики даного кола.

Диференційне рівняння кола, зображеного на рис. 1

$$C_1 \cdot C_2 \frac{d^2U(t)}{dt^2} + \left[C_2 \cdot (g_1 + g_2) + C_1 \cdot g_2\right] \frac{dU(t)}{dt} + g_1 \cdot g_2 U(t) = g_1 \cdot g_2 \cdot E(t).$$

Для простоти обчислень приймемо

$$C_1 = C_2 = C = 1,\ g_1 = g_2 = g = 1.$$

Тоді

$$\frac{d^2U_3(t)}{dt^2} + 3\frac{dU_3(t)}{dt} + U_3(t) = E(t).$$

В області перетворення Уолша-Адамара матричне диференційне рівняння має вигляд

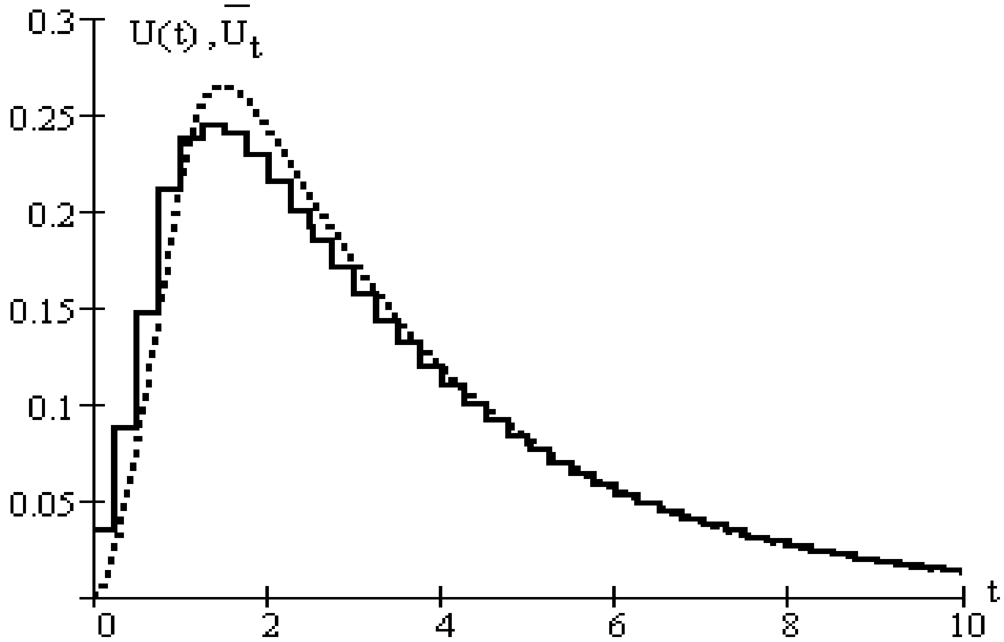
$$\left(\overline{\overline{A}}^2 + 3 \cdot \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{E}}\right) \cdot \overline{U}_\xi = \overline{I}_\xi.$$

Розв’язок матричного диференційного рівняння

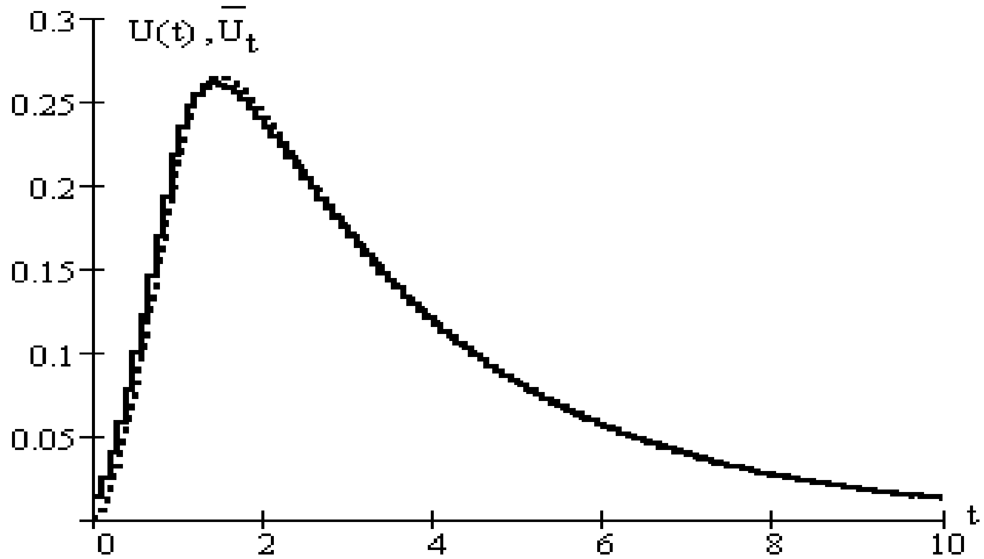
$$\overline{U}_\xi = \left(\overline{\overline{A}}^2 + 3 \cdot \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{E}}\right)^{-1} \cdot \overline{I}_\xi.$$

Нехай тривалість імпульсу $\tau = 1$. Розрахунок було проведено за формулами (9а), (10а), (11а) для формату перетворення $N = 128$ та двох частот дискретизації $f_1 = 1/4$, $f_2 = 1/11$.

На рис. 2а та 2б наведені результати розрахунків для частот f_1 та f_2 відповідно (неперервна східчаста лінія). Для порівняння на цих же рисунках наведено реакцію кола, зображеного на рис. 1, на той самий імпульс, одержану за аналітичною формулою (штрихова лінія).



а



б

Рис. 2. Графіки розв'язок диференційного рівняння

Висновки

1. Одержані результати ілюструють простоту реалізації розробленого методу аналізу лінійних систем в області трансформант Уолша-Адамара, що зручно, коли аналіз, стиснення, архівацію та класифікацію сигналів певних класів проводять саме в цьому координатному базисі.

2. Запропонований алгоритм аналізу лінійних систем для реалізації не потребує обчислень нулів-полюсів функцій кола, що в певних випадках можна вважати його позитивною рисою.

3. Даний алгоритм є складовою частиною підходу, який полягає в створенні математичного апарату аналізу систем на базі перетворень, відмінних від перетворення Фур'є. Алгоритм дає можливість такого аналізу в новітньому ортогональному базисі перетворень і указує на необхідність та можливість подальшого розвитку теорії розв'язання диференційних рівнянь в нетрадиційних базисах.

Література

1. Murlan S. Corrington. Solution of Differentia and Integral Equashion with Walsh Function.// IEEE Transactions on Circuit Theory. – 1973. – V. CT-20. – №5. – P. 470-476.
2. Рыбин А.И. Ортогональное экспоненциальное преобразование REX. //Радиоэлектроника. – 2004. – №2. – С. 3-9.
3. Рыбин А.И., Пилинский В.В., Родионова М.В. Анализ электрических цепей в натуральных координатах на базе ортогональных преобразований с действительным ядром.// Праці Інституту електродинаміки НАНУ: Зб. наук. праць. – 2004. – №1(7). – С. 7-12.
4. Рыбин А.И. Нормализация дискретных ортогональных преобразований тестовым сигналом.// Радиоэлектроника. – 2004. – №5. – С. 36-41.
5. Рибін О.І., Шарпан О.Б. Алгоритми формування матричних операторів дискретних ортогональних перетворень REX та CoREX.// Вісник ЖДТУ. – №4(31). – Т2. – 2004. – №1. – С. 53-57.
6. Рыбин А.И., Шарпан О.Б. Диагностика пульсограмм на базе ортогональных преобразований с действительным ядром.// Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2004. – №1. – С. 141-186.
7. Рыбин А.И. Анализ линейных цепей в базисе преобразования Уолша.// Радиоэлектроника. – 2004. – №5. – С. 36-41.
8. Рыбин А.И. Метод модификаций для анализа линейных цепей в базисе функций Уолша.// Радиоэлектроника. – 2004. – №6. – С. 36-41.
9. Рыбин А.И., Григоренко Е.Г., Родионова М.В. Алгоритм анализа электрических цепей в базисе ортогональных преобразований с действительным ядром в области трансформант.// Праці Інституту електродинаміки НАНУ: Зб. наук.праць. – 2004. – №3(9). – С.10-14.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука. – 1967.

Рыбин А.И., Ткачук А.П. **Анализ линейных систем в области трансформант преобразования Уолша-Адамара.** Предложен алгоритм решения дифференциальных уравнений линейных систем в базисе спектров преобразования Уолша-Адамара.	Rybin A., Tkachyk A. **The analisis of linear systems in basis of Walsh-Hadamard transformation.** The algorithm for solution of differential equations of liner systems in basis of Walsh-Hadamard trans-formation is suggested.

Надійшла до редакції 20 березня 2006 року