

**АВТОМАТИЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ НА  
ГРАФАХ У КОНСТРУКТОРСЬКОМУ ПРОЕКТУВАННІ РЕА**

*Гліненко Л. К., к.т.н., доц., Фаст В. М., к.т.н., доц.,  
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна*

**AUTOMATIZATION OF SOLVING THE EXTREMAL PROBLEMS ON GRAPHS  
IN RADIOELECTRONIC APPARATUS DESIGN**

*Hlinenko Larysa, PhD, Associate Professor;  
Fast Volodymyr, PhD, Associate Professor,  
Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

**Вступ**

До задач на графах зводяться задачі оптимізації перевезень у логістиці, оптимізації переміщення маніпуляторів у робототехніці, обрання оптимального складу пакету тиражованих програм та конфігурації мережі у обчислювальній техніці та багато інших. За математичною постановкою ці задачі переважно зводяться до задачі пошуку мінімального шляху та мінімального покриття (мінімального остівного дерева) графа. Алгоритми розв'язання цих задач та їх програмна реалізація на різних мовах програмування детально описані у фаховій літературі [1], проте розповсюдженість таких задач висуває вимогу оперативного їх розв'язання за допомогою доступного і простого у використанні програмного забезпечення, що робить актуальним дослідження можливостей застосування для комп'ютерної підтримки їх розв'язання пакету MS Excel.

Можливості надбудови Solver (Пошук рішення) Microsoft Excel 7.0 – 2010 з підтримки розв'язання екстремальних задач на графах як комбінаторних задач дискретного програмування з мулевими змінними розглядаються у [2], проте запропонована модель, яка розв'язується за методом гілок і границь, суттєво ускладнюється з введенням кожної додаткової вершини чи дуги графа, а також є непридатною для неорієнтованих графів. Крім того, для реалізації моделі залучається вбудована функція СУММАЕСЛИ(), що суттєво збільшує час пошуку рішення. Очевидно також, що подібна модель обмежень непридатна для постановки задачі на мінімальне остівне дерево, а також вимагатиме повної перебудови моделі у випадку переходу до задачі на знаходження найкоротшого шляху між двома довільними вершинами неорієнтованого графа, до яких зводяться, зокрема, задачі проектування топології кабельних телемереж та маршрутизації пересилання повідомлень у мережах. Традиційно використовувані для розв'язання таких задач алгоритми Дейкстри, Крускала, Прима тощо [3] не

підтримуються MS Excel, що вимагає представлення цих задач моделями, прийнятними для MS Excel, тобто у вигляді задач лінійного чи нелінійного та дискретного програмування, зокрема, у вигляді транспортної задачі. У [4, с. 217] задачу на знаходження мінімального шляху на графі пропонується розв'язувати як транспортну задачу (Т-задачу) з проміжними пунктами з обсягом попиту і пропозиції у початковому і кінцевому пунктах розміром в 1; транзитні пункти мають обсяг попиту / пропозиції в розмірі обсягу буфера, який також дорівнює 1. Реалізація цього підходу у MS Excel для Т-задач з проміжними пунктами є некоректною, оскільки запропонована модель задачі не містить обмеження зв'язності графа, одним з різновидів якого є обмеження балансу потоків через всі транзитні пункти. Проте встановлення такого обмеження на кожний вузол окремо на основі ідентифікації всіх вхідних і вихідних дуг, як це пропонується у [2], суттєво ускладнює відтворення моделі задачі на аркуші Excel і реально може бути реалізоване лише для мереж простої структури з малою кількістю проміжних пунктів.

### **Постановка задачі**

Метою даної роботи є дослідження ефективних способів розв'язання екстремальних задач на графах у MS Excel Solver на основі застосування відповідних аналітичних представлень графа.

### **Моделювання екстремальних задач на графах як транзитних транспортних задач**

Т-задачею у її класичному розумінні називають задачу на визначення обсягів перевезень із  $m$  пунктів відправлення в  $n$  пунктів призначення за мінімальної сумарної вартості перевезень. Як умова задачі задається набір коефіцієнтів  $c_{ij}$ , що визначає вартість доставки продукції із пункту  $i$  в пункт  $j$ , ресурси продукту  $a_i$  у пунктах пропозиції та потреби у продуктах  $b_j$  у пунктах попиту. Якщо позначити обсяги перевезень з пункту  $i$  в пункт  $j$  через  $x_{ij}$ , то у випадку рівності сумарних обсягів попиту та пропозиції Т-задача зведеться до визначення таких значень  $x_{ij} \geq 0, i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$ , які задовольнятимуть умовам:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min; \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i; \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; \quad x_{ij} \geq 0; \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n). \quad (1)$$

У випадку транзитної Т-задачі модель задачі ускладнюється введенням обмежень на обсяги перевезень через проміжні пункти [3, с. 213]. Якщо позначити через  $M$  множину пунктів пропозиції,  $M = \{i\}, i=1, m$ ;  $N$  — множину пунктів попиту,  $N = \{j\}, j=1, n$ ;  $T$  — множину транзитних пунктів,  $T = \{\tau\}, \tau=1, u$ ;  $G$  — множину всіх вузлів транспортної мережі  $G = \{\gamma\}, \gamma=1, w$ , то цільова функція і обмеження попиту/пропозиції для

збалансованої  $T$  — задачі приймуть вигляд відповідно (2) та (3):

$$\sum_{t=1, t \in N \cup T, g \in M \cup T}^{w-m} \sum_{g=1, g \in M \cup T, t \in N \cup T}^{w-n} c_{gt} x_{gt} \rightarrow \min \quad (2)$$

$$\sum_{t=1, t \in N \cup T}^{w-m} x_{it} = a_i; \quad \sum_{g=1, g \in M \cup T}^{w-n} x_{gj} = b_j; \quad \sum_{g=1, g \in M \cup T, t \in T}^{w-n} x_{gt} \leq B, \quad \sum_{t=1, t \in N \cup T, g \in T}^{w-m} x_{gt} \leq B \quad (3)$$

де  $B$  — обсяг буферу, який розраховується за (4):

$$B = \sum_{j=1, j \in N}^n b_j = \sum_{i=1, i \in M}^m a_i. \quad (4)$$

У разі наявності транзитних пунктів попиту та пропозиції множини  $M$  та  $N$  складаються з двох підмножин:

$$M = M_I \cup M_T, \quad N = N_I \cup N_T, \quad (5)$$

де  $M_I$  — множина справжніх пунктів пропозиції потужністю  $m_I = k$ ,  $M_I = \{i\}$ ,  $i = \overline{1, k}$ ;  $M_T$  — множина транзитних пунктів пропозиції потужністю  $m_T = m - k$ ,  $M_T = \{i\}$ ,  $i = \overline{k+1, m}$ ;  $N_I$  — множина справжніх пунктів попиту потужністю  $n_I = l$ ,  $N_I = \{j\}$ ,  $j = \overline{1, l}$ ;  $N_T$  — множина транзитних пунктів попиту потужністю  $n_T = n - l$ ,  $N_T = \{j\}$ ,  $j = \overline{l+1, n}$ . Тоді множина транзитних пунктів  $T^*$  складатиметься з суто транзитних пунктів  $T$  та транзитних пунктів пропозиції  $M_T$  та попиту  $N_T$ :  $T^* = M_T \cup N_T \cup T$ . Обмеження пропозиції / попиту для справжніх пунктів попиту та пропозиції приймають вигляд:

$$\sum_{t=1, t \in N_I \cup T^*, i \in M_I}^{w-m_i} x_{it} = a_i; \quad \sum_{g=1, g \in M_I \cup T^*, j \in N_I}^{w-n_i} x_{gj} = b_j, \quad (6)$$

для суто транзитних пунктів зберігають вигляд аналогічний (4):

$$\sum_{g=1, g \in M_I \cup T^*, t \in T}^{w-n_i} x_{gt} \leq B, \quad \sum_{t=1, t \in N_I \cup T^*, g \in T}^{w-m_i} x_{gt} \leq B \quad (7)$$

а для транзитних пунктів пропозиції/попиту приймають вигляд (8), (9):

$$\sum_{t=1, t \in N_I \cup T^*, i \in M_T}^{w-m_i} x_{it} \leq B + a_i, \quad \sum_{g=1, g \in M_I \cup T^*, i \in M_T}^{w-n_i} x_{gi} \leq B + a_i \quad (8)$$

$$\sum_{t=1, t \in N_I \cup T^*, j \in N_T}^{w-m_i} x_{jt} \leq B + b_j, \quad \sum_{g=1, g \in M_I \cup T^*, j \in N_T}^{w-n_i} x_{gj} \leq B + b_j. \quad (9)$$

У [4, с. 213] обґрунтована можливість розв'язання задачі з проміжними пунктами традиційними для  $T$ -задачі методами. Проте, при розв'язанні такої моделі як задачі лінійного програмування у MS Excel Solver з маршруту будуть усунуті всі проміжні пункти за винятком суміжних з пунктами справжнього попиту і пропозиції. Для запобігання цьому необхідно ввести у модель задачі обмеження зв'язності оптимальних маршрутів перевезень,

яке може бути реалізовано як обмеження балансу потоків через транзитні пункти.

Умова балансу потоків для суто транзитних пунктів приймає вигляд (10), для транзитних пунктів пропозиції і попиту — (11) та (12) відповідно:

$$\sum_{g=1, g \in M_i \cup T^*, t \in T}^{w-n_i} x_{gt} = \sum_{g=1, g \in N_I \cup T^*, t \in T}^{w-m_i} x_{tg}, \quad (10)$$

$$\sum_{g=1, g \in N_I \cup T^*, i \in M_T}^{w-m_i} x_{ig} - \sum_{t=1, t \in M_I \cup T^*, i \in M_T}^{w-n_i} x_{ti} = a_i, \quad (11)$$

$$\sum_{g=1, g \in M_I \cup T^*, j \in N_T}^{w-n_i} x_{gj} - \sum_{g=1, t \in N_I \cup T^*, j \in N_T}^{w-m_t} x_{jt} = b_j. \quad (12)$$

У запропонованому підході для встановлення обмежень зв'язності остаточного графу та балансу потоків використовуються властивості представлення структури остаточної частини графа таблицею змінних, яка після знаходження шуканих значень  $x_{ij}$  може розглядатися як фрагмент його матриці суміжності з урахуванням того, що:

- і рядки, і стовпці таблиці змінних відповідають вершинам графа;
- кожна вершина  $i$  у рядку заголовків стовпців,  $i$  у рядку заголовків рядків повторюється не більше 1 разу;
- наявність відмінного від 0 значення на перетині  $i$ -го стовпця і  $j$ -го рядка вказує на суміжність вершин  $i$  та  $j$  і входження ребра  $x_{ij}$  у склад остаточного графа.

Від матриці суміжності заповнена таблиця змінних відрізнятиметься відсутністю стовпців та рядків, що відповідають справжнім пунктам пропозиції та попиту відповідно, проте, за очевидної відсутності у маршруті ребер типу «петля», даного фрагменту матриці суміжності достатньо для однозначного задання структури маршруту перевезень. Тоді аналогічним способом сформований фрагмент матриці суміжності вихідного графа, у якому виключені стовпці та рядки, що відповідають справжнім пунктам пропозиції та попиту відповідно, буде однозначно задавати структуру вихідного графа, оскільки у ньому буде втрачена лише інформація про комірки  $K_{ii}$  та  $K_{jj}$ , де  $i, j$  — номери вершин графа, що відповідають справжнім пунктам пропозиції та попиту. За відсутності ребер типу «петля» значення цих комірок завжди будуть нульовими.

Якщо такий фрагмент матриці суміжності, для якого ми пропонуємо назву «редукованої матриці суміжності», сформував, розставивши рядки і стовпці, що відповідають пунктам пропозиції, попиту і транзиту, у тому ж порядку, що і у транспортній таблиці та у матриці невідомих, то отримана матриця задаватиме обмеження на структуру не лише вихідного, а і остаточного графа, знаходження якого є метою задачі. Якщо позначити  $K_{gh}$

значення комірки редукованої матриці суміжності, яка відповідає перетину  $g$ -го рядка, який відповідає  $g$ -й вершині графа, і  $h$ -го стовпця, який відповідає  $h$ -й вершині графа, а  $X_{gh}$  - значення відповідної комірки матриці змінних, то обмеження на структуру остаточного графа прийме вигляд:

$$X_{gh} = \begin{cases} X_{gh} = 0 & \text{якщо } K_{gh} = 0 \\ X_{gh} \geq 0 & \text{якщо } K_{gh} \neq 0 \end{cases} \quad (13)$$

Реалізувати це обмеження на аркуші Excel можна двома способами:

1) якщо у редуковану матрицю суміжності вихідного графа на перетині стовпця і рядка, що відповідають суміжним вершинам вихідного графа, замість 1 вводити максимально можливий обсяг перевезень через довільний пункт  $X_{max}$ , то у модель задачі додасться обмеження:

$$X_{gh} \leq K_{gh}, \quad (14)$$

яке разом з початковим обмеженням  $X_{gh} \geq 0$  забезпечує виконання обмеження структури графа. Аналогічний результат може бути отриманий домноженням редукованої традиційної матриці суміжності графа на  $X_{max}$ :

$$X_{max} = \max\{B; a_{it}^{max} + B; b_{jt}^{max} + B\}, \quad (15)$$

де  $a_{it}^{max}$ ,  $b_{jt}^{max}$  — максимальні обсяги пропозиції та попиту у транзитних пунктах пропозиції та попиту відповідно для випадку, коли транзитними можуть бути не лише проміжні, але й кінцеві пункти пропозиції чи попиту;

2) якщо редукована матриця суміжності задається традиційно, і  $K_{gh}$  приймає значення з множини булевих змінних  $0 \vee 1$ , то на змінні  $X_{gh}$  має накладатися додаткове обмеження  $X_{gh} = 0$  для всіх  $K_{gh} = 0$ , яке досягається без використання функції ЕСЛИ множенням комірок матриці невідомих на відповідні комірки редукованої матриці суміжності вихідного графа.

Умова балансу потоків реалізується у моделі задачі на аркуші Excel через умову рівності сум по рядках і стовпцях таблиці невідомих, які відповідають тим самим транзитним пунктам; для транзитних пунктів попиту різниця між вхідними та вихідними потоками має дорівнювати відповідним обсягам попиту, для транзитних пунктів пропозиції обсягу пропозиції має дорівнювати різниця між вихідними і вхідними потоками. Таке представлення графа придатне для розв'язання задач на пошук мінімального шляху та мінімального покриття графа. Перевагою такого представлення стосовно [4] є також легкість реалізації технологічного обмеження на кількість дротів до кожного виводу шляхом введення локальних обмежень на степінь вершини, яка розраховується як сума по стовпцю чи рядку редукованої матриці суміжності.

У випадку задачі на пошук мінімального шляху між парою вершин  $i$  та  $j$  графа  $G$ , що містить  $w$  вершин, одна з цих вершин, наприклад  $i$ , приймається за пункт пропозиції (початок шляху), а друга,  $j$ , — за пункт попиту (кінець шляху) з обсягами попиту і пропозиції  $a_i = b_j = 1$  [4, с.217]. Решта

вершин розглядаються як суто транзитні з обсягом буферу  $B = 1$ . Змінні приймають значення 1 у разі входження вузла у мінімальний шлях, 0 = у протилежному випадку. Математична модель задачі наведена нижче:

$$\sum_{t=1, t \in j \cup T}^{w-1} \sum_{g \in i \cup T}^{w-1} c_{gt} x_{gt} \rightarrow \min; \quad (16)$$

$$x_{gt} \in [0, 1], \forall g, \forall t \in G; \quad (17)$$

$$\sum_{t=1, t \in j \cup T}^{w-1} x_{it} = 1; \quad \sum_{g=1, g \in i \cup T}^{w-1} x_{gj} = 1; \quad \sum_{g=1, g \in i \cup T, t \in T}^{w-2} x_{gt} \leq 1; \quad \sum_{t=1, t \in j \cup T, g \in T}^{w-2} x_{gt} \leq 1; \quad (18)$$

$$\sum_{g=1, g \in i \cup T, t \in T}^{w-1} x_{gt} = \sum_{g=1, g \in j \cup T, t \in T}^{w-1} x_{tg}. \quad (19)$$

Реалізацію цього підходу для пошуку найкоротшого шляху між парою вершин графу — вершиною 1 та 8 — розглянемо для графу на рис. 1.

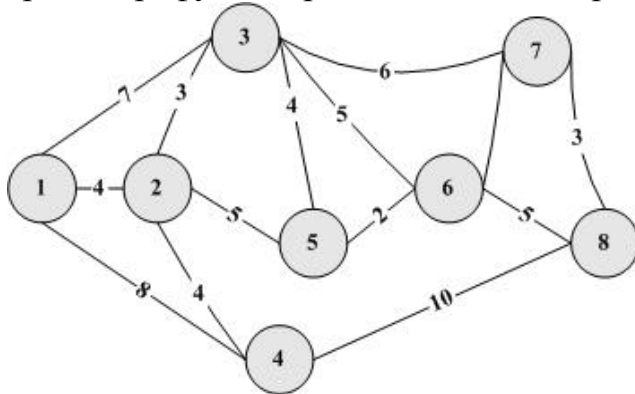


Рис. 1. Граф як транзитна транспортна мережа з нетранзитним пунктами пропозиції (п. 1) та попиту (п. 8), обсяг попиту і пропозиції – 1 (справжній пункт пропозиції).

Вершини 1, 8 розглядаємо як пункти пропозиції та попиту обсягом 1, решту вершин — як транзитні пункти з обсягом і пропозиції, і попиту у розмірі обсягу буферу, який за (4) дорівнює 1. Матриця невідомих набуває розмірності  $(n-1) \times (n-1)$ ; серед пунктів пропозиції відсутній п. 8 (справжній пункт попиту), серед пунктів попиту — п. 1 (справжній пункт пропозиції).

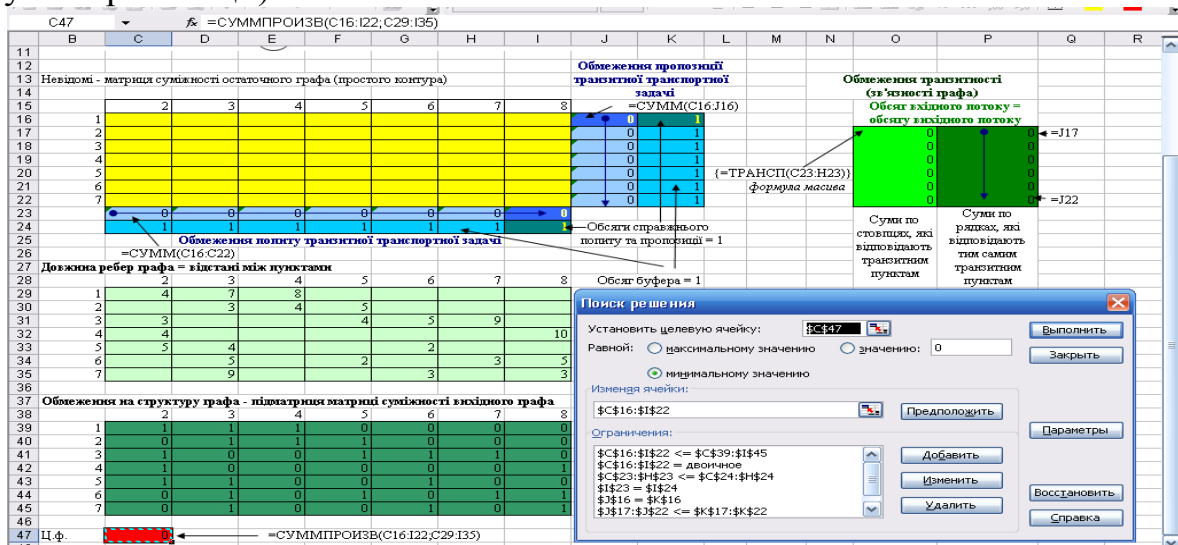


Рис. 2. Модель задачі на пошук мінімального шляху на графі (рис. 1) як транзитної транспортної задачі (Т-задачі) у Solver MS Excel

**Розрахунок моделей за допомогою Solver MS Excel**

Реалізація моделі задачі у MS Excel відображена на рис. 2 і в табл. 1.

Постановка задачі як оптимізаційної передбачає ідентифікацію у діалоговому вікні Пошуку рішення Solver MS Excel (рис. 2): типу екстремуму (мінімум); цільової комірки (C47) та комірок змінних (C16:I22); обмежень та параметрів пошуку. Зміст обмежень моделі у полі «Обмеження» діалогового вікна «Пошук рішення» розкривається у табл. 2.

Таблиця 1

Реалізація моделі задачі на пошук мінімального шляху на аркуші MS Excel

Комірка	Формула	Зміст, виконуване завдання
1	2	4
C16:I22		Транспортна таблиця невідомих, яка є редукованою матрицею суміжності остаточного графа мінімальної довжини
C29:I35	Чисельні значення відстаней між суміжними вершинами	Транспортна таблиця вартостей, яка містить значення відстаней між суміжними вершинами
C39:I45	0∧1	Редукована матриця суміжності вихідного графа
J16	=СУММПРОИЗВ(C16:I16; C39:I39); розповсюджена на комірки J16:J22	Обсяг вантажу, ввезеного у справжні та транзитні пункти попиту з урахуванням обмежень на структуру графа
C23	=СУММПРОИЗВ(C16:C22; C39:C45); розповсюджена на комірки C23:I23	Обсяг вантажу, вивезеного зі справжніх та транзитних пунктів пропозиції з урахуванням обмежень на структуру графа
K16	1, чисельне значення обсягу пропозиції у п. 1	Чисельне значення «обсягу пропозиції» (вихідного потоку) у вершині-початку
I24	1, чисельне значення обсягу попиту у п. 8	Чисельне значення «обсягу попиту» (вхідного потоку) у вершині-кінці
K17	1; розповсюджена на комірки K17:K22	Чисельне значення обсягу буфера, розраховане за (4)
C24	1; розповсюджена на комірки C24:H24	Чисельне значення обсягу буфера, розраховане за (4)
O17:O22	{=ТРАНСП(C23:H23)}	Сумарний вхідний потік у кожний з транзитних пунктів за (19)
P17	=J17; розповсюджена на комірки P17:P22	Сумарний вихідний потік з кожного з транзитних пунктів за (19)
C47	=СУММПРОИЗВ(C16:I23; C29:I35)	Цільова функція – довжина шляху мінімального шляху за (16)

Таблиця 2

**Обмеження моделі задачі на пошук мінімального шляху у Solver MS Excel**

Модель обмеження	Зміст обмеження
\$C\$16:\$I\$22=двоичное	Обмеження (17) двійковості (булевості) змінних

Таблиця 2 (продовження)

	Модель обмеження	Зміст обмеження
.	$J_{16} = K_{16}$	Обмеження задоволення пропозиції та попиту 20) для справжніх пунктів пропозиції та попиту відповідно – початкової і кінцевої вершин графа
.	$I_{23} = I_{24}$	
.	$J_{17}:J_{22} \leq K_{17}:K_{22}$	Обмеження пропозиції та попиту (18) для транзитних пунктів - проміжних вершин графа
.	$C_{23}:H_{23} \leq C_{24}:H_{24}$	
.	$O_{17}:O_{22} = P_{17}:P_{22}$	Умова балансу потоків (19) для транзитних пунктів

Аналогічне представлення графа можна застосувати для розв'язання задачі на знаходження мінімального остівного (фундаментального) дерева графа. Граф  $G$  з  $w$  вершинами доцільно представити у вигляді транзитної транспортної мережі з одним довільно обраним пунктом справжньої пропозиції; решту вершин графа можна розглядати як транзитні пункти попиту з попитом обсягом 1. Оскільки фундаментальне дерево графа містить всі вершини, то попит має бути задоволений у всіх  $w-1$  транзитних пунктах попиту і обсяг попиту слід прийняти рівним  $w-1$ ; тоді обсяг буферу  $B = w-1$ . Задача є різновидом транзитної транспортної задачі з  $N_T = w-1$  транзитними пунктами попиту; математична модель задачі у разі прийняття  $i$ -ої вершини за справжній пункт пропозиції приймає вигляд:

$$\sum_{t=1, t \in N_T}^{w-1} \sum_{g=1, g \in i \cup N_T}^w c_{gt} x_{gt} \rightarrow \min; \quad (20)$$

$$x_{gt} = 0, \dots, w-1, \forall g, \forall t \in G; \quad (21)$$

$$\sum_{t=1, t \in N_T}^{w-1} x_{it} = w-1; \quad (22)$$

$$\sum_{g=1, g \in i \cup N_T}^w x_{gt} \leq w, \quad \sum_{t=1, t \in N_T, g \in T}^{w-1} x_{gt} \leq w; \quad (23)$$

$$\sum_{g=1, g \in i \cup N_T, t \in T}^{w-1} x_{gt} - \sum_{g=1, g \in N_T, t \in T}^{w-1} x_{tg} = 1. \quad (24)$$

Реалізацію запропонованого підходу для задачі на мінімальне остівне дерево у Solver MS Excel (рис. 2) розглянемо для графа на рис. 1.



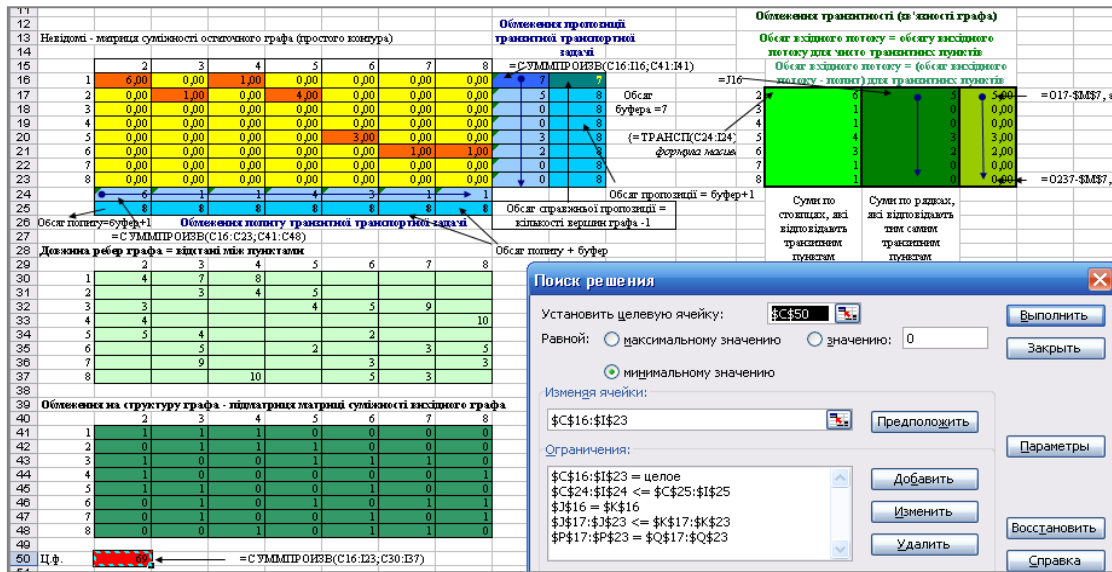


Рис. 3. Модель задачі на пошук мінімального остівного дерева графа (рис. 1) як транзитної Т-задачі з умовою балансу потоків у Solver MS Excel

За справжній пункт пропозиції з обсягом пропозиції 1 прийемо вершину  $i = 1$ , решту вершин розглянемо як транзитні пункти попиту з обсягом попиту  $b_j = 1, j = 2 \div 8$ ;  $B = w - 1 = 7$ . Матриця невідомих має розмірність  $(n) \times (n - 1)$ ; серед пунктів попиту відсутній п. 1 (справжній пункт пропозиції). Реалізація моделі задачі у MS Excel деталізована у табл. 3.

Таблиця 3

Модель задачі на пошук мінімального остівного дерева графа у MS Excel

Комірка	Формула	Зміст, виконване завдання
C16:I23		Матриця невідомих, яка є редукованою матрицею суміжності остаточно графа
C30:I37	Чисельні значення відстаней між суміжними вершинами	Транспортна таблиця відстаней між суміжними вершинами
C41:I48	$0 \wedge 1$	Редукована матриця суміжності вихідного графа
M5	7	Обсяг пропозиції у п.1, прийнятому за справжній пункт пропозиції (22)
M6	=МАКС(M5;M7)	Чисельне значення обсягу буфера, розраховане за (4)
M7	1	Чисельне значення справжнього попиту у всіх вершинах графа, прийнятих за транзитні пункти попиту
K17	=\$M\$7+\$M\$6; розповсюджена на K17:K23	Значення граничного обсягу пропозиції у транзитних пунктах попиту (8)
C25	=\$M\$7+\$M\$6; розповсюджена на C25:I25	Значення граничного обсягу попиту у транзитних пунктах попиту (9)

Продовження таблиці 3

C24	=СУММПРОИЗВ(C16:C23;C41:C48); розповсюджена на C24:I24	Обсяг «пропозиції», ввезений у кожному вершину графа, прийняту за транзитний пункт попиту
J16	=СУММПРОИЗВ(C16:I16;C41:I41); розповсюджена на J16:J23	Обсяг «пропозиції», вивезеної з кожної вершини графа з урахуванням обмежень на структуру графа
O17:O22	{=ТРАНСП(C24:I24)}; розповсюджена на комірки	Сумарний обсяг «вантажу», ввезеного у кожному з вершин графа, прийняту за транзитний пункт попиту, за (12), (24)
P17	=J17; розповсюджена на комірки P17:P23	Сумарний обсяг вантажу, вивезеного кожної з вершин графа, прийнятої за транзитний пункт попиту, за (12), (24)
Q17	=O17-\$M\$7; розповсюджена на комірки Q18:Q23	Сумарний обсяг вантажу, який має бути вивезений з кожного з транзитних пунктів попиту за (12), (24) для забезпечення «остівності» дерева
C47	=СУММПРОИЗВ(C16:I23;C30:I37)	Цільова функція — мінімальне остівне дерево за (20)

Як видно з табл. 1 та 3, умова балансу потоків через транзитні пункти (масив комірок O17:Q23) відбиває необхідність забезпечення попиту у кожній вершині графа у обсязі 1 (комірки Q17:Q23), що тотожне забезпеченню входження у дерево кожної вершини графа. Заборона на формування циклів забезпечується характером шуканого екстремуму.

Формування моделі задачі у вікні «Пошук рішення» надбудови Solver та встановлення параметрів пошуку проводиться аналогічно задачі на пошук мінімального шляху з урахуванням змін у обмеженнях (табл. 4).

Таблиця 4

Обмеження моделі задачі на мінімальне остівне дерево у Solver MS Excel

№	Модель обмеження	Зміст обмеження
1.	=\$C\$16:\$I\$23=целое	Обмеження цілочисельності змінних (21)
2.	=\$J\$16=\$K\$16	Обмеження задоволення пропозиції (22) для вершини графа 1 (справжній пункт пропозиції)
3.	=\$J\$17:\$J\$22<=\$K\$17:\$K\$22	Обмеження пропозиції та попиту (23) для вершин графа 2 ÷ 8 (транзитні пунктів попиту обсягом 1)
4.	=\$C\$23:\$H\$23<=\$C\$24:\$H\$24	
5.	=\$P\$17:\$P\$23=\$Q\$17:\$Q\$23	Умова балансу потоків (24) для вершин графа 2 ÷ 8

Виконання процедури «Пошук рішення» повертає перший знайдений варіант мінімального остівного дерева. Змінюючи початкові значення змінних, можна отримати інші варіанти остівних дерев тої самої довжини.

### Висновки

Запропонований підхід дає змогу автоматизувати розв'язання багатьох оптимізаційних задач, які можуть бути зведені до задач на пошук мінімального шляху та мінімального покриття графу. Водночас при зміні типу екстремуму, як це відбувається, наприклад, у задачах на визначення

тривалості проекту, підхід стає непридатним внаслідок неможливості коректного встановлення заборони на цикли у остаточних графах.

#### Література

1. Werneck R. F. Shortest Paths and Experimental Evaluation of Algorithms. — Microsoft Research / Renato F. Werneck — SiliconValley:MIDAS. — 2010. — 123 p., — pp. 107 – 116.
2. Кузьмичов А. І. Математичне програмування в Excel: Навч. посіб. / А. І. Кузьмичов, М. Г. Медведєв. — К. : Вид-во Європ. Ун-ту, 2005 — 320 с.
3. Sedgewick R. Algorithms in C++. Graph Algorithms / R. Sedgewick. — Addison Wesley Longman, 2002., — 496 p., — pp. 251 – 311.
4. Таха Х. Введение в исследование операций / Х. Таха. — М. : «Вильямс», 2001. — 912 с.

#### References

1. Werneck R.F. Shortest Paths and Experimental Evaluation of Algorithms. – Microsoft Research / Renato F. Werneck – SiliconValley:MIDAS. – 2010. – 123 p., pp. 107 – 116.
2. Kuzmichov A. I. Matematychnе programuvannia v Excel / A.I. Кузьмичов, М.Н. Meedvedev. – К. : Vyd-vo Yevrop. Un-tu, 2005 – 320 s.
3. Sedgewick R. Algorithms in C++. Graph Algorithms / R. Sedgewick. – Addison Wesley Longman, 2002., 496 p., pp. 251 - 311.
4. Takha Kh. Vvedenie v issledovanie operatsii / Kh. Takha.-M.«Viliams», 2001. 912 s.

*Гліненко Л. К., Фаст В. М. Автоматизація розв'язання екстремальних задач на графах у конструкторському проектуванні РЕА. Розглянуті можливості розв'язання задач конструкторського проектування РЕА, що зводяться до екстремальних задач на графах, за допомогою надбудови Solver MS Excel. Запропоновані моделі задач, які дають змогу знаходити екстремальні шляхи та мінімальні покриття (мінімальні остівні дерева) для графів довільної складності. У моделі введені обмеження зв'язності оптимальних маршрутів перевезень, які реалізовані як обмеження балансу потоків через транзитні пункти. Це дозволило звести розв'язання моделі до розв'язання задачі лінійного програмування, яке підтримується стандартними процедурами MS Excel Solver.*

**Ключові слова:** *граф, матриця суміжності, шлях, остівне дерево, транспортна задача, транзитний пункт, оптимізація, MS Excel Solver.*

*Гліненко Л. К., Фаст В. Н. Автоматизация решения экстремальных задач на графах в конструкторском проектировании РЕА. Рассмотрены возможности решения с помощью надстройки Solver MS Excel задач конструкторского проектирования РЕА, сводящиеся к экстремальным задачам на графах. Предложены модели задач, дающие возможность находить экстремальные пути и минимальные покрытия (минимальные остовные деревья) для графов произвольной сложности. В модели введены ограничения связности оптимальных маршрутов перевозок, которые реализованы как ограничения балансов потоков через транзитные пункты. Это позволило свести ре-*

шение модели к решению задачи линейного программирования, которое поддерживается стандартными процедурами MS Excel Solver.

**Ключевые слова:** граф, матрица смежности, путь, остивне дерево, транспортная задача, транзитный пункт, оптимизация, MS Excel Solver.

*Hlinenko L., Fast V. **Automatization of solving the extremal problems on graphs in radioelectronic apparatus design.** Possibilities of solving by MS Excel Add-in Solver the REA design problems modeled as the extrem graph problems are considered. Offered problem models enable to find extreme paths and minimum vertex covers (minimum spinning trees) for the graphs of any complexity. Constraints of graph connectivity for optimal routes are introduced in the model. These constraints are realized as constraints of flow balance in transit network points. It allowed to add the problem up to a linear programming problem, solving of which is correctly supported by MS Excel Solver common procedures.*

**Keywords:** graph, adjacency matrix, path, spinning tree, transport problem, transit point, optimization, MS Excel Solver.