

**СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ШАРА
ПОКРЫТОГО КВАЗИОДНОМЕРНЫМ
ФОТОННЫМ КРИСТАЛЛОМ**

Трубин А.А., д. т. н., профессор

*Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут", г. Київ, Україна*

Вступление

Задача повышения добротности диэлектрических резонаторов (ДР), выполняемых из материалов, характеризующихся невысокой относительной диэлектрической проницаемостью, в миллиметровом и инфракрасном диапазонах длин волн, является в настоящее время одной из наиболее актуальных. Одним из очевидных путей ее практического решения, может стать покрытие поверхности резонатора так называемым фотонным кристаллом.

Термином "фотонный кристалл" сегодня принято обозначать среду, у которой диэлектрическая проницаемость периодически меняется в пространстве с периодом, допускающим так называемую брэгговскую дифракцию [1, 2]. Наиболее характерным свойством фотонных кристаллов является наличие запрещенных зон в частотном спектре собственных волн. На частотах, попадающих в одну из запрещенных зон, электромагнитные волны не могут распространяться в объеме фотонного кристалла.

Указанное свойство появления запрещенных зон у фотонных кристаллов можно использовать для увеличения добротности ДР, покрывая их поверхность подобными периодическими структурами. В этом случае возникает задача определения физических условий, при выполнении которых, добротность резонатора может быть увеличена. Для данного класса устройств, многослойная диэлектрическая структура, реализующая сферический фотонный кристалл, являются наиболее удобным объектом теоретических исследований, поскольку точное решение уравнений Максвелла, необходимое для изучения ее собственных колебаний может быть получено сравнительно просто [3, 4].

В настоящей работе рассматривается задача собственных колебаний многослойного сферического ДР, представляющего собой диэлектрический шар, покрытый "периодической" сферической решеткой, состоящей из конечного числа различных диэлектрических слоев, реализующих фотонный кристалл. Построена общая вычислительная процедура получения точного решения уравнений Максвелла, пригодная для сколь угодно большого числа различных слоев диэлектрика. Показано, что в частных случаях однородного и двухслойного сферического ДР, получаемые харак-

теристические уравнения переходят найденные ранее [5].

Постановка задачи

Целью работы является исследование собственных колебаний диэлектрического шара, поверхность которого покрыта слоистой конечно периодической диэлектрической структурой, реализующих фотонный кристалл. Определение условий увеличения добротности составного ДР в случаях, когда значения проницаемости каждого слоя не превышают величину, характерную для современных материалов, применяемых в миллиметровом и инфракрасном диапазонах длин волн.

Геометрия структуры

Рассмотрим многослойную структуру, представляющую собой однородный диэлектрический шар, состоящий из диэлектрика относительной проницаемости ϵ_1 , покрытый в общем случае конечным числом $N-1$ однородных сферических слоев диэлектриков проницаемостью $\epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_{N-1}$ (Рис. 1). Обозначим через r_1 радиус шара, а внешние радиусы последующих слоев через r_2, r_3, \dots, r_N , соответственно.

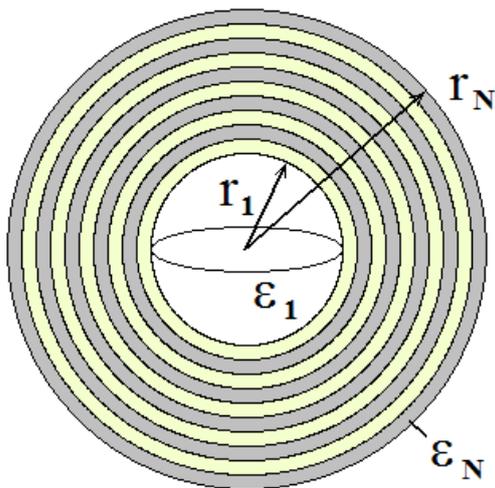


Рис. 1.

Диэлектрический шар, покрытый конечно - периодической структурой чередующихся слоев, состоящих из различных диэлектриков

Будем полагать, что составной резонатор располагается в открытом пространстве.

Расчет собственных колебаний

Общее решение уравнений Максвелла для поля собственных колебаний в сферической системе координат известно [3, 4, 6]. Радиальная зависимость потенциальной функции в области $r < r_1$ определяется функцией $j_n(k_1 r)$. Предположим формально, что в области шара значения постоянных коэффициентов равны: $e_1 = 1$, $f_1 = 0$, а в v -м слое радиальная зависимость потенциальных функций имеет вид: $u_v(r) = e_v j_n(k_v r) + f_v y_n(k_v r)$ ($v = 2, 3, \dots, N+1$). $N+1$ слоем мы будем обозначать внешнее пространство структуры. Здесь $j_n(z)$, $y_n(z)$ -- сферические функции Бесселя, Неймана

[7], соответственно, а $k_v = k_0 \sqrt{\varepsilon_v}$, $k_0 = \omega/c$ - волновые числа, ε_v - относительная диэлектрическая проницаемость v -го слоя, ω - круговая частота, c - скорость света в вакууме.

В результате сшивания касательных компонент магнитного и электрического поля на границах раздела сред (рис. 1), а также после проведения сравнительно простых аналитических преобразований полученных выражений, нами были найдены следующие двучленные рекуррентные соотношения, удобные для вычисления постоянных e_v , f_v :

В случае магнитных колебаний H_{nml}

$$\begin{aligned} e_{v+1} &= s_{v+1} \cdot \{e_v \cdot [p_v j_{n+1}(p_v) y_n(s_{v+1}) - s_{v+1} j_n(p_v) y_{n+1}(s_{v+1})] + f_v \cdot \\ &\quad [p_v y_{n+1}(p_v) y_n(s_{v+1}) - s_{v+1} y_n(p_v) y_{n+1}(s_{v+1})]\}; \quad (1) \\ f_{v+1} &= s_{v+1} \cdot \{e_v \cdot [s_{v+1} j_n(p_v) j_{n+1}(s_{v+1}) - p_v j_n(s_{v+1}) j_{n+1}(p_v)] + f_v \cdot \\ &\quad [s_{v+1} j_{n+1}(s_{v+1}) y_n(p_v) - p_v j_n(s_{v+1}) y_{n+1}(p_v)]\}. \end{aligned}$$

В случае электрических колебаний E_{nml}

$$\begin{aligned} e_{v+1} &= s_{v+1}/\varepsilon_{v+1} \cdot \{e_v \cdot [\varepsilon_v j_n(p_v) \frac{d}{ds_{v+1}} \{s_{v+1} y_n(s_{v+1})\} - \varepsilon_{v+1} y_n(s_{v+1}) \frac{d}{dp_v} \{p_v j_n(p_v)\}] + \\ &\quad + f_v \cdot [\varepsilon_v y_n(p_v) \frac{d}{ds_{v+1}} \{s_{v+1} y_n(s_{v+1})\} - \varepsilon_{v+1} y_n(s_{v+1}) \frac{d}{dp_v} \{p_v y_n(p_v)\}]\}; \quad (2) \\ f_{v+1} &= s_{v+1}/\varepsilon_{v+1} \cdot \{e_v \cdot [\varepsilon_{v+1} j_n(s_{v+1}) \frac{d}{dp_v} \{p_v j_n(p_v)\} - \\ &\quad \varepsilon_v j_n(p_v) \frac{d}{ds_{v+1}} \{s_{v+1} j_n(s_{v+1})\}] + \\ &\quad + f_v \cdot [\varepsilon_{v+1} j_n(s_{v+1}) \frac{d}{dp_v} \{p_v y_n(p_v)\} - \varepsilon_v y_n(p_v) \frac{d}{ds_{v+1}} \{s_{v+1} j_n(s_{v+1})\}]\}. \end{aligned}$$

где $s_v = k_v r_{v-1}$ и $p_v = k_v r_v$ - безразмерные характеристические параметры структуры. В частных случаях $v=1, N+1$, соответствующих объемам шара и открытого пространства, формально будем считать значения параметров: $s_1 = 0$ и $p_{N+1} = \infty$.

При таком подходе, характеристическим уравнением, определяющим зависимость частотных параметров от размеров сферической многослойной структуры, будет простое соотношение, вытекающее из общего выражения потенциальной функции Ханкеля второго рода $h_n^{(2)}(z)$ через сферические функции Бесселя и Неймана [7] в открытом пространстве в области $r > r_N$:

$$ie_{N+1} + f_{N+1} = 0. \quad (3)$$

Здесь функции Ханкеля второго рода, описывающие внешнее поле структуры, появляются согласно принятой нами общей зависимости от времени решений системы уравнений Максвелла, пропорциональной

$\exp(i\alpha r)$.

Если внешняя оболочка шара, при $r = r_N$, покрыта металлическим экраном сферической формы, тогда характеристическое уравнение в общем случае принимает вид:

в случае магнитных колебаний H_{nml}

$$e_N j_n(p_N) + f_N y_n(p_N) = 0; \quad (4)$$

в случае электрических колебаний E_{nml}

$$e_N \frac{d}{dp_N} \{p_N j_n(p_N)\} + f_N \frac{d}{dp_N} \{p_N y_n(p_N)\} = 0 \quad (5)$$

Нетрудно убедиться, что найденные решения в известных простых частных случаях полностью совпадают с полученными ранее [3 – 6]. Например:

1) В случае однородного диэлектрического шара ($N = 1$), обозначив через $p_1 = p$; $s_2 = q$ и используя (1), (2), получим:

для магнитных колебаний H_{nml}

$$e_2 = q \cdot [p j_{n+1}(p) y_n(q) - q j_n(p) y_{n+1}(q)]; \quad f_2 = q \cdot [q j_n(p) j_{n+1}(q) - p j_n(q) j_{n+1}(p)].$$

для электрических колебаний E_{nml}

$$e_2 = q / \varepsilon_0 \cdot [\varepsilon_1 j_n(p) \frac{d}{dq} \{q y_n(q)\} - \varepsilon_0 y_n(q) \frac{d}{dp} \{p j_n(p)\}];$$

$$f_2 = q / \varepsilon_0 \cdot [\varepsilon_0 j_n(q) \frac{d}{dp} \{p j_n(p)\} - \varepsilon_1 j_n(p) \frac{d}{dq} \{q j_n(q)\}]$$

Здесь $p = p_1 = k_1 r_1$; $q = s_2 = k_0 r_1$. Подставив найденные выше выражения коэффициентов e_2 , f_2 в (3), найдем характеристические уравнения, определяющие параметры собственных колебаний однородного диэлектрического шара в открытом пространстве:

для магнитных колебаний H_{nml} : $p j_{n+1}(p) h_n^{(2)}(q) - q j_n(p) h_{n+1}^{(2)}(q) = 0$;

для электрических колебаний E_{nml} : $\varepsilon_0 h_n^{(2)}(q) \frac{d}{dp} \{p j_n(p)\} - \varepsilon_1 j_n(p) \frac{d}{dq} \{q h_n^{(2)}(q)\} = 0$,

фактически совпадающие, например, с [6].

В принятой нами классификации собственных колебаний предполагается также, что последний индекс l обозначает номер корня соответствующего характеристического уравнения. Физически, значение индекса l соответствует числу полуволн, возникающих в радиальном направлении объема структуры.

2) В частном случае двухслойного диэлектрического шара ($N = 2$), обозначив через $p_1 = p$; $p_2 = t$; $p_3 = \infty$; $s_1 = 0$; $s_2 = s$; $s_3 = q$ и используя соотношения (1 - 3), также легко получаем характеристические уравнения, фактически совпадающие с найденными в работе [5].

Как и для открытого резонатора, в частных случаях ($N = 2$) однородного диэлектрического шара, расположенного в сферической металлической

полости, решение уравнений (4), (5), найденное совместно с (1), (2) также приводит к известным характеристическим уравнениям, приведенным, например, в [6]. В общем случае многослойного диэлектрического шара в открытом пространстве, вычисление характеристических параметров следует проводить путем численного решения уравнения (3) с учетом соотношений (1 – 2).

**Расчет характеристических параметров диэлектрического шара,
покрытого слоистым фотонным кристаллом**

Предположим, что диэлектрическая проницаемость всех четных, а также всех нечетных слоев, одинакова (рис. 1). Обозначим диэлектрическую проницаемость каждого четного (нечетного) слоя через ε_2 (ε_3), соответственно. Кроме того, будем считать, что относительные размеры как четных, так и нечетных слоев структуры, равны между собой. Известно, что если толщина каждого такого слоя сравнима с длиной волны, то многослойная диэлектрическая структура образует квази одномерный фотонный кристалл [2]. В нашем случае, указанный фотонный кристалл экранирует поверхность диэлектрического шара, поэтому можно предположить, что в области частот запрещенной зоны добротность собственных колебаний его будет повышаться.

Численные исследования характеристических уравнений (3) проводились для типичных диэлектриков миллиметрового и инфракрасного диапазонов длин волн: $1 < \varepsilon_s < 16$. При этом, относительная диэлектрическая проницаемость материала шара принималась равной $\varepsilon_1 = 2$, или 1 – в случае полости, реализуемой в объеме фотонного кристалла. Диэлектрическая проницаемость каждого четного слоя принималась равной $\varepsilon_{2j} = 2$; каждого нечетного слоя $\varepsilon_{2j+1} = 9$, ($j = 1, 2, \dots$). На начальном этапе вычислений диссипативные потери энергии в диэлектрике предполагались равными нулю. Решение уравнений (1 – 3) находилось в комплексной форме относительно безразмерного параметра $t = p_N = k_N r_N$ (рис. 1). Добротность резонатора рассчитывалась по формуле: $Q = \text{Re}(t) / 2\text{Im}(t)$. В частном случае магнитных колебаний вида H_{1m2} , решение характеристических уравнений для шара с проницаемостью $\varepsilon_1 = 2$, экранированного 6-ю слоями диэлектрика, показано на рис. 2а. Как следует из приведенных данных, несмотря на присутствие в структуре, достаточно большого числа слоев диэлектрика, для небольших значений радиального индекса l , максимально достижимое значение добротности, получаемое при вариации относительных размеров шара к размеру экранирующей структуры, невелико (рис. 2б).

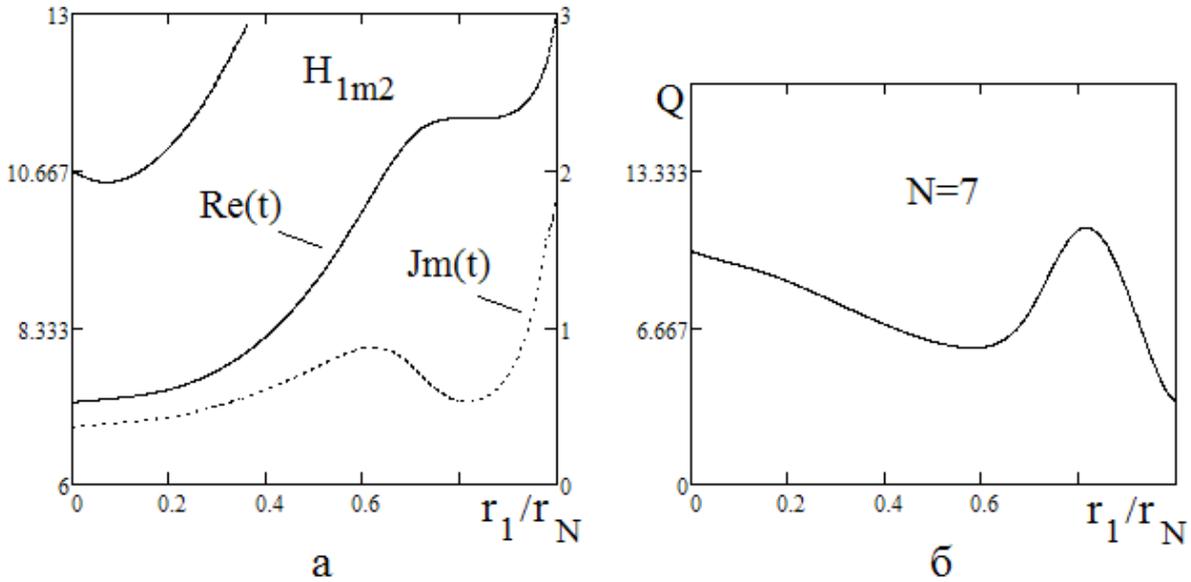


Рис. 2. Решение характеристического уравнения для одного из низших корней колебаний магнитного типа H_{1m2} ($\varepsilon_1 = 2; \varepsilon_{2j} = 2; \varepsilon_{2j+1} = 9$).

Кроме того, было установлено, что при фиксированных, но небольших значениях номера корня l и меридионального индекса n , увеличение общего числа периодов решетки также не приводит к заметному увеличению добротности.

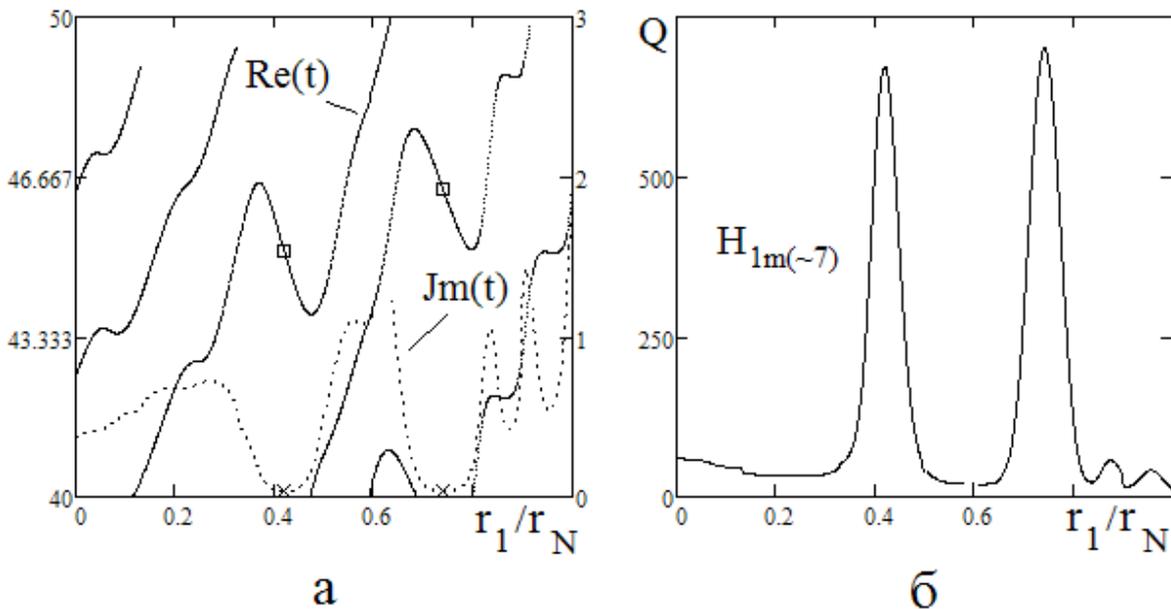


Рис. 3. а - решение характеристического уравнения (4) для больших значений радиального корня $l \approx 7$. б - зависимость собственной добротности от величины относительного размера шара для колебаний магнитных типов ($\varepsilon_1 = 1; \varepsilon_{2j} = 2; \varepsilon_{2j+1} = 9$).

Существенное уменьшение излучения наблюдалось только для магнит-

ных и электрических видов колебаний с радиальными индексами $l \approx N \gg 1$ (для незначительных n такие колебания известны в литературе как колебания типа «прыгающего мячика» [3]).

На рис. 3, а приведен пример вычисления характеристических параметров и добротности собственных колебаний магнитного типа $H_{1m(\approx 7)}$ в зависимости от величины относительного размера шара к внешнему размеру оболочки. Общее число слоев диэлектрика принималось равным 7. Действительные и мнимые значения характеристического параметра t , реализующего максимальную добротность, отмечены точками и крестиками.

Как следует из полученных данных, максимальное значение добротности в интервале изменения характеристических параметров, например в интервале $40 \leq \text{Re}(t) \leq 50$, наблюдается в точках $r_1/r_N \approx 0,42$ и $0,74$: $Q_{\max} = 672$; и 703 , соответственно. Видно, что указанные экстремальные значения добротности, соответствуют разным "ветвям" характеристических кривых, отвечающих разным значениям радиального корня.

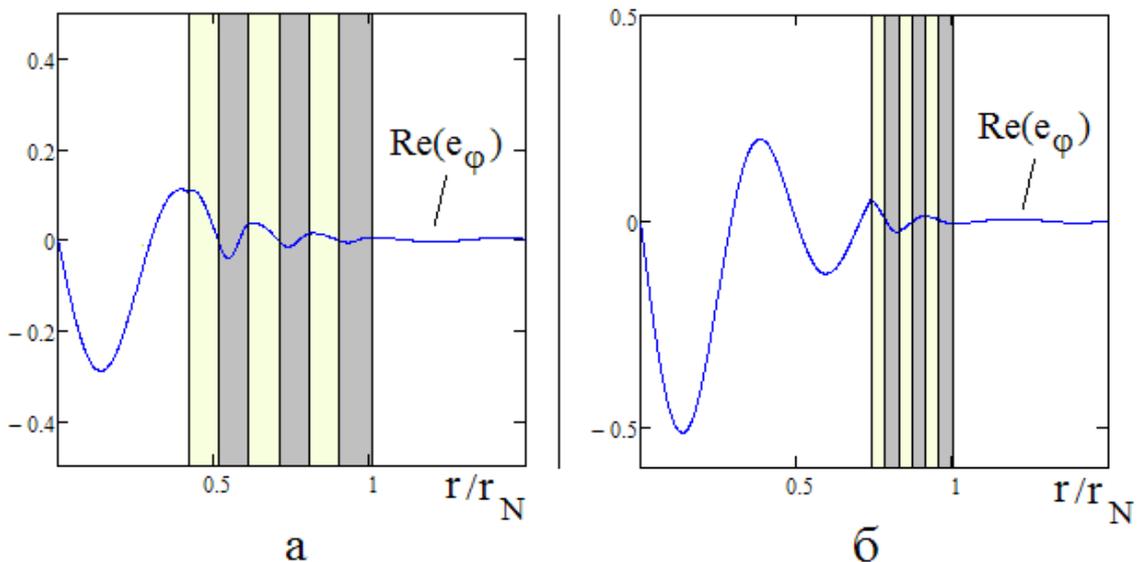


Рис. 4. Радиальное распределение электрического поля высокодобротных колебаний $H_{1m(\approx 7)}$ 7-слойного шара в точках максимальной добротности

Распределения действительной части электрического поля, рассчитанные в отмеченных выше точках максимальной добротности, показанные на рис. 4, а, б, демонстрирует заметно высокую степень «экранирования» поля ДР конечным фотонным кристаллом. (Для наглядности представления вертикальными линиями изображены границы раздела сред различных слоев решетки). Видно также, что поле все таки проникает в область решетки, впрочем достаточно быстро уменьшаясь с увеличением расстояния от ее поверхности. При этом увеличение относительных размеров шара при таком экранировании сопровождается характерным уменьшением значений действительной части соответствующих характеристических пара-

метров (см. рис. 3а). В этой области параметров вся структура в целом ведет себя как "закрытый" резонатор.

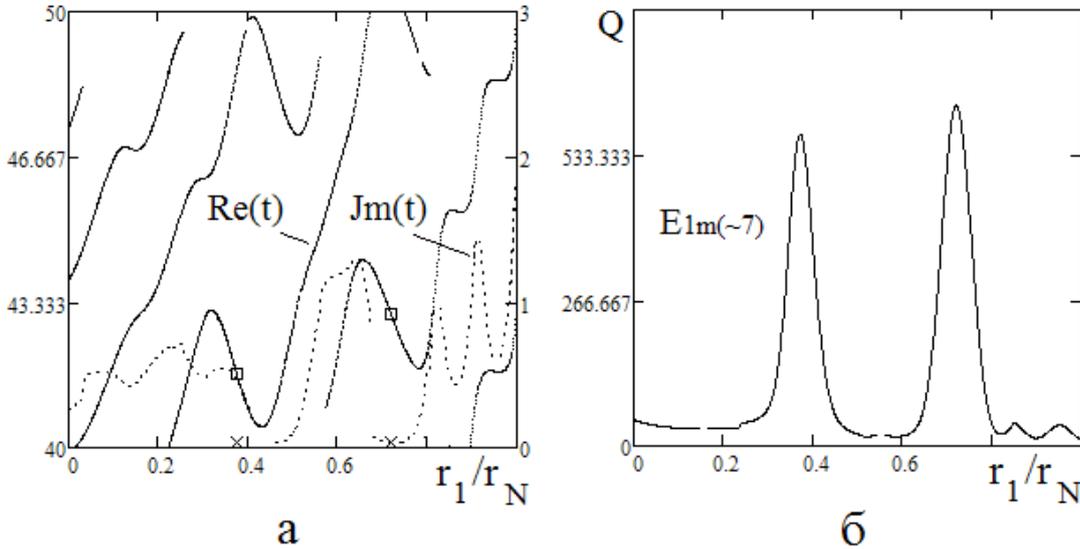


Рис. 5. а - решение характеристического уравнения (5) для больших значений радиального корня $l \approx 7$. б - зависимость собственной добротности от относительных размеров структуры в случае колебаний электрических типов $E_{1m(\approx 7)}$ ($\varepsilon_1 = 1; \varepsilon_{2j} = 2; \varepsilon_{2j+1} = 9$) 7-и слойного шара.

Похожая картина увеличения добротности, наблюдается и для колебаний электрических типов $E_{1m(\approx 7)}$ (рис. 5). Аналогичное распределение магнитного поля в точках экстремумов добротности показано на рис. 6.

Также было установлено, что добавление дополнительного числа периодов решетки, с учетом выполнения дополнительного условия $l \geq N$, ведет к дальнейшему увеличению экстремальных значений добротности шара. При этом, появляется практическая возможность и более значительного разрежения частотного спектра ДР по сравнению с колебаниями типа "шепчущей галереи" ($n \gg l$), поскольку колебания других типов, для которых условия возникновения запрещенной зоны не выполнены, в этом случае будут обладать существенно меньшей добротностью. Очевидно, что наиболее заметно подобный эффект разрежения должен проявляться для полости $\varepsilon_1 = 1$, реализованной в объеме фотонного кристалла.

Полученные выше комплексные решения уравнений (1 – 3), позволяют также оценить влияние потерь в диэлектрике на параметры добротных колебаний.

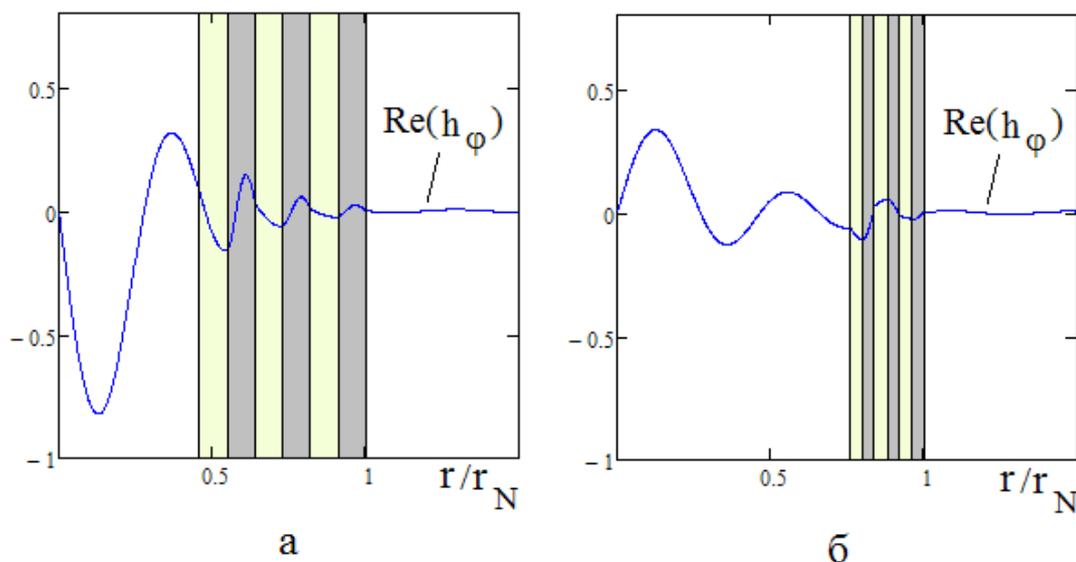


Рис. 6. Радиальное распределение магнитного поля наиболее добротных колебаний

$E_{1m(\approx 7)}$ 7-и слойной сферы

На рис. 7 показаны соответствующие зависимости, рассчитанные в одной из точек максимальной добротности магнитных колебаний, от величины относительных размеров полый сферической структуры для различных значений диссипативных потерь в материале фотонного кристалла. Видно, что в этом случае потери в диэлектрике не оказывают заметного влияния при условии, если $tg \delta \leq 10^{-5}$.

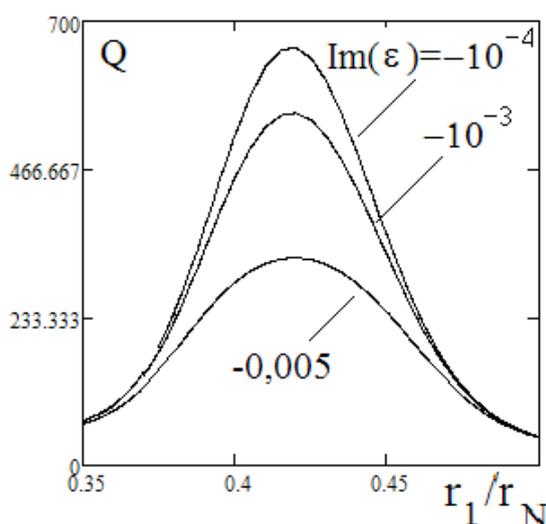


Рис. 7.

Влияние диэлектрических потерь оболочки на добротность магнитных колебаний $H_{1m(\approx 7)}$ 7-и слойной полый структуры ($\epsilon_1 = 1$; $Re(\epsilon_{2j}) = 2$; $Re(\epsilon_{2j+1}) = 9$; $Im(\epsilon_{2j}) = Im(\epsilon_{2j+1})$).

Как видно из приведенных данных, для реализации добротных резонаторов в миллиметровом и инфракрасном диапазонах необходимо использовать весьма качественные диэлектрические материалы, характеризующиеся

достаточно малыми значениями тангенсов диэлектрических потерь: $tg \delta \leq 10^{-4}$. Создание многослойных структур в указанных диапазонах длин волн сегодня уже не представляет значительных трудностей, поскольку может быть реализовано в рамках существующих известных технологий.

Выводы

В строгой постановке решена общая задача собственных колебаний многослойного диэлектрического шара в открытом пространстве. Найдены характеристические уравнения в форме рекуррентных соотношений. Проведен расчет характеристических параметров диэлектрического шара, покрытого 6-слойной квазипериодической диэлектрической структурой.

Проведены исследования собственных колебаний диэлектрического шара, покрытого фотонным кристаллом. Полученные данные позволяют утверждать, что формирование периодической решетки на поверхности ДР может приводить к весьма значительному увеличению его добротности для колебаний с большими значениями радиальных индексов, сравнимых по величине, или больших по значению, относительно количества слоев структуры, в случаях когда волновой вектор поля направлен приблизительно ортогонально поверхности решетки. При этом, можно утверждать, что для заданных значений характеристических параметров, добротность структуры увеличивается при условии, если длина волны в материале резонатора соответствует характерным размерам, определяющим области запирающей запрещенной зоны решетки. Поскольку указанное возрастание добротности имеет место в сравнительно узких полосах изменения относительных размеров, это также позволяет предположить, что собственные колебания подобных структур будут характеризоваться и более разреженным эффективным спектром собственных частот.

Рассмотренный вид многослойных структур в виде диэлектрического шара, покрытого фотонным кристаллом, в будущем может быть использован для стабилизации частот полупроводниковых твердотельных лазеров, в качестве элементов фильтров, мультиплексеров и демультиплексеров, а также других элементах устройств связи миллиметрового, инфракрасного и оптического диапазонов длин волн. Как известно, в перечисленных диапазонах геометрические размеры ДР не являются определяющими.

Литература

1. Yablonovitch E. Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics // Physical Review Letters, v. 58. № 20. 1987. – PP. 2059–2062.
2. Joannopoulos J.D., Johnson S.G., Winn J.N., Meade R.D. Photonic Crystals. Molding the Flow of Light. – Princeton. Princeton University Press, 2008. – 286 p.
3. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. – М. Сов. Радио, 1966. – 475 с.
4. Нефедов Е.И. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах – М. Наука, 1979. – 271 с.

5. Трубин А.А. Резонансные колебания открытых двухслойных сферических структур // Межвед. Тем. Сб. М.: Моск. энерг. ин-т. №48. 1984. С. 33—38.
6. Ильченко М.Е., Трубин А.А. Электродинамика диэлектрических резонаторов. – Киев.: Наукова думка, 2004. – 265 с.
7. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. – 830 с.

Трубин О.О. Власні коливання діелектричної кулі покритої квазіодновимірним фотонним кристалом. Приведено результати досліджень параметрів власних коливань діелектричної кулі, поверхня якої покрита багатошаровою скінчено-періодичною діелектричною решіткою сферичної форми, що реалізують одновимірний фотонний кристал. Досліджені структури, виконані з матеріалів малої відносної проникності. Установлені умови значного підвищення добротності для коливань електричних та магнітних типів. Відмічена можливість більш значного розрідження спектру спостережуваних частот.

Ключові слова: діелектричний резонатор, власні коливання, добротність, фотонний кристал, інфрачервоний діапазон довжин хвиль .

Трубин А.А. Собственные колебания диэлектрического шара покрытого квазиодномерным фотонным кристаллом. Приведены результаты исследования параметров собственных колебаний диэлектрического шара, поверхность которого покрыта многослойной конечно-периодической диэлектрической решеткой сферической формы, реализующей одномерный фотонный кристалл. Исследованы структуры, выполненные из материалов невысокой относительной диэлектрической проницаемости. Установлены условия значительного увеличения добротности для колебаний электрических и магнитных типов. Отмечена возможность более значительного разрежения спектра наблюдаемых частот.

Ключевые слова: диэлектрический резонатор, собственные колебания, добротность, фотонный кристалл, инфракрасный диапазон длин волн.

Trubin A.A. The resonances of dielectric sphere shielded by one dimensional photonic crystal. The problem of quality factor rising for low permittivity dielectric resonator (DR), most significant in millimeter and infrared wavelength ranges, has been solved. Maxwell equations for multi-layer dielectric structure realizing spherical DR screening by 1-D photonic crystal has been solved. Received data are allowing to assert that lattice forming on the DR surface can adduce to significant increasing of it Q-factor for resonances with large values of radial indexes. It's noting a possibility significant frequency spectrum depression in comparison to other resonance types.

Key words: dielectric resonator, modes, Q-factor, photonic crystal, infrared wavelength range.