$$\sigma_Z = \sqrt{D_Z} \ .$$

Аналогічні співвідношення для визначення множини $\boldsymbol{Z}(t)$ можна засто-су-вати, якщо $Z_i(t)$ – некорельовані векторні функції.

Висновки

У процесі проектування для кожного з функціональних показників РЕЗ, а також й для комплексного показника $\boldsymbol{Z}(t)$ – цільової функції пристрою – буде одержана множина значень, яка визначається відповідним законом розподілу; межі, у яких знаходиться ця множина, також мають свої закони розподілу.

Одержане технічне рішення – РЕЗ з показником $\boldsymbol{Z}(t)$ – буде вихідним для наступних етапів проектування, на яких й повинна бути одержана оптимальна конструкція РЕЗ. Оптимальним технічним рішенням може вважатися таке, для якого $|\boldsymbol{Z}(t) - \boldsymbol{Z}(t)_{\boldsymbol{P}}| \to \min$, де компоненти $\boldsymbol{Z}(t)_{\boldsymbol{P}}$ – значення, що були задані у ТЗ.

Досягнення оптимальних показників для РЕЗ повинно здійснюватися методами параметричної оптимізації під час подальшого проектування.

Література

1. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений. – Киев: НАНУ/Институт проблем математических машин и систем – 2007. – 184 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей – 8-е изд. – М.: Высш. шк., 2002. – 576 с.
3. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника – М.: Сов. радио, 1982. – 624 с.
4. Бабаков И.М. Теория колебаний: изд. 4-е, испр. – М.: Изд. Дрофа, 2004. – 592 с.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
6. ДСТУ 2862-94. Надійність техніки. Методи розрахунку показників надійності. Загальні вимоги.

Уваров Б. М. ***Гіпервипадкові функціональні характеристики радіоелектронних засобів.*** *Розглянуті методи визначення функціональних показників РЕЗ під час проектування на основі теорії гіпервипадкових явищ*
Ключові слова*: гіпервипадкові явища, радіоелектронні засоби*

Уваров Б. М. ***Гиперслучайные функциональные характеристики конструкций радио-электронных средств.*** *Рассмотрены методы определения показателей конструкций РЭС при проектировании на основе теории гиперслучайных явлений.*
Ключевые слова*: гиперслучайные явления, радиоэлектронные средства*

Uvarov B.M. ***The hyperbolic-accidental characteristics of the radioelectronic apparatus.*** *The methods of definition of the designs radioelectronic apparatus parameters during designing on the basis of the hyperbolic-accidental phenomena are considered*
Key words: *hyperbolic-accidental phenomena, the radioelectronic equipment*

УДК 621.37

РЕШЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ ПРОБЛЕМ ЧИСЛЕННО-СИМВОЛЬНЫМИ МЕТОДАМИ

Каширский И.С.

Проектирования любых систем непременно связано с численным решением систем линейных уравнений. Если проектирование выполняется в вычислительной среде, то сам процесс решения скрыт от разработчика. Естественно, разработчик полностью полагается на среду проектирования и не задается вопросом о качестве решения, предполагая безупречную надежность внутренних процедур. В действительности, безупречных процедур нет, и их правильная работа зависит от сложности решаемых задач проектирования. Внешне нарушения в работе процедур проявляются в виде информации о «несходимости» при решении задачи, и в закрытых средах невозможно установить истинную причину сбоя. По этой причине сложная задача анализа транзисторных схем постоянного тока (свыше 50 транзисторов) была смоделирована в открытой среде. Было установлено, что в процессе численного решения систем нелинейных уравнений, описывающих транзисторные схемы, за сбои ответственна процедура решения систем линейных уравнений. В процессе решения формируются линейные уравнения, которые могут иметь большой разброс значений элементов – от малых проводимостей сопротивлений в несколько Ом до больших проводимостей открытых диодов при напряжениях на них в несколько вольт. Такие системы называют некорректными или близкими к сингулярным [1], но правильнее их называть плохо определенными, как расположенными между определенными и неопределенными системами. Так как невозможно привести в статье полную плохо определенную систему в 30-50 уравнений, ограничимся классическим примером системы уравнений из [1]

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 36 & -630 & 3360 & -7560 & 7560 \\ -630 & 14700 & -88200 & 211680 & -220500 \\ 3360 & -88200 & 564480 & -1411200 & 1512000 \\ -7560 & 211820 & 1411200 & 3628800 & 3969000 \\ 7560 & 220500 & 1512000 & -3969000 & 4410000 \\ -2722 & 83160 & -582120 & 1552320 & -1746360 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1200 \\ -10000 \\ 83000 \\ -100000 \\ 110000 \\ -120000 \end{bmatrix}.$$

Система линейных уравнений из 5 уравнений с 5 неизвестными имеет вид

$$\boldsymbol{D}^t \boldsymbol{D} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{D}^t \boldsymbol{C}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{D}^t$ -транспонированная матрица *D;* $\boldsymbol{U}$ - вектор неизвестных $\boldsymbol{u}1,\ldots,\boldsymbol{u}5$. Численное решение системы $\boldsymbol{U}$ было проведено в среде *MATLAB* (в результате приведены только шесть значащих цифр из 16)

$\boldsymbol{U}$ = (1,751914; - 0,404166; - 0,505759; - 0,0198583; 0,197679)

Для проверки правильности решения, $\boldsymbol{U}$ было подставлено в систему (1) и вместо ожидаемых значений порядка 10^{-10} при 16 значащих цифр результата был получен вектор ошибок уравнений

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}^t \boldsymbol{D} \boldsymbol{U}\hat{} - \boldsymbol{D}^t \boldsymbol{C} = (-0{,}07147; -4{,}904; -47{,}48; 39{,}94; -136{,}2)\ .$$

Численное решение системы было также проверено в среде *Mathcad*

$\boldsymbol{U}$ = (1,643699; - 0,404170; - 0,504191; - 0,0200773; 0,197130)

с вектором ошибок уравнений

$$\boldsymbol{E} = (0{,}02229;\ -0{,}07804;\ -2{,}002;\ -11{,}03;\ -5{,}484).$$

Чтобы сделать окончательный вывод о качестве полученного решения, та же система была решена методом Хаусхолдера [1] и был получен вектор ошибок **E** = (2,899e-4; - 5,493e-4; - 4,882e-4; 0; 0).

Не так важно знать, какой метод оказался лучше в данной конкретной системе уравнений. Важнее понимать, что различие ошибок в 10^5 раз вызвано сложностью решаемой системы -ее плохой определенностью.

Трудности решение плохо определенных систем вызваны точностью процесса решения. Операции над числами, исходные значения которых не выходят за шкалу точности (для примера лежат в пределах 10^8 - 10^{13} при 16 значащих цифрах), в итоге приводят к потери точности расчета. Даже если предположить, что точность расчетов ПК возрастет, и все операции будут выполняться с 36 значащими цифрами, нельзя дать гарантию, что в некоторых задачах не проявятся те же проблемы.

В настоящей работе предлагается подход к решению плохо определенных систем путем выравнивания поля чисел. Если бы значения всех чисел были в малом интервале шкалы, то точность всех операций (промежуточных и окончательных) была бы приблизительно одинакова и определялась бы заданной шкалой точности (например, 16 значащих цифр). Однако в реальных задачах разброс значений элементов уравнений может быть большим, что делает неизбежным разделение чисел в уравнениях на большие и малые. На первый взгляд кажется, что уничтожение малых чисел большими, например, при их суммировании является нормальным процессом. Как бы малые числа являются не только малыми по значению, но и мало значащими для процесса расчета. Проблема «большие-малые» появляется не только при решении системы, но и при ее формировании. Решению системы предшествует этап использование некоторых законов, по которым составляются уравнения равновесия проектируемого устройства. На этом этапе в одном потоке могут сливаться большие и малые числа, и после уничтожения малых чисел, полученная для решения система уравнений может оказаться не адекватной проектируемому устройству. Следовательно, выравнивание «больших-малых» надо проводить до решения системы на этапе ее формирования. Выравнивание «больших-малых» предлагается выполнять введением символов для обозначения порядка больших и малых чисел. Если есть малое число A и большое число B, то их можно представить в показательной форме $A = a \bullet 10^{-h}$, $B = b \bullet 10^{h}$ таким образом, чтобы числа a и b имели небольшое отличие в значениях. Теперь обозначая $s = 10^h$, получаем символьные числа $A = a \bullet s^{-1}$, $B = b \bullet s$. Численная система линейных уравнений превращается в численно-символьную (ЧС) систему, при решении которой численные операции выполняются над близкими по значению числами a и b, что снимает проблему «больших-малых». Как было сказано, преобразование чисел в символьные надо выполнять на этапе формирования системы уравнений, не допуская уничтожения малых чисел.

Решение ЧС систем более трудоемко, но не приводит к неразрешимым проблемам. В настоящей работе использованы методы автора [2], разработанные для решения других задач. Теперь эти методы могут быть использованы в новой области. В работе [2] были даны оценки трудоемкости решения ЧС методов. Если система имеет n уравнений, трудоемкость численных методов, как известно [3], пропорциональна n^3, а трудоемкость ЧС методов [2] пропорциональна n^5. За решение проблемы «больших-малых» надо заплатить памятью и быстродействием. Но если при формировании системы поле ее чисел оказывается однородным, то необходимость преобразования чисел в символьную форму отпадает. Если же поле чисел существенно неоднородно, то предпочтительнее будет трудоемкое, но точное решение.

Рассмотрим некоторые проблемы, возникающие при решения численных систем уравнений.

Решение системы уравнений с сохранением влияния малых чисел

Эта проблема рассматривалась в работе [4], где показано, что попытка сохранить влияние малых чисел на результат способом масштабирования системы (умножение строк и столбцов на соответствующие коэффициенты) может привести к вырождению системы уравнений. Решим указанную задачу Форсайта ЧС методом, для чего малый элемент системы обозначим через символ α и сохраним все остальные элементы в численной форме. Система уравнений преобразуется в ЧС, и ее решение будет найдено в виде численно-аналитических выражений с символом α. Примененные ЧС методы работы [2] дают результат в виде отношения полиномов от α, хотя возможны и другие формы представления.

Для примера рассмотрим систему линейных уравнений, в которой один элемент может принимать сколь угодно малые значения

$$\boldsymbol{D}\bullet\boldsymbol{U} = \boldsymbol{C}$$

где матрицы системы выбраны как

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ \alpha & 1 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Решением численной системы уравнений при отсутствии малого элемента ($\alpha = 0$) будет вектор $\boldsymbol{U} = (1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1)$. Решение ЧС системы дает:

$u\ 1 = (-144)\,/\,(-20\bullet\alpha - 144)$; $u\ 2 = (36\bullet\alpha - 144)\,/\,(-20\bullet\alpha - 144)$;

$u\ 3 = (12\bullet\alpha - 144)\,/\,(-20\bullet\alpha - 144)$; $u\ 4 = (16\bullet\alpha - 144)\,/\,(-20\bullet\alpha - 144)$;

$u\ 5 = (24\bullet\alpha - 144)\,/\,(-20\bullet\alpha - 144)$.

В эти выражения можно подставить малое значение α, например, $\alpha = 10^{-20}$

$$u\,2\,(10^{-20}) = (36{\bullet}10^{-20} - 144)\,/\,(-20{\bullet}\,10^{-20} - 144)\,.$$

Сохранять этот результат надо в форме дроби, чтобы не потерять малые числа при шкале точности с 16 значащими числами.

Формирование и решение численных систем уравнений с большими числами

Параметры проектируемой системы могут иметь большие и малые значения, и чтобы не потерять малые числа, необходимо, как вариант, хранить большие числа отдельно от малых. Объединение их в одном потоке, где встречается операция суммирования, приведет к потере значащих цифр малых чисел и уменьшению точности расчета или к полной потере малых чисел. Для сложного проектируемого устройства практически невозможно предвидеть ценность сохранения того или иного параметра в процессе численного расчета. Игнорирование ценности параметра в расчете может привести к результату, в странности которого придется долго разбираться.

Для примера рассмотрено формирование системы уравнений с несколькими одинаково большими числами, которые на этапе формирования сохранены в форме символа g. Полученная ЧС система: $\boldsymbol{D}{\bullet}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{C}$, где матрицы системы выбраны

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} g+2 & -1 & 0 & -g & 0 \\ -1 & g+3 & -1 & 0 & -g \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -g & 0 & -1 & g+3 & -1 \\ 0 & -g & 0 & -1 & g+2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

В матрице $\boldsymbol{D}$ показана операция суммирования больших чисел g с малыми числами 2, 3, но эта операция в расчете не выполняется, т.к. элементы имеют разную ЧС форму и операции над ними выполняются отдельно. Решение ЧС системы дает следующий результат:

$$u\,1 = (14{\bullet}g^2 + 48{\bullet}g + 34)\,/\,(49{\bullet}g^2 + 112{\bullet}g + 55);$$
$$u\,2 = (7{\bullet}g^2 + 16{\bullet}g + 13)\,/\,(49{\bullet}g^2 + 112{\bullet}g + 55);$$
$$u\,3 = (7{\bullet}g^2 + 12{\bullet}g + 5)\,/\,(49{\bullet}g^2 + 112{\bullet}g + 55);$$
$$u\,4 = (4{\bullet}g^2 + 20{\bullet}g + 2)\,/\,(49{\bullet}g^2 + 112{\bullet}g + 55);$$
$$u\,5 = (7{\bullet}g^2 + 16{\bullet}g + 1)\,/\,(49{\bullet}g^2 + 112{\bullet}g + 55).$$

В полученные выражения можно подставить любые большие значения g, *например,* $g = \infty$

$u\,1\,(\infty) = 14/49$; $u\,2(\infty) = 7/49$; $u\,3\,(\infty) = 7/49$; $u\,4\,(\infty) = 14\,/49$; $u\,5\,(\infty) = 7/49$.

Рассмотренная система уравнений имеет схемную интерпретацию, и матрица $\boldsymbol{D}$ является матрицей проводимости схемы (рис.1) для R=1, $J0$ =1. Условие $g = \infty$ физически реализуемо и соответствует короткому замыканию узлов 1 и 4 и узлов 2 и 5, что превращает схему (рис.1) в другую реаль-

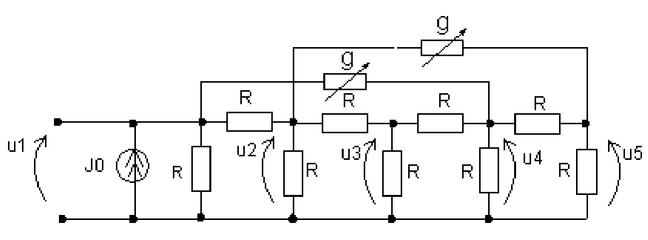

рис.1

ную схему, значения узловых напряжений которой найдены в рассмотренном примере при $g = \infty$.

Теперь покажем, как важно разделение больших и малых чисел на этапе формирования уравнений. Если этого не сделать, то при суммировании чисел в матрице ***D*** некоторые малые числа пропадут, и система уравнений примет вид ***D•U = C*** со следующими матрицами

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} g & -1 & 0 & -g & 0 \\ -1 & g & -1 & 0 & -g \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -g & 0 & -1 & g & -1 \\ 0 & -g & 0 & -1 & g \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Большие числа по-прежнему сохраняются в ЧС форме, чтобы они не уничтожили оставшиеся малые числа системы. Новая ЧС система уравнений также решена и получены следующие результаты:

$u\,1 = (g^2 + 5•g - 1)/(16•g^2 - 2•g - 3);$

$u\,2 = -(7•g^2 - g - 3)/(16•g^2 - 2•g - 3);$

$u\,3 = -(2•g^2 + g - 1)/(16•g^2 - 2•g - 3);$

$u\,4 = (g^2 - 4•g)/(16•g^2 - 2•g - 3);$

$u\,5 = -(7•g^2 - 2•g + 1)/(16•g^2 - 2•g - 3).$

Сравнение двух решений показывает, что они совершенно различны, хотя они оба найдены при решении ЧС систем и не имеют ошибок, вызванных проблемой «большие-малые». Различие решений объясняется тем, что первая численная система преобразована в ЧС форму на этапе формирования, а вторая - после формирования численной системы и уже содержала ошибки от уничтожения малых чисел. Следует отметить, что вторая система не имеет схемного аналога, т.е. потеря малых чисел при формировании привела к неадекватной модели исходной схемы (рис.1). В завершение найдем численное решение для $g = \infty$

$u\,1(\infty) = 1/16$; $u\,2(\infty) = -7/16$; $u\,3(\infty) = -2/16$; $u\,4(\infty) = 1/16$; $u\,5(\infty) = -7/16$,

которое также не имеет ничего общего с численным решением первой системы при том же условии $g = \infty$.

Выравнивание поля чисел в уравнениях численной системы

Для более эффективного выравнивания поля больших и малых чисел шкалу чисел надо разбить на интервалы и выполнять преобразование в ЧС форму отдельно для каждого интервала. Если выбрать шкалу чисел в пределах от 10^{-20} до 10^{20}, то такими интервалами могут быть: интервал 1 от 10^{-20} до 10^{-12}; интервал 2 от 10^{-12} до 10^{-4}; интервал 3 от 10^{-4} до 10^{4}; интервал 4 от 10^{4} до 10^{12}; интервал 5 от 10^{12} до 10^{20}. Переходя к ЧС форме, надо определить $s = 10^{10}$, и тогда числа в интервале 1 будут иметь ЧС форму $A{=}a{\bullet}s^{-2}$; в интервале 2 -$A = a{\bullet}s^{-1}$; в интервале 3 -$A = a{\bullet}s^{0} = a$; в интервале 4 -$A = a{\bullet}s$; в интервале 5 -$A = a{\bullet}s^{2}$. Числа распределяются в интервалы на этапе формирования уравнений, чтобы избежать уничтожения малых чисел.

Для примера рассмотрена ЧС система, полученная на этапе формирования $\boldsymbol{D{\bullet}U = C}$, где

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} s^2 & -3 & 3 & -s^{-2} & 2 \\ -1 & 2 & s^2 & -1 & -2s^{-1} \\ 2s^{-2} & -1 & 3 & -s^{-1} & -1 \\ 1 & -s^{-1} & -2 & 4 & -s^{1} \\ s^{1} & s^{-2} & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Числа в матрице $\boldsymbol{D}$ действительно имеют разброс от 10^{-20} до 10^{20}, скрытый за символами. В предыдущем примере уже было показано, что в матрице $\boldsymbol{D}$ могут быть записаны суммы элементов из разных интервалов чисел, например, $s^2 + s^{-2}$. Численно они несовместимы на конечной шкале чисел, но в ЧС форме это разные объекты и запись их суммы не ведет к численной операции суммирования. Решение ЧС системы дает следующие результаты, приведенные ввиду сложности выражений лишь для некоторых неизвестных:

$$\Delta = -s^5 + 20{\bullet}s^4 - 31{\bullet}s^3 + 78{\bullet}s^2 - 130{\bullet}s - 93 + 48{\bullet}s^{-1} - 292{\bullet}s^{-2} + 203{\bullet}s^{-3} + \\ + 56{\bullet}s^{-4} - 42{\bullet}s^{-5} + 12{\bullet}s^{-6} + 8{\bullet}s^{-7};$$

$$u\,4 = (2{\bullet}s^5 + 9{\bullet}s^4 + 6{\bullet}s^3 + 103{\bullet}s^2 - 75{\bullet}s + 51 - 92{\bullet}s^{-1} - 88{\bullet}s^{-2} + 24{\bullet}s^{-3} - \\ - 40{\bullet}s^{-4} - 28{\bullet}s^{-5}) / \Delta;$$

$$u\,5 = (9{\bullet}s^4 + 14{\bullet}s^3 + 112{\bullet}s^2 - 15{\bullet}s - 120 - 27{\bullet}s^{-1} - 109{\bullet}s^{-2} + 18{\bullet}s^{-3} - 12{\bullet}s^{-4} + \\ + 6{\bullet}s^{-5} + 4{\bullet}s^{-6}) / \Delta.$$

В эти выражения можно подставить любые значения s, например, получить численное решение для $s = 1$: $u\,1 = 36 / 41$; $u\,2 = 27 / 41$; $u\,3 = 33/41$; $u\,4 = 32 / 41$; $u\,5 = 30/41$; или для $s = 10^{10}$: $u\,4 = (2 + 9{\bullet}10^{-10} + 6{\bullet}10^{-20}) / (-1 + 20{\bullet}10^{-10} - 31{\bullet}10^{-20})$. Как видно из приведенных численно-аналитических выражений, при $s{=}\infty$ решение тоже есть: $u\,4 = -2$; $u\,5 = 0$.

Многократное решение численной системы уравнений при переменном параметре

Такое применение ЧС методов является традиционным и позволяет экономить личное время. Действительно, проще один раз решить ЧС систему и получить аналитическую зависимость от параметра, чем многократно решать численные системы.

Для примера рассмотрена ЧС система уравнений $\boldsymbol{D{\bullet}U = C}$, где

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} p^1 + 2 & -1 & -p^1 & 0 \\ -1 & 2p^{-1} + 2 & -0{,}5 & -p^{-1} \\ -p^1 & -0{,}5 & p^1 + 2 & -1 \\ 0 & -p^{-1} & -1 & 2p^{-1} + 2 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Преобразование численной системы в ЧС систему выполнено на этапе формирования, и система не содержит ошибок от численных операций малых

и больших чисел. Решение ЧС системы имеет вид
$u\ 1 = (80\bullet p + 248 + 264\bullet p^{-1} + 96\bullet p^{-2}) / (19\bullet p + 61 + 66\bullet p^{-1} + 24\bullet p^{-2});$
$u\ 2 = (60\bullet p + 152 + 96\bullet p^{-1}) / (19\bullet p + 61 + 66\bullet p^{-1} + 24\bullet p^{-2});$
$u\ 3 = (80\bullet p + 196 + 120\bullet p^{-1}) / (19\bullet p + 61 + 66\bullet p^{-1} + 24\bullet p^{-2});$
$u\ 4 = (78\bullet p + 172 + 96\bullet p^{-1}) / (19\bullet p + 61 + 66\bullet p^{-1} + 24\bullet p^{-2})$
Параметр p можно изменять от $p = 0$ с решением: $u\ 1 = 4$; $u\ 2 = u\ 3 = u\ 4 = 0$, до значения $p = \infty$ с решением: $u\ 1 = 80/19$; $u\ 2 = 60/19$; $u\ 3 = 80/\ 9$; $u\ 4 = 78/19$.

Решение сингулярных численных систем уравнений

Сингулярными называют системы с нулевым определителем [1], и их вычислительная особенность состоит в том, что используемые численные методы в вычислительных средах такие задачи не решают. Вместе с тем, численные методы „не дорабатывают”, т.к. система с нулевым определителем может иметь численное решение и его необходимо находить.

В настоящей работе предлагается метод решения таких численных систем с помощью вложения сингулярной системы в ЧС систему уравнений с ненулевым определителем. Для этого элементам исходной системы необходимо задать возмущение ε так, чтобы определитель гарантировано стал ненулевым, и наилучший способ – задать приращение элементам главной диагонали. Если эти приращения сохранить в виде символа ε, то численная система преобразуется в ЧС систему. По ЧС решению системы можно установить, имеет ли исходная сингулярная система численное решение или уравнения системы несовместны, и численного решения нет.

Правило определения совместности исходных уравнений:

Если хотя бы для одного неизвестного ЧС системы знаменатель выражения имеет несокращаемый сомножитель вида ε^m ($m = 1, 2,\ldots$), то численного решения нет, в противном случае численное решение есть и получается из ЧС решения при ε = 0.

Это правило даже не требует выделения сомножителя, т.к. факт его существования можно определить по анализу наибольших и наименьших степеней ε числителей и знаменателей ЧС выражений неизвестных.

Для примера рассмотрим сингулярную систему уравнений $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Попытка ее решения в различных вычислительных средах дала следующие результаты:

MATLAB - Matrix is singular . X = NaN

Mathcad - Matrix is singular. Cannot complete its inverse.
No solution was found.

Для решения сингулярная система была вложена в ЧС систему путем добавления одинаковых приращений к элементам главной диагонали

$$\boldsymbol{D} \bullet \boldsymbol{U} = \boldsymbol{C}$$

где матрицы численно-символьной системы

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon+1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & \varepsilon-1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & \varepsilon+1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & \varepsilon+1 \end{bmatrix}; \; \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Найденные выражения неизвестных ЧС системы имеют вид:

$u\ 1 = (\varepsilon^3 - \varepsilon)/(\varepsilon^4 + 2\bullet\varepsilon^3 - 7\bullet\varepsilon^2) = (\varepsilon^2 - 1)/(\varepsilon\bullet(\varepsilon^2 + 2\bullet\varepsilon - 7))$;

$u\ 2 = (2\bullet\varepsilon^3 - 2\bullet\varepsilon^2 - 4\bullet\varepsilon)/(\varepsilon^4 + 2\bullet\varepsilon^3 - 7\bullet\varepsilon^2) = (2\bullet\varepsilon^2 - 2\bullet\varepsilon - 4)/(\varepsilon\bullet(\varepsilon^2 + 2\bullet\varepsilon - 7))$;

$u\ 3 = (3\bullet\varepsilon^3 - 2\bullet\varepsilon^2 - 5\bullet\varepsilon)/(\varepsilon^4 + 2\bullet\varepsilon^3 - 7\bullet\varepsilon^2) = (3\bullet\varepsilon^2 - 2\bullet\varepsilon - 5)/(\varepsilon\bullet(\varepsilon^2 + 2\bullet\varepsilon - 7))$;

$u\ 4 = (-4\bullet\varepsilon^2 + 4\bullet\varepsilon)/(\varepsilon^4 + 2\bullet\varepsilon^3 - 7\bullet\varepsilon^2) = (-4\bullet\varepsilon + 4)/(\varepsilon\bullet(\varepsilon^2 + 2\bullet\varepsilon - 7))$.

Согласно правилу определения совместности исходных уравнений, знаменатели всех неизвестных ЧС системы имеют сомножитель **ε,** и потому исходные уравнения несовместны, и численного решения сингулярной системы действительно нет.

Рассмотрим другую сингулярную систему ***A•X = C,*** где

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \; \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

сингулярность которой видна сразу – в ней 3 одинаковых строки.

Для решения эта система была вложена в ЧС систему ***D•U*** = ***C,*** где

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \varepsilon+1 \end{bmatrix}; \; \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Найденные выражения неизвестных ЧС системы имеют вид:

$u\ 1 = (\varepsilon + 3)/(\varepsilon^2 + 5\bullet\varepsilon + 3)$; $u\ 2 = (-1)/(\varepsilon^2 + 5\bullet\varepsilon + 3)$;

$u\ 3 = (-1)/(\varepsilon^2 + 5\bullet\varepsilon + 3)$; $u\ 4 = (-1)/(\varepsilon^2 + 5\bullet\varepsilon + 3)$;

Согласно правилу определения совместности уравнений ни в одном выражении нет сомножителя ε^m в знаменателе, и потому численное решение системы есть и равно $u\ 1\ (0) = 1$; $u\ 2\ (0) = -1/3$; $u\ 3\ (0) = -1/3$; $4\ (0) = -1/3$.

В заключении нужно сказать, что численное решение систем линейных уравнений для проектируемых систем большого размера всегда будет трудной проблемой. Неверное решение – это разрушение процедур анализа нелинейных схем постоянного тока или неявного интегрирования во временном анализе схем или процесса численной оптимизации схем. Настоящая работа доказывает, что ЧС арифметика является мощным и пока недооцененным аппаратом для численных расчетов в проектировании . Показанные в работе области применения, возможно, будут способствовать его распространению.

Литература

1. Уилкинсон Д., Райнш С. Справочник алгоритмов. Линейная алгебра, - М., Машиностроение, с.380, 1976
2. Каширский И.С., Трохименко Я.К. Обобщенная оптимизация электронных схем,-Киев,Техника, с.190, 1979
3. Березин И.С.,Жидков Н.П. Методы вычислений, -М., Наука, с.632, 1966
4. Форсайт Д., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений,- М, Мир, с.166, 1969

Каширский И.С ***Решение численных проблем численно-символьными методами****. Практика проектирования сложных систем в вычислительных средах показала, что в процессе проектирования возникают сбои, вызванные плохой определенностью или сингулярностью систем линейных уравнений. В настоящей работе показано, что многие численные проблемы можно решить, применяя численно-символьные методы.*
Ключевые слова: *символьные методы, плохая определенность, сингулярность .*

Каширський І.С. ***Рішення чисельних проблем чисельно-символьними методами****. Практика проектування складних систем в обчислюваних середовищах показала, що в процесе проектування виникають труднощі, пов'язані з поганою обусловленостю або взагалі з сінгулярністю систем лінійних рівнянь. В статті показано,що багато чисельних проблем можно ров'язати, використовуючи чисельно-символьні методи.*
Ключові слова: *символьні методи, погана обусловленысть, сингулярність.*

Kashirsky I.S. ***Decision of numerical problems with symbolic methods.*** *Modern methods for numerical decision of linear systems guarantee successful results only for good systems. Decision of bad systems (bad conditional, singular) is already problem. This paper describes using symbol methods for decision of bad conditional and singular systems.*
Key words: *symbolic method, bad conditional, singular .*