

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ *BCJR* АЛГОРИТМІВ ДЕКОДУВАННЯ ЗГОРТАЛЬНИХ КОДІВ

Шпилька О.О., Юрков Ю.О., Жук С.Я.

Найбільшим досягненням в теорії завадостійкого кодування за останні два десятиліття є винайдення турбо-кодів, які все частіше використовуються в нових системах зв'язку. Ці коди відносяться до класу блокових, хоча і будуються на використанні згортальних кодів. В роботі [1] показано, що при збільшенні довжини інформаційного блоку турбо-коду до декількох тисяч біт імовірнісні характеристики наближаються до границі Шеннона. Турбо-код утворюється компонуванням двох або більше складових, кожна із яких є послідовністю утвореною систематичним згортальним кодером із інформаційної послідовності, яка пройшла через змішувач. Задача змішувача інформаційної послідовності полягає в тому, щоб в кожний кодер надійшла некорельована версія інформації, в результаті чого відповідні вихідні біти кожного кодера стають незалежними. Для більш повного використання інформації, яка отримується з кожного декодера, алгоритм декодування повинен використовувати «м'яку» схему прийняття рішення. Для турбо-кодів з двома складовими концепція декодування полягає в тому, щоб передати «м'яке» рішення з виходу одного декодера на вхід іншому, який буде використовувати її як апіорну інформацію, і повторювати цю процедуру до тих пір, поки не будуть отримані надійні рішення [2].

Найбільш часто під час декодування турбо-кодів для отримання «м'яких» рішень використовується *BCJR* алгоритм [3], який із-за своєї структури ще називають «вперед-назад» алгоритмом. Він розраховує апостеріорні ймовірності для кожного переданого інформаційного символу отриманого з марківського джерела враховуючи усі отримані на розглянутому інтервалі спостереження. Оцінка переданого символу знаходиться по критерію максимуму апостеріорної ймовірності, що дозволяє мінімізувати ймовірність помилки у прийнятті рішень. Арифметичні затрати на реалізацію «вперед-назад» алгоритму можуть бути зменшені, якщо під час декодування використовувати лише «вперед» частину, як зроблено у роботі [4].

Метою статті є порівняння імовірнісних характеристик «вперед-назад» і «вперед» алгоритмів для декодування згортальних кодів та розрахунок арифметичних витрат для реалізації їх на процесорі ADSP BF-533.

Постановка задачі

Структурна схема системи передачі даних показана на рис.1. На вхід кодера від марківського джерела інформації надходить дискретна інформаційна послідовність символів b_k^j , $j = \overline{1, L}$, де L розмір алфавіту інформаційних символів. Для спрощення будемо вважати, що згортальний кодер



Рис.1

формує символи q_k^r , $r = \overline{1, N}$, N - розмір алфавіту каналних символів, які передаються в канал з АБГШ.

Математична модель процесу вимірювання послідовності символів на вході декодера:

$$y_k = q_k^r + v_k, \quad (1)$$

де y_k - вимірювання на вході декодера в момент часу k , v_k - некорельована гаусівська послідовність з нульовим математичним сподіванням і дисперсією σ_v^2 .

Опис BCJR алгоритму

В момент часу k кодер характеризується станом $S_k^n, n = \overline{1, M}$, де M - кількість можливих станів кодера, які залежать від довжини кодового обмеження і алфавіту інформаційних символів [2,3]. Під дією інформаційного символу b_k^j кодер переходить із стану S_k^n в стан S_{k+1}^m формуючи каналний символ q_k^r . Згортальний кодер вносить марківську залежність в послідовність каналних символів q_k^r . Як випливає з (1) каналні символи q_k^r спотворюються завадою v_k . Декодер має формувати оцінки інформаційних символів \hat{b}_k^j по критерію максимуму апостеріорної ймовірності на основі послідовності Y отриманих вимірювань y_k на інтервалі часу $0 \dots T - 1$.

Розіб'ємо послідовність вимірювань на три: $Y = Y_{<k} \cup y_k \cup Y_{>k}$, де $Y_{<k}$ - послідовність вимірів на інтервалі часу $0 \dots k - 1$; $Y_{>k}$ - послідовність вимірів на інтервалі часу $k + 1 \dots T - 1$. Тоді апостеріорна ймовірність переходу з стану кодера S_k^n до стану S_{k+1}^m на основі вимірної послідовності Y :

$$P(S_k^n, S_{k+1}^m | Y) = p(S_k^n, S_{k+1}^m, Y) / p(Y) = p(S_k^n, S_{k+1}^m, Y_{<k}, y_k, Y_{>k}) / p(Y). \quad (2)$$

Використовуючи теорему множення ймовірностей, (2) можна записати:

$$P(S_k^n, S_{k+1}^m | Y) = p(S_k^n, S_{k+1}^m, Y_{<k}, y_k) p(Y_{>k} | S_k^n, S_{k+1}^m, Y_{<k}, y_k) / p(Y). \quad (3)$$

Використовуючи теорему множення ймовірностей і марківську властивість, перший множник із (3) можна записати:

$$p(S_k^n, S_{k+1}^m, Y_{<k}, y_k) = p(S_{k+1}^m, y_k | S_k^n, Y_{<k}) p(S_k^n, Y_{<k}) = p(S_{k+1}^m, y_k | S_k^n) p(S_k^n, Y_{<k}) \quad (4)$$

Використовуючи марківську властивість, другий множник із (3):

$$p(Y_{>k} | S_k^n, S_{k+1}^m, Y_{<k}, y_k) = p(Y_{>k} | S_{k+1}^m) \quad (5)$$

Підставивши (4) і (5) в (3), отримаємо:

$$P(S_k^n, S_{k+1}^m | Y) = p(S_k^n, Y_{<k}) p(S_{k+1}^m, y_k | S_k^n) p(Y_{>k} | S_{k+1}^m) / p(Y)$$

Позначимо множники при розрахунку апостеріорної ймовірності: $\alpha(S_k^n) = p(S_k^n, Y_{<k})$ - сумісна ймовірність того, що вимірювання до $k-1$ моменту часу привели в стан S_k^n ; $\gamma(S_k^n, S_{k+1}^m) = p(S_{k+1}^m, y_k | S_k^n)$ - ймовірність переходу із стану S_k^n в стан S_{k+1}^m з вимірюванням y_k ; $\beta(S_{k+1}^m) = p(Y_{>k} | S_{k+1}^m)$ - ймовірність того, що послідовність вимірів, отриманих з $k+1$ моменту часу, формувалась з S_{k+1}^m стану.

Апостеріорна ймовірність переходу із стану S_k^n в стан S_{k+1}^m :

$$P(S_k^n, S_{k+1}^m | Y) = \alpha(S_k^n) \gamma(S_k^n, S_{k+1}^m) \beta(S_{k+1}^m) / p(Y), \quad (6)$$

де $p(Y)$ - ймовірність: $p(Y) = \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M \alpha(S_k^n) \gamma(S_k^n, S_{k+1}^m) \beta(S_{k+1}^m)$.

Отримавши ймовірності $\alpha(S_k^n)$ і $\beta(S_{k+1}^m)$, значення ймовірностей $\alpha(S_{k+1}^m)$ і $\beta(S_k^n)$ можуть бути отримані рекурсивно за формулами [3,4]:

$$\alpha(S_{k+1}^m) = \sum_{n=1}^M \alpha(S_k^n) \gamma(S_k^n, S_{k+1}^m), \quad (7)$$

$$\beta(S_k^n) = \sum_{m=1}^M \gamma(S_k^n, S_{k+1}^m) \beta(S_{k+1}^m). \quad (8)$$

Ймовірності α для кожного стану ітеративно розраховуються з початку до кінця блоку прийнятих вимірів, цей розрахунок називають шляхом «вперед». Ймовірності β ітеративно розраховуються з кінця в початок, цей розрахунок називають шляхом «назад». У випадку коли стан кодера на початку і в кінці блоку вимірів невідомий, початкові значення ймовірностей встановлюються як:

$$[\alpha(S_0^1), \dots, \alpha(S_0^M)] = [1/M, \dots, 1/M]; [\beta(S_{T-1}^1), \dots, \beta(S_{T-1}^M)] = [1/M, \dots, 1/M].$$

Ймовірність переходу з стану S_k^n в стан S_{k+1}^m γ для каналу з АБГШ може бути розрахована згідно [3,4]:

$$\gamma(S_k^n, S_{k+1}^m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \exp\left(-\frac{(y_k - q(S_k^n, S_{k+1}^m))^2}{2\sigma_v^2}\right) \cdot p(b_k^j), \quad (9)$$

де $q(S_k^n, S_{k+1}^m)$ - каналний символ, який є відомою функцією станів кодера S_k^n і S_{k+1}^m ; $p(b_k^j)$ - апіорна ймовірність появи в інформаційні послідовності символу b_k^j , який спричинює перехід із стану S_k^n в S_{k+1}^m .

Розглянутий спосіб декодування називають «вперед-назад» алгоритмом, із-за необхідності розраховувати α і β ймовірності. «Вперед» алгоритм для декодування використовує лише ймовірності α [4]. В цьому алгоритмі ймовірності β не використовуються. Апостеріорна ймовірність переходу із стану S_k^n в стан S_{k+1}^m для «вперед» алгоритму визначається як

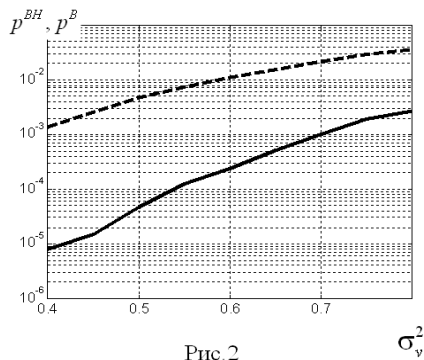
$$P(S_k^n, S_{k+1}^m | Y) = \alpha(S_k^n) \gamma(S_k^n, S_{k+1}^m) / p(Y), \quad (10)$$

де $p(Y)$ - ймовірність: $p(Y) = \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M \alpha(S_k^n) \gamma(S_k^n, S_{k+1}^m)$.

Після знаходження всіх значень ймовірностей α і β , для кожного можливого переходу із стану S_k^n в стан S_{k+1}^m в будь-який момент часу k з інтервалу $0, \dots, T-1$ можна розрахувати апостеріорну ймовірність (6) для «вперед-назад» алгоритму або (10) для «вперед» алгоритму. Для формування оцінки інформаційного символу \hat{b}_k^j знаходиться максимум суми апостеріорних ймовірностей переходів із стану S_k^n в стан S_{k+1}^m , які можуть відбутися в кодері під дією інформаційного символу b_k^j .

Результати експериментальних досліджень

Алгоритми (6) і (10) перевірені на модельному прикладі для системи зв'язку з 4 позиційною ASK модуляцією $\{-3, -1, 1, 3\}$. Згортальний кодер з степіню кодування $1/2$, описується векторами зв'язків $g_1 = 7$ і $g_2 = 5$, довжина кодового обмеження 3. Інформаційні символи формувалися рівномірно з алфавіту $\{0, 1\}$.



На рис.2 в залежності від дисперсії помилки вимірювання σ_v^2 суцільною лінією зображено ймовірність помилкового прийняття рішення P^{BH} щодо оціненого інформаційного символу b_k^j за допомогою «вперед-назад» алгоритму. Штриховою лінією показана ймовірність помилки прийняття рішення P^B для «вперед» алгоритму.

Як видно з результатів використання зворотного ходу в алгоритмі «вперед-назад» дозволяє покращити характеристики на один два порядки в порівнянні з «вперед». алгоритмом.

Арифметичні затрати для реалізації «вперед-назад» алгоритму розподіляються для ітеративного розрахунку ймовірностей (7) і (8) та розрахунку ймовірностей (9) для кожного моменту часу k з інтервалу $0, \dots, T-1$. Розрахунок експоненціальної функції дуже трудомістка операція, тому доцільно завчасно розрахувати всі можливі значення $\gamma(S_k^n, S_{k+1}^m)$ і записати їх у пам'ять. Об'єм пам'яті необхідний для зберігання значень залежить від розрядності АЦП z та кількості можливих станів M . Враховуючи те, що під час згортального кодування перехід у новий стан може відбутися лише із L попередніх станів, затрати на розрахунок можуть бути зменшені. В табл. 1 наведено кількість необхідної пам'яті та операцій множення і додавання потрібних для декодування послідовності прийнятого блоку вимірів Y на

інтервалі $0..T - 1$.

Таблиця 1

	Додавання	Множення	Пам'ять, біт
$\alpha(S_k^n)$	$T \cdot M \cdot L$	$T \cdot M \cdot L$	$T \cdot M \cdot z$
$\beta(S_{k+1}^m)$	$T \cdot M \cdot L$	$T \cdot M \cdot L$	$T \cdot M \cdot z$
$\gamma(S_k^n, S_{k+1}^m)$	-	-	$M \cdot L \cdot z$

Для знаходження всіх апостеріорних ймовірностей (6) потрібно виконати $2 \cdot T \cdot M \cdot L$ операцій множення. Знаходження значення $p(Y)$ і ділення на нього не обов'язкове, це значення являє собою коефіцієнт нормалізації. Далі слід знайти L сум із M/L доданків для кожного виміру з блоку Y , що потребує $T \cdot L \cdot (M/L - 1)$ операцій додавання. Щоб знайти максимум із L сум апостеріорної ймовірності потрібно зробити $L - 1$ порівняння, для всього блоку вимірів потрібно виконати $T \cdot (L - 1)$ порівнянь.

Таким чином, «вперед-назад» алгоритм забезпечує кращі імовірнісні характеристики в порівнянні з «вперед» алгоритмом на два порядки, але потребує більших арифметичних затрат. Для реалізації «вперед-назад» алгоритму потрібно: $T(2ML + M - L)$ операцій додавання; $4TML$ операцій множення; $2Mz(T + L)$ біт пам'яті; $T(L - 1)$ порівнянь.

Література

1. Berrou C., Glavieux A, Thitimajshima P., "Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo-Codes", Proceedings of ICC'93, Geneva, Switzerland, pp. 1064-1070, May, 1993.
2. Скляр Б.. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2-е, испр. : Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104с.
3. Moon Todd K. Error correction coding: mathematical methods and algorithms. 2005 by John Wiley & Sons. ISBN 0-471-64800-0.
4. Hansson A., Chugg K, Tor Aulin "On forward-adaptive versus forward/backward-adaptive SISO algorithm for Rayleigh fading channels", IEEE Com. Letters, v.5, No 12, 2001

Шпилька О.О., Юрков Ю.О., Жук С.Я. Порівняльний аналіз ВСJR алгоритмів декодування згортальних кодів. Розглянуто ВСJR алгоритм декодування згортальних кодів по критерію максимуму апостеріорної ймовірності. Проведено порівняння імовірнісних характеристик цього алгоритму з його спрощеним варіантом. Наведено арифметичні затрати для реалізації алгоритму на мікропроцесорі ADSP BF-533.

Ключові слова: згортальне кодування, ВСJR алгоритм, апостеріорна ймовірність

Шпилька А.А., Юрков Ю.А., Жук С.Я. Сравнительный анализ ВСJR алгоритма декодирования сверточных кодов. Рассмотрен ВСJR алгоритм декодирования сверточных кодов по критерию максимума апостериорной вероятности. Проведен сравнительный анализ вероятностных характеристик этого алгоритма с его упрощенным вариантом. Приведена вычислительная сложность данного алгоритма при реализации на микропроцессоре ADSP BF-533.

Ключевые слова: сверточное кодирование, ВСJR алгоритм, апостериорная вероятность.

Shpylka O.O., Jurkov I.O., Zhuk S.Ya. Comparative analysis of BCJR decoding algorithm of convolutional codes. It is considered BCJR algorithm of convolutional codes by criterion of a maximum posterior probability. Analysis of probabilistic characteristics of this algorithm with its simplified variant is carried out. The computational complexity of the given algorithm for realization on microprocessor ADSP BF-533 is shown.

Keywords: convolution coding, BCJR algorithm, a maximum of posterior probability.