

---

## КОНСТРУЮВАННЯ РАДІОАПАРАТУРИ

УДК 621.306

### МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМУ ОХОЛОДЖУВАЧА ПРОЦЕСОРА ПЕОМ

*Уваров Б.М., к.т.н., доцент,  
Національний технічний університет України  
"Київський політехнічний інститут", м. Київ, Україна*

#### Вступ. Постановка задачі

У модулях радіоелектронних засобів (РЕЗ) першого конструктивного рівня складності (мікрозбірках, чарунках) та другого (блоках), у їх окремих функціональних вузлах (потужних напівпровідникових діодах, тиристорах, транзисторах, інтегральних мікросхемах) потрібно розраховувати теплові параметри як у стаціонарному режимі, так й у моменти виходу на останній – після ввімкнення чи під час роботи у імпульсному режимі.

Математична модель розповсюдження тепла у трьохмірному фізичному тілі – це гіперболічне рівняння [1]:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} + \frac{Q(x, y, z, \tau)}{\lambda}, \quad (1)$$

де  $T(x, y, z, \tau)$  – функція температури;  $Q(x, y, z, \tau)$  – змінне джерело тепла у об'ємі тіла;  $a, \lambda$  – коефіцієнти температуро- та теплопровідності речовини відповідно;  $\tau$  - час.

Такі рівняння можна розв'язати аналітично чи числовими методами (скінченно-різницевиими сітковими та скінченних елементів – МСЕ), останні дозволяють провадити розрахунки температурних полів у об'єктах складної форми під час дії змінних зовнішніх та внутрішніх теплових факторів [2]. Розрахунки провадять за допомогою потужних персональних обчислювальних машин (ПЕОМ), створивши для об'єкту спеціальну розрахункову модель та відповідний програмний комплекс.

Якщо під час проектування ставиться мета одержати оптимальну конструкцію технічного об'єкту, тобто з найвищими показниками якості, у процесі параметричної оптимізації, як правило, потрібно провадити послідовні ітераційні цикли (іноді вони обчислюються сотнями й навіть тисячами) до досягнення оптимуму комплексного показника. У цих випадках числові програмні комплекси, якщо їх намагатися включити до системи автоматизованого проектування (САПР), можуть настільки уповільнити час одержання кінцевого технічного рішення, що такий метод проектування стане практично непридатним.

Під час створення та експлуатації САПР для розрахунків температур аналітичні рішення мають перевагу перед числовими:

- багато їх вже створено раніше для різних типових об'єктів;
- на швидкодіючих сучасних ЕОМ вони швидко дають “точні” результати;
- модулі з розрахунковими формулами зручно включити у комплекс САПР з ітераційними циклами.

Реальні конструкції РЕЗ мають складну структуру, яка може бути поєднанням декількох об'єктів, тому необхідно створювати моделі – структурні й математичні – для таких складних структур, а розрахункові формули для стаціонарних та нестаціонарних теплових режимів одержувати аналітичними методами.

### Математична модель теплового нестаціонарного процесу для складної структури

Типові функціональні вузли, у яких тепло повинно бути відведено від джерела тепла у оточуючий простір – це охолоджувачі процесорів у ПЕОМ. Під час проектування майже в усіх них необхідно оцінювати не тільки температури у стаціонарному режимі, а й у періоди виходу на нього, тобто розраховувати нестаціонарні процеси; крім того, іноді вони повинні працювати у імпульсному режимі – це теж нестаціонарний процес.

У реальному охолоджувачі елементи конструкції поєднані між собою тепловими зв'язками, тому й математична модель нестаціонарного теплового режиму має бути системою диференціальних рівнянь, подібних до (1).

Під час її побудови диференціальні рівняння, які описують температурні поля у окремих елементах складної структури, повинні бути пов'язані між собою. У цьому складність моделі, а також складність подальшого розв'язання системи рівнянь, навіть коли це пов'язані температурні поля двох елементів конструкції.

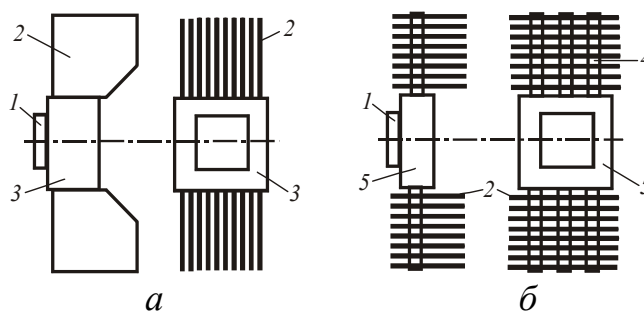


Рис. 1. Конструктивні схеми охолоджувачів ПЕОМ:

*а* – 1 МС процесора; ребра 2 спресовані у основу 3; *б* – ребра 2 на теплових трубках 4; 5 – резервуар з охолоджувальною рідиною

Конструктивні схеми повітряних охолоджувачів процесорів ПЕОМ можна звести до двох основних, які наведені на рис. 1, а математичну модель для конструкції охолоджувача створити на основі узагальненої тепло-

вої схеми, яка наведена на рис. 2.

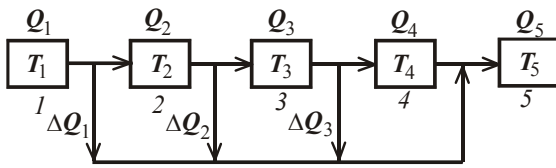


Рис. 2. Узагальнена теплова схема охолоджувача:  
1 – корпус ІМС; 2 – основа радіатора; 3 – канали теплових трубок; 4 – ребра радіатора; 5 – оточуючий простір

Тепло  $Q_1$ , що генерується у корпусі ІМС 1, повинно бути передано до основи радіатора 2; якщо врахувати неминучі (хоча й малі) збитки тепла  $\Delta Q_1$  у тракті передавання, до основи надходить тепло  $Q_2 < Q_1$ . Збитки тепла у основі  $\Delta Q_2$ , внаслідок тепло-

відведення до кріпильних деталей та у оточуючий простір, вже помітні:  $Q_3 < Q_2$ . Далі тепло передається до ребер радіатора 4 за допомогою проміжного елемента 3 (це, наприклад, можуть бути теплові трубки), необхідно врахувати збитки  $\Delta Q_3$ , й що  $Q_4 < Q_3$ . Якщо ребра радіатора прямо приєднані до основи,  $Q_4 = Q_3$ . Від ребер радіатора тепло  $Q_4$  передається у оточуючий простір 5, де й розсіюється.

Згідно з рис. 2, математична модель для охолоджувача процесора ПЕОМ – це система двох – трьох диференціальних рівнянь для пов’язаних структурних елементів 1, 2, 4 (у більшості випадків теплові трубки 3 мають незначний тепловий опір й можуть не враховуватися). Її можливо дещо спростити, якщо нехтувати збитками тепла  $\Delta Q_1 - \Delta Q_3$ . Тоді для конструкції рис. 1, а, теплова схема – це три послідовно контактуючих елементи: корпус ІМС 1, основа радіатора 3 та ребра 2. У конструкції рис. 1, б тепловий опір теплових трубок дуже малий, й можна розглядати таку ж спрощену схему з трьох елементів: корпусу ІМС 1, резервуару 5 та ребер 2.

Головним елементом у системі необхідно розглядати паралелепіпед з розмірами  $l_1 \times l_2 \times h$  (основа радіатора чи резервуар охолоджувача), який контактує нижньою горизонтальною поверхнею  $l_1 \times l_2$  з зовнішнім джерелом тепла  $Q$  (ІМС), а двома вертикальними поверхнями  $l_2 \times h$  (протилежними одна одній) – з ребрами (рис. 3, а, б).

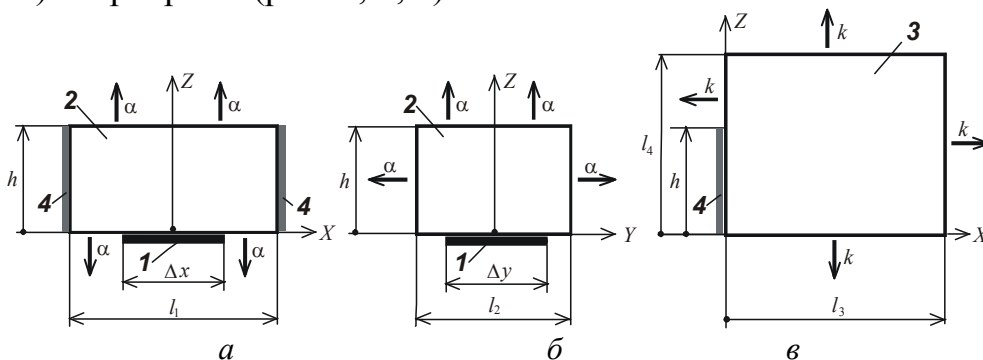


Рис. 3. Схема контактування основи охолоджувача й ребер:  
а, б – основа радіатора; в – ребро радіатора;  
1 – ІМС процесора; 2 – основа; 3 – ребро; 4 – поверхні контакту

Ребра, кожне товщиною  $\delta$ , контактують частиною  $h$  свого вертикального ребра з основою-паралелепіпедом (рис. 3, в).

Система диференціальних рівнянь теплового поля:

– для паралелелепіпеда:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T_1(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T_1(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_1(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} + \frac{q_0(x, y)}{\lambda l_3}, \quad (2)$$

де  $q_0$  – поверхнева щільність теплового потоку від зовнішнього джерела:

$$q_i(x, y) = \begin{cases} \frac{Q_i}{\Delta x_i \Delta y_i} & \text{у межах площинки джерела;} \\ 0 & \text{поза площиною.} \end{cases}$$

– для ребер:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T_2(x, z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T_2(x, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2(x, z, \tau)}{\partial z^2} - \frac{\alpha}{\lambda \delta} T_2(x, z, \tau). \quad (3)$$

Якщо вважати, що з вільних граней паралелелепіпеда тепло відводиться конвекцією з коефіцієнтом тепловіддачі  $\alpha$ , граничні умови для них такі:

$$\left. \begin{aligned} -\lambda \frac{\partial T_1}{\partial z} + \alpha T_1 &= 0 \text{ за } z = 0; & \lambda \frac{\partial T_1}{\partial z} + \alpha T_1 &= 0 \text{ за } z = h; \\ -\lambda \frac{\partial T_1}{\partial y} + \alpha T_1 &= 0 \text{ за } y = -0,5l_2; & \lambda \frac{\partial T_1}{\partial y} + \alpha T_1 &= 0 \text{ за } y = +0,5l_2, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

для ребер граничні умови (припускаючи, що коефіцієнт тепловіддачі  $k$  з торців такий же, як із бічної поверхні):

$$\left. \begin{aligned} -\lambda \frac{\partial T_2}{\partial z} + kT_2 &= 0 \text{ за } z = 0; & \lambda \frac{\partial T_2}{\partial z} + kT_2 &= 0 \text{ за } z = l_4; \\ -\lambda \frac{\partial T_2}{\partial x} + kT_2 &= 0 \text{ за } x = 0; & \lambda \frac{\partial T_2}{\partial x} + kT_2 &= 0 \text{ за } x = l_3. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Температури граней основи та ребер, що контактують, однакові:

$$T_1(\pm 0,5l_1, \tau) \Big|_0^{h_1} = T_2(0, \tau) \Big|_0^{h_1}.$$

Остання умова пов'язує рівняння (2) та (3) у одну систему, розв'язання якої й дасть розподілення температур у кожному з елементів в залежності від координат  $x, y, z$  та часу  $\tau$ .

Задача може бути розв'язана послідовним застосуванням методів скінченних інтегральних перетворень та Лапласа.

Враховуючи симетричність теплових потоків у паралелепіпеді вздовж осей  $X$  та  $Y$ , ядра перетворень потрібно обрати такими [1]:

$$\left. \begin{aligned} K(\mu_n, x) &= K_{\mu n} \left[ \mu_n \cos\left(\frac{\mu_n}{l_1} x\right) + \text{Bi}_1 \sin\left(\frac{\mu_n}{l_1} x\right) \right]; \\ K_{\mu n} &= \sqrt{\frac{2}{l_1}} \frac{1}{\sqrt{(\mu_n^2 + \text{Bi}_1^2) \left(1 + \text{Bi}_1 + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2 + \text{Bi}_1^2}\right)}}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} K(\mu_m, y) &= K_{\mu m} \left[ \mu_m \cos\left(\frac{\mu_m}{l_2} y\right) + \text{Bi}_2 \sin\left(\frac{\mu_m}{l_2} y\right) \right]; \\ K_{\mu m} &= \sqrt{\frac{2}{l_2}} \frac{1}{\sqrt{(\mu_m^2 + \text{Bi}_2^2) \left(1 + \text{Bi}_2 + \frac{\text{Bi}_2}{\mu_m^2 + \text{Bi}_2^2}\right)}}; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} K(\mu_k, z) &= K_{\mu k} \left[ \mu_k \cos\left(\frac{\mu_k}{h} z\right) + \text{Bi}_3 \sin\left(\frac{\mu_k}{h} z\right) \right]; \\ K_{\mu k} &= \sqrt{\frac{2}{h}} \frac{1}{\sqrt{(\mu_k^2 + \text{Bi}_3^2) \left(1 + \text{Bi}_3 + \frac{\text{Bi}_3}{\mu_k^2 + \text{Bi}_3^2}\right)}}; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$\mu_n, \mu_m, \mu_k$  – корені характеристичних рівнянь:

$$\tan \mu_n = \frac{2\mu_n \text{Bi}_1}{\mu_n^2 - \text{Bi}_1^2}; \quad \tan \mu_m = \frac{2\mu_m \text{Bi}_2}{\mu_m^2 - \text{Bi}_2^2}; \quad \tan \mu_k = \frac{2\mu_k \text{Bi}_3}{\mu_k^2 - \text{Bi}_3^2};$$

$$\text{де } \text{Bi}_1 = \frac{\alpha l_1}{\lambda}; \quad \text{Bi}_2 = \frac{\alpha l_2}{\lambda}; \quad \text{Bi}_3 = \frac{\alpha h}{\lambda}.$$

Ядра перетворень для ребра:

$$\left. \begin{aligned} K(v_n, x) &= K_{v n} \left[ v_n \cos\left(\frac{v_n}{l_3} x\right) + \text{Bi}_4 \sin\left(\frac{v_n}{l_3} x\right) \right]; \\ K_{v n} &= \sqrt{\frac{2}{l_3}} \frac{1}{\sqrt{(v_n^2 + \text{Bi}_4^2) \left(1 + \text{Bi}_4 + \frac{\text{Bi}_4}{v_n^2 + \text{Bi}_4^2}\right)}}; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} K(v_m, z) &= K_{v m} \left[ v_m \cos\left(\frac{v_m}{l_4} z\right) + \text{Bi}_5 \sin\left(\frac{v_m}{l_4} z\right) \right]; \\ K_{v m} &= \sqrt{\frac{2}{l_4}} \frac{1}{\sqrt{(v_m^2 + \text{Bi}_5^2) \left(1 + \text{Bi}_5 + \frac{\text{Bi}_5}{v_m^2 + \text{Bi}_5^2}\right)}}; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$v_n, v_m$  – корені характеристичних рівнянь:

$$\tan v_n = \frac{2v_n \text{Bi}_4}{v_n^2 - \text{Bi}_4^2}; \quad \tan v_m = \frac{2v_m \text{Bi}_5}{v_m^2 - \text{Bi}_5^2}; \quad \text{де } \text{Bi}_4 = \frac{kl_3}{\lambda}; \quad \text{Bi}_5 = \frac{kl_4}{\lambda}.$$

Інтегральне перетворення рівняння (2) з ядрами (6) – (8) за умов (4) дає його зображення  $\theta_1$  у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta_1(\mu_n, \mu_m, \mu_k, \tau)}{d\tau} + a \left( \frac{\mu_n^2}{l_1^2} + \frac{\mu_m^2}{l_2^2} + \frac{\mu_k^2}{h^2} \right) \theta_1(\mu_n, \mu_m, \mu_k, \tau) = Q(\mu_n, \mu_m, \mu_k) - \\ - a \frac{\partial K(\mu_m, x)}{\partial x} \Big|_{x=-0,5l_1} \theta_2(v_n, v_m, \tau) - a \frac{\partial K(\mu_m, x)}{\partial x} \Big|_{x=0,5l_1} \theta_2(v_n, v_m, \tau), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

де зображення джерела тепла  $Q(\mu_n, \mu_m, \mu_k)$  з щільністю  $q_0$  буде таким:

$$Q(\mu_n, \mu_m, \mu_k) = q_0 \frac{a}{\lambda h} \int_{-0,5\Delta x}^{0,5\Delta x} \int_{-0,5\Delta y}^{0,5\Delta y} \int_0^h K(\mu_n, x) K(\mu_m, y) K(\mu_k, z) dx dy dz.$$

Зображення рівняння (3) після перетворення з ядрами (9), (10) за умов (5):

$$\frac{d\theta_2(v_n, v_m, \tau)}{d\tau} + a \left( \frac{v_n^2}{l_3^2} + \frac{v_m^2}{l_4^2} + \frac{\text{Bi}}{\delta^2} \right) \theta_2(v_n, v_m, \tau) = \frac{dK(v_n, v_m, x)}{dx} \Big|_{x=0} \theta_1(\mu_n, \mu_m, \mu_k, \tau), \quad (12)$$

де критерій Біо, яким визначається інтенсивність тепловіддачі від поверхонь ребер до оточуючого середовища  $\text{Bi} = \frac{k\delta}{\lambda}$ .

Згідно з рис.3,  $a$  до вертикальних граней основи-паралелепіпеда приєднані пакети ребер, кількість яких у кожному пакеті –  $r$ , й температурне поле кожного з них визначається рівнянням (3). Таким чином, загальна система рівнянь для зображень температур:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1'(\tau) + b_1 \theta_1(\tau) + rc_1 \theta_2(\tau) = d; \\ r[\theta_2'(\tau) + b_2 \theta_2(\tau)] - c_2 \theta_1(\tau) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\text{де } b_1 = a \left( \frac{\mu_n^2}{l_1^2} + \frac{\mu_m^2}{l_2^2} + \frac{\mu_k^2}{h^2} \right); \quad b_2 = a \left( \frac{v_n^2}{l_3^2} + \frac{v_m^2}{l_4^2} + \frac{\text{Bi}}{\delta^2} \right);$$

$$c_1 = aK_{vn} \frac{v_n}{\delta} [v_n \sin(v_n) - \text{Bi} \cos(v_n)]; \quad c_2 = a_2 K_{vn} \text{Bi}_3 \frac{v_n}{\delta}.$$

Застосування перетворення Лапласа до системи рівнянь (13) дає такі вирази для їх зображень:

$$\left. \begin{aligned} sF_1(s) + b_1 F_1(s) = \frac{d}{s} - rc_1 F_2(s); \\ r[sF_2(s) + b_2 F_2(s)] = c_2 F_1(s). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Розв'язавши систему (14), одержимо вирази зображень для температур  $\theta_1(\tau)$ ,  $\theta_2(\tau)$ ; їх особливість у тому, що кожне з них повинно бути функцією коренів характеристичних рівнянь  $\mu_n, \mu_m, \mu_k, \nu_n, \nu_m$ :

$$\theta_1(\tau) = \theta_1(\mu_n, \mu_m, \mu_k, \nu_n, \nu_m, \tau); \quad \theta_2(\tau) = \theta_2(\mu_n, \mu_m, \mu_k, \nu_n, \nu_m, \tau).$$

Для зображення температури  $\theta_1(\tau)$  одержимо вираз

$$\theta_1(\mu_n, \mu_m, \mu_k, \nu_n, \nu_m, \tau) = d \frac{b_2}{p_2 p_3} \left[ 1 + \frac{p_3(p_2 + b_2)}{b_2(p_2 - p_3)} e^{p_2 \tau} + \frac{p_2(p_3 + b_2)}{b_2(p_3 - p_2)} e^{p_3 \tau} \right], \quad (15)$$

де  $p_{2,3} = -\frac{b_1 + b_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(b_1 + b_2)^2}{4} - b_1 b_2 - c_1 c_2}$ ;

а зображення для  $\theta_2(\tau)$  таке:

$$\theta_2(\mu_n, \mu_m, \mu_k, \nu_n, \nu_m, \tau) = \frac{c_2}{r b_2} \theta_1(\mu_n, \mu_m, \mu_k, \nu_n, \nu_m, \tau). \quad (16)$$

Зворотні інтегральні перетворення з використанням відповідних ядер дають такі вирази для температур основи та кожного з ребер:

$$T_1(x, y, z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} K_{\mu n} \left[ \mu_n \cos\left(\frac{\mu_n x}{l_1}\right) + \text{Bi}_1 \sin\left(\frac{\mu_n x}{l_1}\right) \right] K_{\mu m} \left[ \mu_m \cos\left(\frac{\mu_m y}{l_2}\right) + \text{Bi}_2 \sin\left(\frac{\mu_m y}{l_2}\right) \right] \times \\ \times K_{\mu k} \left[ \mu_k \cos\left(\frac{\mu_k z}{h}\right) + \text{Bi}_3 \sin\left(\frac{\mu_k z}{h}\right) \right] \theta_1(\mu_n, \mu_m, \mu_k, \nu_n, \nu_m, \tau); \quad (17)$$

$$T_2(x, z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} K_{\nu n} \left[ \nu_n \cos\left(\frac{\nu_n x}{\delta}\right) + \text{Bi}_4 \sin\left(\frac{\nu_n x}{\delta}\right) \right] \times \\ \times K_{\nu m} \left[ \nu_m \cos\left(\frac{\nu_m z}{l_4}\right) + \text{Bi}_5 \sin\left(\frac{\nu_m z}{l_4}\right) \right] \theta_2(\mu_n, \mu_m, \mu_k, \nu_n, \nu_m, \tau). \quad (18)$$

Розрахунки за вказаними формулами дадуть “точні” значення температур кожної координатної точки як основи радіатора, так й точок його ребер. Якщо початкові температури радіатора й ребер не дорівнюють нулю, вони повинні бути задані у вигляді відповідних функцій  $T_1(x, y, z, 0)$  та  $T_2(x, z, 0)$ , чи як усереднені за об’ємами основи чи ребра; значення цих початкових температур слід додавати у вирази (11), (12) як окремі доданки.

Для стаціонарного режиму (тобто за  $\tau = \infty$ ,  $\theta_1(\mu_n, \mu_m, \mu_k, \tau) = 1$ ,  $\theta_2(\nu_n, \nu_m, \tau) = 1$ )

температури основи та ребер, згідно з формулами (17), (18) такі:

$$T_1(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} K_{\mu n} \left[ \mu_n \cos\left(\frac{\mu_n}{l_1} x\right) + \text{Bi}_1 \sin\left(\frac{\mu_n}{l_1} x\right) \right] K_{\mu m} \left[ \mu_m \cos\left(\frac{\mu_m}{l_2} y\right) + \text{Bi}_2 \sin\left(\frac{\mu_m}{l_2} y\right) \right] \times \\ \times K_{\mu k} \left[ \mu_k \cos\left(\frac{\mu_k}{h} z\right) + \text{Bi}_3 \sin\left(\frac{\mu_k}{h} z\right) \right] \frac{db_2}{p_2 p_3}; \quad (19)$$

$$T_2(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} K_{\nu m} \left[ \nu_m \cos\left(\frac{\nu_m}{\delta} x\right) + \text{Bi}_3 \sin\left(\frac{\nu_m}{\delta} x\right) \right] \times \\ \times K_{\nu m} \left[ \nu_m \cos\left(\frac{\nu_m}{l_4} z\right) + \text{Bi}_5 \sin\left(\frac{\nu_m}{l_4} z\right) \right] \frac{dc_2}{p_2 p_3}. \quad (20)$$

Особливість рівнянь (17) – (20) у тому, що у вирази зображень  $\theta_1(\tau)$  та  $\theta_2(\tau)$  входять параметри  $p_1$  та  $p_2$ , кожний з яких є функцією коренів  $\mu_n$ ,  $\mu_m$ ,  $\mu_k$ ,  $\nu_n$  та  $\nu_m$ , причому, як вимагає фізичний зміст рівнянь (17), (18) та логічні міркування, значення  $p_1$  та  $p_2$  повинні бути від’ємними – температури не можуть бути безкінечно великими.

У початковий момент часу ( $\tau = 0$ ) повинні виконуватися умови:  $T_1(x, y, z, 0) = 0$ ,  $T_2(x, z, 0) = 0$ , а з рівняння (15) випливає:

$$\frac{p_2(p_1 + b_2)}{b_2(p_1 - p_2)} + \frac{p_1(p_2 + b_2)}{b_2(p_2 - p_1)} = -1; \quad \theta_1 = 0; \quad \theta_2 = 0.$$

Якщо початкові температури радіатора й ребер не дорівнюють нулю, вони повинні бути задані у вигляді відповідних функцій  $T_1(x, y, z, 0)$  та  $T_2(x, z, 0)$ , чи як усереднені за об’ємами основи чи ребра; значення цих початкових температур потрібно додавати у вирази (17) – (20) як окремі доданки.

### **Імовірнісні характеристики параметрів нестационарних теплових процесів**

Всі розглянуті теплові процеси – стохастичні явища, тому їх математичні моделі а також й одержані рішення повинні мати імовірнісні характеристики, основані на стохастичній природі фізичних величин, які увійшли як у рівняння моделей, так і у кінцеві рішення [3].

Рівняння (17) – (20) – стохастичні функції внаслідок стохастичних параметрів величин, які до них входять: теплофізичних коефіцієнтів  $a$  та  $\lambda$ , коефіцієнтів тепловіддачі  $\alpha$  та  $k$ , коренів характеристичних рівнянь  $\mu_n$ ,  $\mu_m$ ,  $\mu_k$ ,  $\nu_n$  та  $\nu_m$ , коефіцієнтів з рівнянь (15) – (16).

У цих рівняннях стохастичними величинами у першу чергу є:

- коефіцієнт температуропровідності  $a = \lambda/c\gamma$ ;
- коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$ ;



- коефіцієнт кінематичної в'язкості  $\nu$ ;
- теплоємність матеріалу  $c$ ;
- коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha$ ;
- густина матеріалу  $\gamma$ ;
- теплова потужність джерела  $Q_i$ .

Таким чином, у рівняннях (16) – (20) стохастичними також будуть  $\mu_n$ ,  $\mu_m$  – корені характеристичних рівнянь:

$$\tan \mu_n = \frac{2\mu_n \text{Bi}_1}{\mu_n^2 - \text{Bi}_1^2}; \quad \tan \mu_m = \frac{2\mu_m \text{Bi}_2}{\mu_m^2 - \text{Bi}_2^2}; \quad \text{Bi}_1 = \frac{\alpha l_1}{\lambda}; \quad \text{Bi}_2 = \frac{\alpha l_2}{\lambda},$$

тому, що критерії  $\text{Bi}$  – стохастичні функції.

Таким чином, першоджерелом стохастичності всіх параметрів теплових процесів у РЕА та її функціональних показників є стохастичність теплофізичних властивостей матеріалів. На жаль, імовірнісні характеристики для них у довідковій літературі, як правило, не наводяться, тому необхідно довільно задавати допуски на їх межі.

Відповідно й всі температури  $T_i$ , одержані як результати розв'язання рівнянь математичних моделей, також повинні бути стохастичними функціями. Строго кажучи, стохастичними необхідно вважати також і геометричні параметри – розміри  $l_1, l_2, h$ , а також і координати  $x, y$  положення джерел тепла  $Q_i$  на основі ДП чи МЗБ.

Стохастична природа фізичних величин, самих процесів та й одержаних параметрів призводить до того, що одержати результати, які мають практичну цінність, достатньо складно. Це становище можливо спростити наступним чином:

- у кінцевих формулах для розрахунків температур обрати параметри, значення яких мають найбільшу дисперсію (звичайно це коефіцієнти тепловіддачі та теплофізичні властивості конструкційних матеріалів);
- визначити для них імовірнісні характеристики чи задати їх примусово;
- за відомими формулами теорії імовірності [3] розрахувати імовірнісні чи числові характеристики (математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення) кінцевих функціональних показників (температур), для яких будуть одержані межі реальних значень.

Якщо первинні величини чи функції  $Y_1, \dots, Y_n$  незалежні (найчастіший випадок), а щільності розподілу їх відповідають нормальному закону, для температури  $T = \varphi(Y_1, \dots, Y_n)$ :

- щільність розподілу:  $f_T = f(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f(y_i)$ ;
- математичне сподівання:

$$m_T = M[\varphi(Y_1, \dots, Y_n)] = \int \int \dots \int \varphi(Y_1, \dots, Y_n) f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n; \quad (21)$$

– дисперсія:

$$D_T = D[\varphi(Y_1, \dots, Y_n)] = \int \int \dots \int [\varphi(Y_1, \dots, Y_n) - m_T]^2 f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n; \quad (22)$$

– середньоквадратичне відхилення:  $\sigma_T = \sqrt{D_T}$ .

У випадку, коли існує імовірність взаємних впливів між деякими з розглянутих стохастичних величин чи функцій, необхідно відобразити ці зв'язки у вигляді кореляційних функцій, які для двох будь-яких функцій  $Y_i$  та  $Y_j$  записують так [3]:

$$K_{Y_i Y_j} = M[Y_i Y_j] = \int \int (\varphi_i - m_{Y_i})(\varphi_j - m_{Y_j}) f(\varphi_i, \varphi_j) d\varphi_i d\varphi_j.$$

у вираз дисперсії  $D_T$  увійдуть кореляційні функції:

$$D_T = \sum_{i=1}^n a_i^2 D_{Y_i} + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{Y_i Y_j}.$$

Якщо величини  $Y_1, \dots, Y_n$  не корельовані, усі  $K_{Y_i Y_j} = 0$ .

Слід сподіватися, що найменшу дисперсію й найменший вплив на кінцеві результати будуть давати відхилення геометричних параметрів конструкції, а найбільший – невизначеність теплофізичних параметрів матеріалів та процесів конвективного теплообміну.

### **Обчислювальні аспекти розрахунків температур та визначення їх імовірнісних та числових характеристик**

Розрахунки температур корпусу МС процесора ПЕОМ за рівняннями (17), (19) вимагають застосування потужних математичних пакетів, (наприклад *Mathcad*, *MATLAB*) та ПЕОМ високої швидкодії, тому що для досягнення точності результатів може знадобитися враховувати відносно велике число складових у рівняннях та обчислювати відповідне ним число коренів характеристичних рівнянь  $\mu_n, \mu_m, \mu_k, \nu_n, \nu_m$ .

Спроба розрахувати температури МС процесора *Celeron CPU 3.33 GHz* персональної ЕОМ у процесі розігріву за рівнянням (17) та стаціонарної за рівнянням (19) пакетом *Mathcad 14* не призвела до успіху – процес розрахунку продовжувався декілька годин, але результату не вдалося дочекатися.

Такі ж труднощі виникають при розрахунках імовірнісних характеристик за формулами (21), (22) – якщо кратність інтегралів більше трьох, *Mathcad* не може їх обчислити за прийнятний час.

Таким чином, для розрахунків температур подібних систем математичні пакети (*Mathcad*) непридатні; з цією метою необхідно створювати програмні модулі у інтегрованих середовищах типу *C++Builder*; до того ж, та-

кі модулі можуть бути складовою частиною систем автоматизованого проектування.

### Висновки

1. Одержані математичні моделі нестационарного теплового поля у елементах конструкцій РЕЗ, що у тепловому відношенні являють собою декілька пов'язаних один з одним об'єктів; ці моделі представляються системами з декількох диференціальних рівнянь. Розв'язання таких систем можна одержати послідовним застосуванням перетворень скінченно-інтегральних та Лапласа.

2. Показано, що обчислення температур для таких об'єктів за одержаними відносно складними виразами, може провадитися тільки за допомогою математичних пакетів для ПЕОМ (*MathCad*, *MATLAB*) чи спеціалізованих програмних модулів, створених у інтегрованих програмних середовищах (наприклад, *C++Builder*).

3. Визначено, що аналітичні рішення для розрахунків температур у елементах структурно-конструктивних модулів РЕЗ при нестационарних теплових процесах найбільший ефект дадуть у комплексах систем автоматизованого проектування, коли для досягнення найвищих функціональних показників необхідно провадити оптимізацію конструкції, а при цьому значення параметрів потрібно обчислювати багатократно.

4. Визначена стохастична природа теплових нестационарних процесів, що може бути враховано введенням у кінцеві результати імовірнісних характеристик всіх (чи найвпливовіших) величин, які входять у вихідне рівняння математичної моделі.

### Література

1. Лыков А.В. Теплообмен (Справочник). 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
2. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. – Учеб. пособие для вузов. В 2-х частях. – М.: Высш. школа, 1982. – 327 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей – 8-е изд. – М.: Высш. шк., 2002 – 576 с.

*Уваров Б.М. Методика розрахунку теплового режиму охолоджувача процесора ПЕОМ* Запропонована математична модель процесу тепловідводу для охолоджувача процесора ПЕОМ, яка являє собою систему двох диференціальних рівнянь. Наведена узагальнена тепла схема охолоджувача. Аналітичне розв'язання рівнянь проведено послідовно методами скінченних інтегральних перетворень та перетворення Лапласа. Теплові процеси розглянуті як стохастичні явища, тому кінцеві формули для розрахунків температур подані як функції з імовірнісними показниками. Визначено, що для розрахунків температур потрібні сучасні математичні пакети чи спеціально створені програмні модулі.

**Ключові слова:** радіоелектронні засоби, складні структурні об'єкти, математичні моделі, скінченні інтегральні перетворення, мовірнісні функції

*Уваров Б.М. Методика расчета теплового режима охладителя процессора ПЭВМ* Предложена математическая модель процесса теплоотвода для охладителя процессора ПЭВМ в виде системы двух дифференциальных уравнений. Приведена обо-

бщенная тепловая схема охладителя. Аналитическое решение уравнений проведено последовательно методами конечных интегральных преобразований и преобразования Лапласа. Тепловые процессы рассмотрены как стохастические явления, поэтому формулы для расчетов температур представлены функциями с вероятностными показателями. Показано, что для расчетов температур нужны современные математические пакеты или специально созданные программные модули.

**Ключевые слова:** радиоэлектронные средства, сложные структурные объекты, математические модели, конечные интегральные преобразования, вероятностные функции

*Uvarov B.M. A technique of account of a thermal mode coolers of the processor of personal electronic computer. The mathematical model of process a thermal of the processor of personal electronic computer as system of two differential equations is offered. The generalized thermal circuit scheme is given. The analytical decision of the equations is carried ou consistently by methods of final integrated transformations and Laplace-transformation. The thermal processes are considered as the stochastic phenomena, therefore formulas for accounts of temperatures are submitted by functions with probability by parameters. Is shown, that the modern mathematical packages or specially created program modules are necessary for accounts of temperatures.*

**Keywords:** radioelectronic means, difficult structural objects, mathematical models, final integrated transformations, probabilityes function