Мельник А.Д., Рыбин А.И.	Melnyk A.D., Rybin O.I.
Нормализация тестового сигнала с сохранением эквидистантного шага дискретизации Предложен новый метод нормализации – по мгновенным значениям, "по уровню" тестового сигнала, для которого шаг дискретизации эквидистантный, что преодолевает неудобства нормализации "по шагу".	**Normalization of a test signal with preservation of an equal discrete step.** New method of normalization was proposed. This method applies normalization of signal using current values of the signal. The step of discrete of the processed signal is equal.

УДК 621.372.061

АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ В ОБЛАСТІ УЗАГАЛЬНЕНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

Ткачук А.П.

Розглянуто можливість аналізу лінійних систем в області узагальненого перетворення, яке є класом перетворень, що починається з дискретного перетворення Адамара і закінчується дискретним перетворенням Фур'є.

Вступ

В роботах [1-8] запропоновано алгоритми аналізу дискретних систем в базисі перетворення Уолша-Адамара, яке, як відомо [9], є частиною класу узагальненого перетворення (УП), що включає найбільш поширене дискретне перетворення Фур'є з z-перетворенням в теорії аналізу дискретних систем. Тому виникає потреба розробки методу аналізу, що забезпечив би єдність математичного апарату та понять для всього класу УП.

Постановка задачі

Відомо [9], що для дискретної послідовності $\{X(m)\}$ можна визначити множину з $\log_2(N)$ ортогональних перетворень. Цей клас перетворень починається з перетворення Адамара й закінчується дискретним перетворенням Фур'є. УП визначається як $\overline{X}_\xi = \overline{\overline{G}}_r \cdot \overline{X}_t$, де $\overline{\overline{G}}_r$ – матриця (дискретний оператор) УП; N – порядок квадратної матриці $\overline{\overline{G}}_r$; $\overline{X}_t$ – вектор-стовпець дискретних відліків сигналу в часовій області розміру $N \times 1$; $\overline{X}_\xi$ – вектор-стовпець амплітуд спектра УП розміру $N \times 1$.

Матричний оператор УП можна записати як добуток розріджених матриць $\overline{\overline{G}}_r = \prod_{z=1}^{n} \overline{\overline{D}}_r^z(n)$, де $\overline{\overline{D}}_r^z(q) = diag\left(\overline{\overline{R}}_0^r(z), \overline{\overline{R}}_1^r(z), ..., \overline{\overline{R}}_{2^{n-z}-1}^r(z)\right)$. Причому

$$\overline{\overline{R}}_q^r(z) = \overline{\overline{R}}_q^r(1) \otimes \overline{\overline{E}}(z-1); \qquad \overline{\overline{R}}_q^r(1) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{W}^{<<q>>} \\ 1 & -\mathrm{W}^{<<q>>} \end{bmatrix}, q = 0,1,...,2^r - 1; \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; q = 2^r, 2^r + 1, ..., 2^{n-z} - 1; \end{cases}$$

де $\otimes$ – знак Кронекерова множення матриць; $\overline{\overline{E}}(m)$ – одинична матриця формату $2^m \times 2^m$; $<< q >>$ – число, що одержуємо в результаті двійкової інверсії $(n-1)$-розрядного двійкового представлення q (якщо

$q = 2^{n-2} q_{n-2} + 2^{n-3} q_{n-3} + ... + 2^1 q_1 + 2^0 q_0$ є $(n-1)$-розрядне двійкове представлення *m*, то $<< q >> = 2^{n-2} q_0 + 2^{n-3} q_1 + ... + 2^1 q_{n-3} + 2^0 q_{n-2}$).

В області трансформант дискретного УП диференціальні рівняння рівноваги систем приймають вигляд

$$\left(\sum_m a_m \overline{\overline{A_\xi}}^{m} \right) \overline{Y}_\xi = \left(\sum_n b_n \overline{\overline{A_\xi}}^{n} \right) \overline{X}_\xi , \tag{1}$$

де $\overline{X}_\xi$, $\overline{Y}_\xi$ – стовпці трансформант дії та реакції відповідно розміру $N \times 1$;

$\overline{\overline{A_\xi}} = \overline{\overline{G_r}} \Delta \overline{\overline{G_r}}^*$ – дискретний оператор диференціювання в області трансформант; Δ – різницевий оператор. Матриця $\overline{\overline{A_\xi}}$ залежить від параметра *r*, що визначає конкретне ортогональне перетворення із класу УП. Індекс *r* в подальшому опускатимемо. Матриці $\overline{\overline{A_\xi}}$ мають блочно-діагональну структуру

$$\overline{\overline{A_\xi}} = diag\left(\overline{\overline{B}}_0, \overline{\overline{B}}_1, ..., \overline{\overline{B}}_i, ..., \overline{\overline{B}}_{I-1} \right), \tag{2}$$

де $\overline{\overline{B}}_i$ – *i*-й блок; *I* – кількість блоків діагоналі, $I = 2^{r+1} + 2^r \log_2\left(\frac{N}{2^{r+1}}\right)$. Представимо $\overline{\overline{A_\xi}}$ поблочним ортогональним розкладом на власні вектори й власні числа

$$\overline{\overline{A_\xi}} = \overline{\overline{\Pi}}\,\overline{\overline{\Lambda}}\,\overline{\overline{\Pi}}^* , \tag{3}$$

де $\overline{\overline{\Lambda}}$ – діагональна матриця власних значень; $\overline{\overline{\Pi}}$ – матриця власних векторів; * – знак транспонування й комплексного спряження. Тоді (1) матиме вигляд $\overline{\overline{\Pi}}\left(\sum_m a_m \overline{\overline{\Lambda}}^{m} \right) \overline{\overline{\Pi}}^* \overline{Y}_\xi = \overline{\overline{\Pi}}\left(\sum_n b_n \overline{\overline{\Lambda}}^{n} \right) \cdot \overline{\overline{\Pi}}^* \overline{X}_\xi$. З (2) та (3) випливає, що матриця власних векторів $\overline{\overline{\Pi}}$ буде мати блочно-діагональний вигляд відповідно операторові $\overline{\overline{A_\xi}}$. при цьому можна записати

$$\overline{\overline{B}}_i = \overline{\overline{\Pi}}_i \cdot \overline{\overline{\Lambda}}_i \cdot \overline{\overline{\Pi}}_i^* , \tag{4}$$

де $\overline{\overline{\Lambda}}_i$, $\overline{\overline{\Pi}}_i$ – *i*-ті блоки діагоналі матриць $\overline{\overline{\Lambda}}$ і $\overline{\overline{\Pi}}$, відповідно. Тобто має сенс шукати власні значення й власні вектора для кожного блоку окремо.

Дискретний оператор $\overline{\overline{\mathrm{A}_\xi}}$ можна представити квадратними підматрицями $\overline{\overline{A_\xi}}(m)$, де *m*=0,1*,...,n*, у вигляді

$$\overline{\overline{A}}_{\xi_r} = diag\left(\overline{\overline{A}}_{\xi_r}(0), ..., \overline{\overline{A}}_{\xi_r}(m), ..., \overline{\overline{A}}_{\xi_r}(n) \right), \tag{5}$$

Розмір $\overline{\overline{A_\xi}}(m)$ дорівнює $2^{m-1} \times 2^{m-1}$ при *m*=1*,..,n* і 1×1 при m=0.

Кожна підматриця $\overline{\overline{A_\xi}}(m)$ містить у собі множину блоків $\{\overline{\overline{B}}_i\}_m$

$$\overline{\overline{A_\xi}}(m) = diag\left(\overline{\overline{B}}_{p_m}, ..., \overline{\overline{B}}_{p_m+q}, ..., \overline{\overline{B}}_{p_m+Q_m-1} \right), \ q = 0,1,...,Q_m - 1 \tag{6}$$

при $m < r+2$: $Q_m = 2^{m-1}$, $p_m = 2^m - 1$, при $m \geq r+2$: $Q_m = 2^r$, $p_m = 2^{r+1}(m-r-2) + 2^{r+1}$.

Нехай $\{\lambda_m(k)\}$, $\{\bar{\pi}_m(k)\}$ – множини власних значень і власних векторів відповідно блоків $\{\bar{\bar{B}}_i\}_m$, що входять у підматрицю $\bar{\bar{A}}_{\xi_r}(m)$. Елементи множин $\{\lambda_m(k)\}$ й $\{\bar{\pi}_m(k)\}$ позначимо як $\lambda_m(k)$ й $\bar{\pi}_m(k)$. Таке представлення $\bar{\bar{\Pi}}$ й $\bar{\bar{\Lambda}}$ має сенс з точки зору структурної простоти алгоритму.

Власні значення нульового й першого блоків $\bar{\bar{B}}_0$ й $\bar{\bar{B}}_1$, яким відповідають множини $\{\lambda_0(k)\}$ й $\{\lambda_1(k)\}$,

$$\bar{\bar{\Lambda}}_0 = [0];\ \bar{\bar{\Lambda}}_1 = [2]. \tag{7а}$$

Або $\{\lambda_0(k)\}$ =$\{0\}$ й $\{\lambda_1(k)\}$ =$\{2\}$. Будь-який k-й елемент m-ї множини власних значень $\{\lambda_m(k)\}$, $m = 2,...,\log_2(N)$, можна знайти за формулою

$$\lambda_m(k) = 2\cos(\varphi_m(k))\exp(j\varphi_m(k)), \tag{7б}$$

де $\lambda_m(k)$ – k-й елемент m-ї множини власних значень $\{\lambda_m(k)\}$;
$\varphi_m(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2\cdot <<k>> + 1}{2^{m-1}}\right)$; $<<k>>$ – число, що одержуємо в результаті двійкової інверсії $(m-1)$-розрядного двійкового представлення k; $k = 0,1,...,2^{m-1}-1$; $j = \sqrt{-1}$. Взагалі, для будь-якого ортогонального перетворення $\bar{\bar{G}}_r$ перші 2^{r+1} блоки $\bar{\bar{\Pi}}_i$ будуть мати вигляд

$$\bar{\bar{\Pi}}_i = [1], \tag{8а}$$

де $i = 0,1,...,2^{r+1}-1$. Або, що те ж саме, $\{\bar{\pi}_0(k)\}$=$\{[1]\}$, $\{\bar{\pi}_1(k)\}$=$\{[1]\}$, …, $\{\bar{\pi}_m(k)\}$=$\{[1],…,[1]\}$, де $m < r+2$, а $k = 2^{m-1}-1$.

Будь-який k-й вектор m-ї множини $\{\bar{\pi}_m(k)\}$, $m = r+2,...,\log_2(N)$, можна знайти за алгоритмом

$$\bar{\pi}_{m+1}(k) = \begin{cases} \bar{\pi}_m\left(\frac{k}{2}\right) \otimes \begin{bmatrix} j\cdot\sin(\varphi_{m+1}(k)) \\ \cos(\varphi_{m+1}(k)) \end{bmatrix}, & k = 0,2,...,2^m; \\ \bar{\pi}_m\left(\frac{k-1}{2}\right) \otimes \begin{bmatrix} j\cdot\sin(\varphi_{m+1}(k)) \\ \cos(\varphi_{m+1}(k)) \end{bmatrix}, & k = 1,3,...,2^m-1; \end{cases} \tag{8б}$$

де $\bar{\pi}_m(k)$ – k-й вектор m-ї множини $\{\bar{\pi}_m(k)\}$; $\varphi_m(k)$ – число, що відповідає значенню аргументу відповідного k-го комплексного власного значення m-ї множини $\{\lambda_m(k)\}$.

Алгоритм формування матриць $\bar{\bar{\Lambda}}$ і $\bar{\bar{\Pi}}$

Матриці власних векторів і власних чисел на підставі (2) – (8) формуються як $\bar{\bar{\Lambda}} = diag\left(\bar{\bar{\Lambda}}_0, \bar{\bar{\Lambda}}_1, ..., \bar{\bar{\Lambda}}_i, ..., \bar{\bar{\Lambda}}_{I-1}\right)$, $\bar{\bar{\Pi}} = diag\left(\bar{\bar{\Pi}}_0, \bar{\bar{\Pi}}_1, ..., \bar{\bar{\Pi}}_i, ..., \bar{\bar{\Pi}}_{I-1}\right)$, де $N_m = 2^{m-1}$, $q = 0,1,..,\frac{N_m}{2^r}-1$, $h_i = i - 2^r\,\mathrm{int}\left(\frac{i-2^{r+1}}{2^r}\right) - 2^{r+1}$, $m = \mathrm{int}\left(\frac{i-2^{r+1}+1}{2^r}\right) + r + 2$, і

$$\overline{\overline{\Lambda}}_i = \begin{cases} \left[\lambda_0(0)\right],\ i=0; \\ \left[\lambda_m(k)\right],\ i=1,\dots,2^{r+1}\text{-}1,\ m=\operatorname{int}\left(\log_2(i)\right)+1,\ k=i-2^{m\text{-}1}; \\ \operatorname{diag}\left(\lambda_m(h_i),\dots,\lambda_m(h_i+q),\dots,\lambda_m\left(h_i+N_m/2^r-1\right)\right),\ i\ge 2^{r+1}; \end{cases}$$

$$\overline{\overline{\Pi}}_i = \begin{cases} \left[1\right],\ i=0; \\ \left[\overline{\pi}_m(k)\right],\ i=1,\dots,2^{r+1}\text{-}1,\ m=\operatorname{int}\left(\log_2(i)\right)+1,\ k=i-2^{m\text{-}1}; \\ \left[\overline{\pi}_m(h_i),\dots,\overline{\pi}_m(h_i+q),\dots,\overline{\pi}_m\left(h_i+N_m/2^r-1\right)\right],\ i\ge 2^{r+1}. \end{cases}$$

Висновки

Показана можливість аналізу лінійних систем на підставі ортогональної декомпозиції дискретного матричного оператора диференціювання в області трансформант узагальненого перетворення. Запропонований вигляд власних векторів є оптимальним в сенсі необхідної кількості обчислювальних операцій тому, що компоненти всіх векторів є дійсними або уявними величинами. Метод дає можливість аналізувати системи, що описуються лінійними диференційними рівняннями, в області трансформант дискретних ортогональних перетворень Уолша-Адамара, Фур'є т.ін., що належать до класу узагальненого перетворення, забезпечуючи єдність понять та математичного апарату.

Література

1. Рыбин А.И., Пилинский В.В., Родионова М.В. Анализ электрических цепей в натуральных координатах на базе ортогональных преобразований с действительным ядром.// Праці Ін-ту електродинаміки НАНУ: Зб.наук.праць. 2004. №1(7). С. 7-12.
2. Рыбин А.И., Шарпан О.Б. Диагностика пульсограмм на базе ортогональных преобразований с действительным ядром.//Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2004. – №1. – С.186-141.
3. Рыбин А.И. Анализ линейных цепей в базисе преобразования Уолша.// Радиоэлектроника. – 2004. – №5. – С. 36-41.
4. Рыбин А.И. Метод модификаций для анализа линейных цепей в базисе функций Уолша.// Радиоэлектроника. – 2004. – №6. – С. 36-41.
5. Рыбин А.И., Григоренко Е.Г., Родионова М.В. Алгоритм анализа электрических цепей в базисе ортогональных преобразований с действительным ядром в области трансформант//Праці Ін-у електродинаміки НАНУ:Зб.наук.праць. 2004. №3. С. 10-14.
6. Рибін О.І., Ткачук А.П. Аналіз лінійних систем в області трансформант перетворення Уолша-Адамара.// Вісник НТУУ “КПІ”. – 2006. – Вип. 33. – С. 14-23.
7. Рибін О.І., Ткачук А.П. Аналіз лінійних систем в області трансформант кратного перетворення EIWAL.// Вісник НТУУ “КПІ”. – 2006. – Вип. 33. – С. 31-38.
8. Рыбин А.И., Ткачук А.П. Анализ линейных систем в области трансформант и собственных частот преобразования RTF.//Радиоэлектроника.–2006.–№11.–С. 56-63.
9. Ахмед Н., Рао К. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов: Пер. с англ./Под. Ред. И. Б. Фоменко. – М.: Связь,1980. – 248 с., ил.

Ткачук А.П. **Анализ линейных систем в области обобщенного преобразования.** Предложено алгоритм анализа линейных систем в области трансформант обобщенного преобразования, являющееся класом преобразований, который начинается с преобразования Уолша-Адамара и заканчивается преобразованием Фурье	Tkachyk A. **The analysis of linear systems in basis of Generalized Transformation.** The algorithm for analysis of liner systems in basis, which is the class of transformation, which includes Walsh-Hadamard transformation and Discrete Fourier Transform is suggested