

2. Каяцкас А.А. Основы радиоэлектроники. - М.:Высш.шк.,1988. 464 с.
3. Манаев Е.И. Основы радиоэлектроники. - М.: Радио и связь. 1985. 488 с.
4. Трохименко Я.К. Ошибки формальной теории усилителей с обратной связью. // Радиоэлектроника. - 1973. № 2. С. 127 – 134.

<p>В.Д. Сташук К вопросу о классификации обратных связей в радиоэлектронных цепях. Показана необходимость анализа условий, при которых можно пренебречь прямой передачей сигнала через обратимый канал обратной передачи. Это позволяет обосновано подойти к определению вида обратной связи.</p>	<p>V.D. Stashuk. To a question on classification of feedback in radioelectronic circuits. In the article, necessity of the analysis of conditions when it is possible to neglect direct transfer of a signal through the reversible feedback channel is shown. It allows to define a kind of a feedback correctly.</p>
--	---

Надійшла до редакції 20 травня 2006 року

УДК 621.372.061

АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ СИТЕМ В ОБЛАСТІ ТРАНСФОРМАНТ КРАТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ EIWAL

Рибін О.І., Ткачук А.П.

Запропоновано алгоритм розв'язання диференційних рівнянь рівноваги лінійних систем в базисі кратного ортогонального перетворення EIWAL.

Вступ. Постановка задачі

Розв'язання диференційних рівнянь рівноваги лінійних систем, як відомо, найбільш ефективно реалізується при використанні перетворення Фур'є та споріднених з ним (z -перетворення, перетворення Лапласа). Це забезпечило поширення перетворення Фур'є у найрізноманітніших галузях науки і техніки. Але розв'язання задач оброблення, передачі та архівації сигналів часто вимагає переходу до інших, відмінних від перетворення Фур'є ортогональних перетворень [1], які забезпечують краще стиснення інформації або більшу зручність обробки [2-4].

Широкого розповсюдження набувають з цього приводу "кратні" ортогональні перетворення, наприклад перетворення Фур'є-Мелліна, деякі види гомоморфних перетворень [5-6].

Метою даної роботи є розроблення математичного апарату розв'язання диференційних рівнянь в області кратного перетворення, одержаного з власних векторів дискретного оператора диференціювання в базисі Уолша-Адамара та перетворення Уолша, названого авторами перетворенням EIWAL (Eigenvector-Walsh).

Опис запропонованого методу

Як відомо [7, 8], лінійне диференційне рівняння

$$\begin{aligned} a_m \cdot \frac{d^m x}{dt^m} + a_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dx}{dt} + a_0 \cdot x = \\ = b_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \cdot \frac{dy}{dt} + b_0 \cdot y \end{aligned} \quad (1)$$

в області трансформант Уолша-Адамара перетворюється до вигляду

$$\begin{aligned} \left(a_m \cdot \overline{\overline{A}}^m + a_{m-1} \cdot \overline{\overline{A}}^{m-1} + \dots + a_1 \cdot \overline{\overline{A}} \cdot x + a_0 \cdot \overline{\overline{E}} \right) \cdot \overline{X}_\xi = \\ = \left(b_n \cdot \overline{\overline{A}}^n + b_{n-1} \cdot \overline{\overline{A}}^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \overline{\overline{A}} \cdot x + b_0 \cdot \overline{\overline{E}} \right) \cdot \overline{Y}_\xi, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\overline{\overline{A}}^k = \left[\overline{\overline{W}} \cdot \overline{\overline{D}}_H^T \right]^k$; $\overline{\overline{E}}$ – одинична матриця; $\overline{\overline{W}}$ – матриця (дискретний оператор) перетворення Уолша-Адамара; $\overline{\overline{D}}_H$ – нормована (поділена на N) матриця похідних від оператора $\overline{\overline{W}}$; T – символ транспонування; N – порядок квадратних матриць $\overline{\overline{A}}$ та $\overline{\overline{E}}$; \overline{X}_ξ , \overline{Y}_ξ – стовпці амплітуд спектрів за Адамаром відповідно реакції та дії розміру $N \times 1$.

Розклавши оператор $\overline{\overline{A}}$ на власні значення та власні вектори, вираз можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \overline{\overline{P}} \cdot (a_m \cdot \overline{\overline{\lambda}}^m + a_{m-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}^{m-1} + \dots + a_1 \cdot \overline{\overline{\lambda}} + a_0 \cdot \overline{\overline{E}}) \cdot \overline{\overline{P}}^* \cdot \overline{X}_\xi = \\ = \overline{\overline{P}} \cdot (b_n \cdot \overline{\overline{\lambda}}^n + b_{n-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \overline{\overline{\lambda}} + b_0 \cdot \overline{\overline{E}}) \cdot \overline{\overline{P}}^* \cdot \overline{Y}_\xi, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\overline{\overline{\lambda}}^k$ – діагональна матриця власних значень матриці $\overline{\overline{A}}$ в степені k , тобто – матриця з діагональними елементами λ_d^k ; $\overline{\overline{P}}$ – матриця утворена векторами-стовпцями власних значень π_d , а $\overline{\overline{P}}^*$ – транспонована і комплексно спряжена матриця $\overline{\overline{P}}$.

Вирази в дужках формули (3) можна записати як діагональні матриці $\overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A}$ та $\overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B}$, причому діагональні елементи матриць з номерами (0,0), мають значення a_0 та b_0 відповідно, а елементи d -го рядка і d -го стовпця мають відповідно вигляд

$$\begin{aligned} \lambda_{\Sigma Add} = a_m \cdot \lambda_d^m + a_{m-1} \cdot \lambda_d^{m-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda_d + a_0; \\ \lambda_{\Sigma Bdd} = b_n \cdot \lambda_d^n + b_{n-1} \cdot \lambda_d^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \lambda_d + b_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Враховуючи (4), розв'язок задачі аналізу можна знайти у вигляді

$$\overline{X}_\xi = \overline{\overline{P}} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma A}^{-1} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma B} \cdot \overline{\overline{P}}^* \cdot \overline{Y}_\xi = \overline{\overline{P}} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma AB} \cdot \overline{\overline{P}}^* \cdot \overline{Y}_\xi, \quad (5)$$

де $\overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma AB}$ – діагональна матриця, елемент діагоналі (0,0) якої має вигляд

$$\lambda_{\Sigma AB00} = \frac{b_0}{a_0},$$

а елемент (d,d)

$$\lambda_{\Sigma AB dd} = \frac{b_n \cdot \lambda_d^n + b_{n-1} \cdot \lambda_d^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \lambda_d + b_0}{a_m \cdot \lambda_d^m + a_{m-1} \cdot \lambda_d^{m-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda_d + a_0}. \quad (6)$$

Підставимо тепер в вираз (5) замість \overline{X}_ξ та \overline{Y}_ξ вирази

$$\begin{aligned} \overline{X}_\xi &= \overline{\overline{W}} \cdot \overline{X}_t \\ \overline{Y}_\xi &= \overline{\overline{W}} \cdot \overline{Y}_t \end{aligned} \quad (7)$$

де $\overline{\overline{W}}$ – нормований дискретний оператор перетворення Уолша-Адамара; \overline{X}_t та \overline{Y}_t відповідно стовпці відліків у часі реакції та дії.

Одержимо реакції

$$\overline{X}_t = \overline{\overline{W}} \cdot \overline{\overline{\Pi}} \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma AB} \cdot \overline{\overline{\Pi}}^* \cdot \overline{\overline{W}} \cdot \overline{Y}_t = \overline{\overline{EIW}}^* \cdot \overline{\overline{\lambda}}_{\Sigma AB} \cdot \overline{\overline{EIW}} \cdot \overline{Y}_t, \quad (8)$$

де $\overline{\overline{EIW}}^* = \overline{\overline{W}} \cdot \overline{\overline{\Pi}}$ та $\overline{\overline{EIW}} = \overline{\overline{\Pi}}^* \cdot \overline{\overline{W}}$ – дискретні матричні оператори зворотного і прямого кратного перетворення відповідно, названого у роботі EI WAL.

Порівняємо вираз (8) з виразом для дискретного перетворення Фур'є

$$\overline{X}_t = \overline{\overline{F}}^* \cdot \overline{\overline{Diag}}(F(j \cdot \omega)) \cdot \overline{\overline{F}} \cdot \overline{Y}_t, \quad (9)$$

де $\overline{\overline{F}}$, $\overline{\overline{F}}^*$ – дискретні матричні оператори прямого та зворотного перетворення Фур'є; $\overline{\overline{Diag}}(F(j \cdot \omega))$ – діагональна матриця функції кола, елемент D_{00} якої має вигляд

$$D_{00} = \frac{b_0}{a_0},$$

а елемент D_{dd} дорівнює

$$D_{dd} = \frac{b_n \cdot (j \cdot \omega_d)^n + b_{n-1} \cdot (j \cdot \omega_d)^{n-1} + \dots + b_1 \cdot (j \cdot \omega_d) + b_0}{a_m \cdot (j \cdot \omega_d)^m + a_{m-1} \cdot (j \cdot \omega_d)^{m-1} + \dots + a_1 \cdot (j \cdot \omega_d) + a_0}. \quad (10)$$

Порівняння (10) і (6) та (9) і (8) показує, що ці вирази подібні. Звідси виходить, що трудомісткість аналізу (8) за функціями EI WAL співпадає з трудомісткістю аналізу з використанням перетворення Фур'є.

Більше того, оскільки вирази (10) і (6) при заміні $j \cdot \omega_d$ на λ_d тотожні, теореми про диференціювання та згортку оригіналів, відомі для перетворення Фур'є, вірні також і для запропонованого перетворення EI WAL, а, наприклад, в теорії кіл можливо використовувати усі процедури пов'язанні із введенням образів $j \cdot \omega_d \cdot L \rightarrow \lambda_d \cdot L$ та $1/j \cdot \omega_d \cdot C \rightarrow 1/\lambda_d \cdot C$.

Алгоритм формування матриць $\overline{\overline{EIW}}$ та $\overline{\overline{\lambda}}$

Оператор дискретного перетворення $\overline{\overline{EIW}}$ розміром $N \times N$ будемо формувати окремими підматрицями, які є групою окремих трансформант, а матрицю $\overline{\overline{\lambda}}$ – окремими підмножинами діагональних елементів λ_d , що відповідають групам трансформант. Так, матриця перетворення $\overline{\overline{EIW}}$ складається з $n+1$ підматриць, де $n = \log_2(N)$. Кожна r -та підматриця має розмір $2^{r-1} \times N$ при $r = 1, 2, \dots, n$. Нульова підматриця має розмір $1 \times N$. Відповідно маємо $n+1$ підмножин діагональних елементів матриці $\overline{\overline{\lambda}}$.

Нульова підматриця є нульовим рядком матриці $\overline{\overline{EIW}}$, який визначається виразом

$$Eiwal_0(0, m) = \exp(j \cdot 0 \cdot m), \quad (11a)$$

де $m = 0, 1, \dots, N - 1$.

Перша підматриця є першим рядком матриці $\overline{\overline{EIW}}$, який визначається виразом

$$Eiwal_1(0, m) = \exp(j \cdot \pi \cdot m), \quad (11б)$$

де $m = 0, 1, \dots, N - 1$.

Елементи r -ї підматриці визначаються як

$$\begin{aligned} Eiwal_r(k, m) &= \overline{\overline{Eiwal_r(2^{r-1} - k - 1, m)}} = \\ &= \exp\left(-j \cdot \pi \cdot \left[\frac{(2 \cdot m + 1) \cdot (2 \cdot k + 1)}{2^r}\right]\right), \end{aligned} \quad (11в)$$

де k – порядковий номер базисної функції в окремій r -тій підматриці, $k = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$; $r = 2, 3, \dots, n$; $m = 0, 1, \dots, N - 1$; $\overline{\overline{}}$ – знак комплексного спряження.

Відповідні підмножини діагональних елементів λ_i матриці $\overline{\overline{\lambda}}$:

$$\lambda_0 = 0; \quad (12a)$$

$$\lambda_k^r = 1 + \exp(j \cdot \varphi_k), \quad (12б)$$

де $\varphi_k = \pi \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot k + 1}{2^{r-1}}\right)$ радіан або $\varphi_k = 180^\circ \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot k + 1}{2^{r-1}}\right)$ градусів;

k – номер елемента діагональної матриці у окремій r -тій підмножині, $k = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$; $r = 1, 2, \dots, n$.

**Алгоритм аналізу диференційних рівнянь
в базисі перетворення EIWAL**

Алгоритм аналізу лінійних систем в базисі перетворення EIWAL має наступний вигляд.

1. Замінити усі дії їх образами відносно λ (так само, як це робиться для перетворення Лапласа відносно p), або обчислити “спектри” за формулою прямого перетворення $\overline{Y}_\lambda = \overline{EIW} \cdot \overline{Y}_t$.

2. Символічним методом відносно операнди λ знайти необхідні реакції кола в символічному вигляді.

3. Підставити значення λ_d (відомі і незмінні для матриці дискретного оператора диференціювання \overline{A} в (2)) в відповідні вирази (6) і знайти для кожної реакції,

$$x_{\lambda_d} = \lambda_{\Sigma ABdd} \cdot y_{\lambda_d}$$

4. Для одержаних “спектрів” реакції x_{λ_d} знайти зворотне перетворення EIWAL

$$\overline{X}_t = \overline{EIW}^* \cdot \overline{X}_\lambda, \tag{13}$$

де $\overline{X}_\lambda = [x_{\lambda_0}, x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_d}, \dots, x_{\lambda_{N-1}}]^T$.

Таким чином, алгоритм розв’язання диференційних рівнянь рівноваги лінійних систем (крім базисних функцій $Eiwal(n,t)$, дискретні відліки яких знаходяться в матриці EIWAL і “частот” цих базисних функцій) не відрізняється від відомого алгоритму розв’язання лінійних диференційних рівнянь (аналізу лінійних систем) за методом перетворення Фур’є.

Швидкодія запропонованого методу залежить від можливості аналітичного опису функції $Eiwal(n,t)$ та організації відповідного швидкого перетворення, що є окремою задачею, якій буде присвячена спеціальна робота.

Ілюстрація одержаних результатів

Розглянемо класичний приклад коефіцієнту передачі паралельного резонансного контуру.

Коефіцієнт передачі контуру у вигляді $K(j \cdot \omega_i)$ та $K(\lambda_i)$:

$$K(j \cdot \omega_i) = \frac{g}{g + j \cdot \omega_i \cdot C + \frac{1}{j \cdot \omega_i \cdot L}}; \quad K(\lambda_i) = \frac{g}{g + \lambda_i \cdot C + \frac{1}{\lambda_i \cdot L}}$$

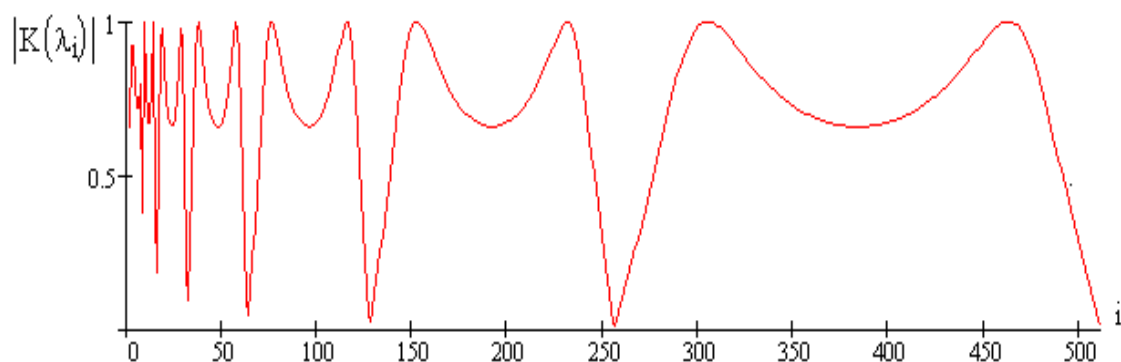
Для простоти обчислень приймемо $g = 1$.

Нехай резонанс має місце на середній нормованій частоті. Тоді

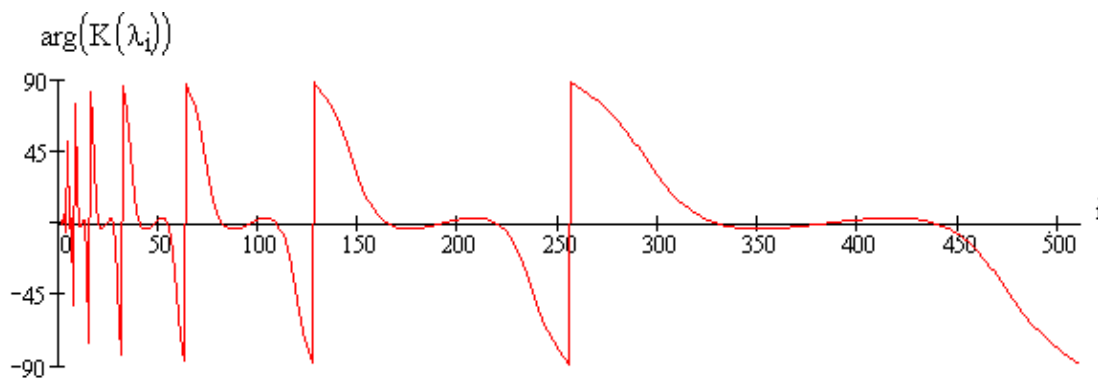
$$\frac{N}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \frac{N}{4}, \text{ звідки } L \cdot C = (2/\pi)^2.$$

Оберемо значення: $L = \frac{1}{10} \cdot (2/\pi)^2$, $C = 10 \cdot (2/\pi)^2$.

На рис. 1 наведені нормовані амплітудна та фазова характеристики коефіцієнта передачі $K(\lambda_i)$ в області перетворення EIWAL, а на рис. 2 при перестановці відліків згідно двійкової інверсії їх номерів. Пунктирною лінією на рис. 2 показано $K(j \cdot \omega_i)$. Розрахунки проведено для формату перетворення $N = 512$.



а



б

Рис. 1. Нормовані амплітудна (а) та фазова (б) характеристики коефіцієнта передачі в області перетворення EIWAL

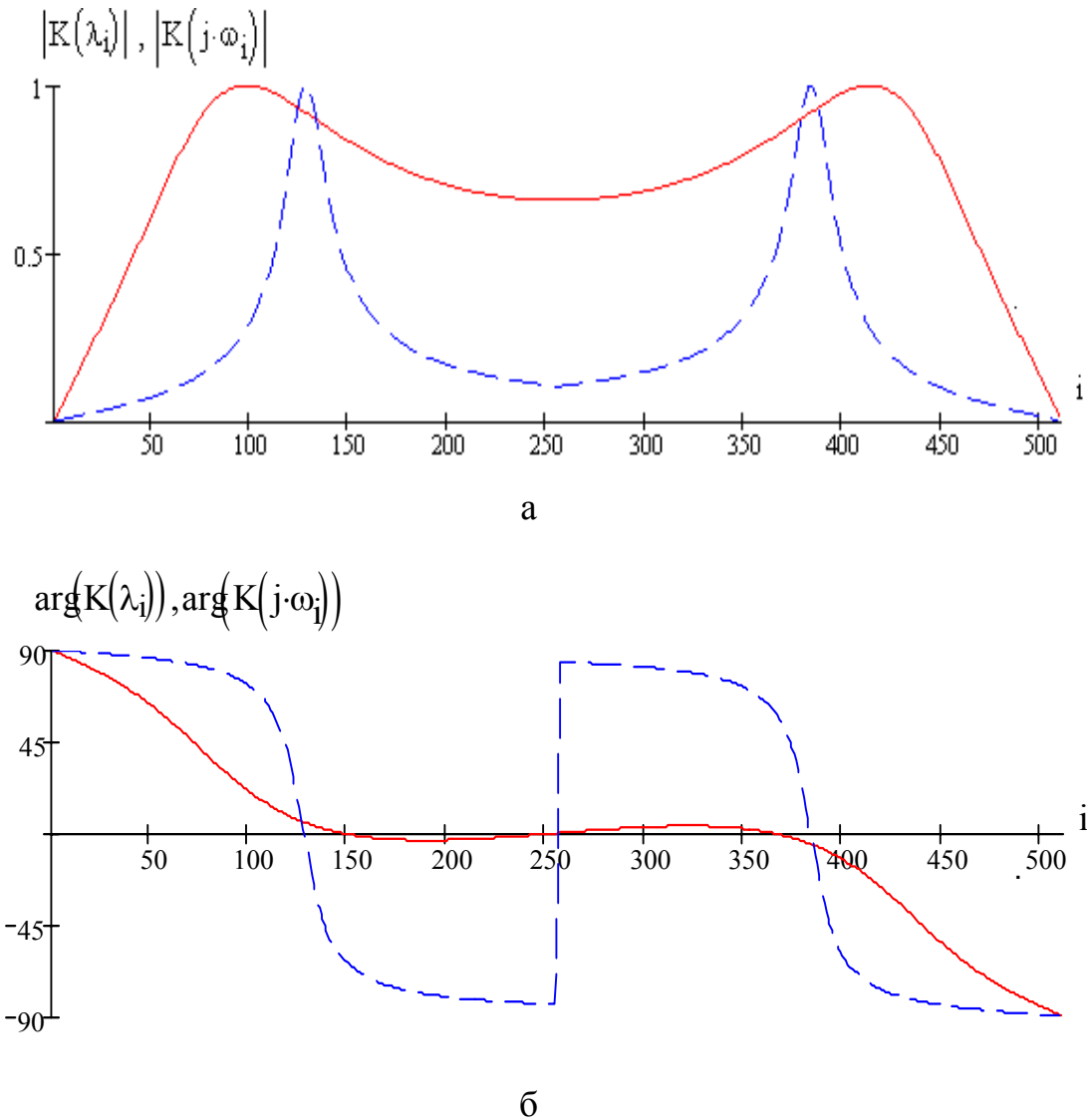


Рис. 2. Порівняння амплітудних (а) та фазових (б) характеристик коефіцієнта передачі в області перетворень EIWAL та Фур'є

Висновки

1. Одержане ортогональне перетворення EIWAL має базисні функції, тотожні базисним функціям перетворення Фур'є з точністю до фазових множників, тому амплітудні спектри перетворень EIWAL і Фур'є (при відповідному впорядкуванні) співпадають, а фазові спектри відрізняються.

2. Дискретні частоти перетворення Фур'є – це уявні величини:

$$0; \pm 2\pi j; \pm 2 \cdot 2\pi j; \dots; \pm k \cdot 2\pi j; \dots,$$

номер яких k лінійно зв'язаний з нормованим значенням частоти

$$j \cdot \omega_k = j \cdot 2\pi \cdot k.$$

В разі перетворення EIWAL номер частоти i і значення частоти зв'язані нелінійною залежністю. Частота λ_i має дійсну і уявну складову і розташована на одиничному крузі на комплексній площині з центром в точці $1+j \cdot 0$. При форматі перетворення N цей круг поділено на $2 \cdot N$ рівних секторів, а λ_i

– це i -та точка, на верхньому півколі, починаючи з точки $0+j\cdot 0$, якщо рухатися за годинниковою стрілкою (аналогічно λ_{-i} – при русі з точки $0+j\cdot 0$ проти годинникової стрілки).

3. Теорема про диференціювання оригіналу для перетворення формально співпадає з аналогічною теоремою Фур'є перетворення:

$$x(t) \rightarrow X(\lambda); \quad \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow \lambda \cdot X(\lambda),$$

хоча при диференціюванні відповідної базисної функції $X(\lambda)$ одержано множник $j\cdot\omega$ (що і використовують в перетворенні Фур'є).

4. Оскільки для будь-якого номеру $d > 0$ $\lambda \neq j\cdot 2\pi\cdot d$, то амплітудні і фазові характеристики функцій кіл для Фур'є перетворення і для перетворення EIWAL будуть відрізнятися (іноді суттєво).

5. Запропоновану в роботі методику одержання ортогонального перетворення з теоремою про диференціювання оригіналу, яка співпадає з відповідною теоремою перетворення Фур'є, у подальшому слід поширити на розклади операторів диференціювання інших перетворень з дійсним ядром, таких як косинусоїдальне, Хартлі, похиле, REX, coREX і т. ін.

Література

1. Ахмед Н., Рао К. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов// Пер. с англ. под. общ. ред. И.Б. Фоменко. – М.: Связь, 1980.–248 с.
2. Рыбин А.И. Ортогональное экспоненциальное преобразование REX.// Радиоэлектроника. – 2004. – №2. – С. 3 - 9.
3. Рыбин А.И. Нормализация дискретных ортогональных преобразований тестовым сигналом. Радиоэлектроника. – 2004. – №5. – С. 36 - 41.
4. Pratt W. K. Digital Image Processing J. Wile & Sons, – 1991.v. 1, 2.
5. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. Москва: Техносфера, 2005. – 1072 с.
6. Jiří Jan. Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů. VUT v Brně (Čech rep.), 1997. – 438 s.
7. Рыбин А.И. Анализ линейных цепей в базисе преобразования Уолша.// Радиоэлектроника. – 2004. – №5. – С. 36 - 41.
8. Рыбин А.И., Григоренко Е.Г., Родионова М.В. Алгоритм анализа электрических цепей в базисе ортогональных преобразований с действительным ядром в области трансформант. // Праці Інституту електродинаміки НАНУ: Зб. наук. праць. – 2004.– №3(9). - С. 10-14.

Рыбин А.И., Ткачук А.П. Анализ линейных систем в области трансформант преобразования EIWAL. Предложен алгоритм решения дифференциальных уравнений линейных систем в базисе преобразования EIWAL.	Rybin A., Tkachuk A. The analysis of linear systems in basis of EIWAL transformation. The algorithm for solution of differential equations of liner systems in basis of EIWAL transformation is suggested.
---	---

Надійшла до редакції 20 травня 2006 року