
РАДІОТЕХНІЧНІ КОЛА ТА СИГНАЛИ

УДК 621.3.01:621.372

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦ ПАРАМЕТРОВ И АНАЛИЗ СХЕМ
ПОСЛЕ ЗАМЫКАНИЯ И РАЗМЫКАНИЯ
ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА ВЕТВЕЙ

Сташук В. Д., к. т. н., профессор
Университет «Украина», Киев, Украина

CONVERSION OF MATRICES PARAMETERS AND THE CIRCUIT ANALYSIS
AFTER CLOSING AND BREAKING THE ARBITRARY NUMBER OF BRANCHES

Stashuk V. D., Doctor of Science (Technics), Professor
University «Ukraine», Kyiv, Ukraine

Постановка задачи.

В электрических расчетах может возникать необходимость анализировать схемы, полученные путем замыкания и (или) размыкания произвольных ветвей в исходной схеме [1–6]. Например, напряжение эквивалентного генератора равно напряжению холостого хода, а внутреннее сопротивление — отношению напряжения холостого хода к току короткого замыкания на выходе активного двухполюсника.

В режимах холостого хода (х.х.) и короткого замыкания (к.з.) можно определять параметры проходных четырехполюсников. Если принять $i_b = 0, u_b = u_x$ (режим х.х. на выходе четырехполюсника) в уравнениях четырехполюсника

$$\begin{aligned} i_a &= g_{11}u_a + g_{12}u_b, & \begin{cases} u_a = r_{11}i_a + r_{12}i_b, \\ u_b = r_{21}i_a + r_{22}i_b; \end{cases} & \begin{cases} u_a = h_{11}i_a + h_{12}u_b, \\ i_b = h_{21}i_a + h_{22}u_b; \end{cases} \\ i_b &= g_{21}u_a + g_{22}u_b; & \begin{cases} i_a = f_{11}u_a + f_{12}i_b, \\ u_b = f_{21}u_a + f_{22}i_b; \end{cases} & \begin{cases} u_a = a_{11}u_b + a_{12}i_b, \\ i_a = a_{21}u_b + a_{22}i_b, \end{cases} \end{aligned}$$

получим:

$$r_{11} = \frac{u_a}{i_a}, r_{21} = \frac{u_x}{i_a}; \quad f_{11} = \frac{i_a}{u_a}, f_{21} = \frac{u_x}{u_a}; \quad a_{11} = \frac{u_a}{u_x}, a_{21} = \frac{i_a}{u_x}.$$

Принимая поочередно $i_a = 0, u_b = 0, u_a = 0$, можно определить остальные параметры.

Полагая в уравнении многополюсника

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_n \end{bmatrix} = [Y] \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix},$$

где матрица параметров

$$[Y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix},$$

все напряжения равными нулю, кроме одного $u_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ (режим к.з. на входах многополюсника), находим параметры k -го столбца как отношения токов полюсов к напряжению u_k .

Для нахождения токов и напряжений в режимах холостого хода (х.х.) и короткого замыкания (к.з.) надо фактически анализировать две разные схемы, одна из которых получена из исходной схемы при размыкании ветвей, а вторая — при замыкании ветвей. Если задана матрица проводимостей исходной схемы $[Y]$, то при размыкании ветви между g -ым и h -ым узлами получим матрицу $[Y]_{\text{х.х.}}$, положив $Y_{gh} = Y_{hg} = 0$ в $[Y]$. Однако, после замыкания ветви между g -м и h -м узлами $Y_{gh} = Y_{hg} \rightarrow \infty$ и определитель $|Y|$ матрицы $[Y]$ также стремиться к бесконечности. С другой стороны, если задана матрица сопротивлений $[Z]$ исходной схемы, то при замыкании ветви, которая расположена в g -ом и в h -ом контурах, получим матрицу $[Z]_{\text{к.з.}}$, положив $Z_{gh} = Z_{hg} = 0$ в $[Z]$. А после размыкания этой ветви $Z_{gh}, Z_{hg} \rightarrow \infty$ и $|Z| \rightarrow \infty$, где $|Z|$ — определитель матрицы $[Z]$. Таким образом, надо иметь или две матрицы параметров $[Y]$ и $[Z]$ исходной схемы, или составлять матрицы двух схем, одну для режима к.з., а другую для режима х.х.

В [1] получены выражения для функций схемы при замыкании и размыкании одного сопротивления — сопротивления нагрузки, исходя либо из матрицы сопротивлений, либо из матрицы проводимостей схемы. Цель настоящей статьи — обосновать возможность анализа электрических схем при замыкании и размыкании произвольного числа ветвей, пользуясь одной из матриц параметров исходной схемы.

Теоретический анализ.

Теорема: Определитель $|W|$ содержащий в s строках элементы вида $W_{ij} + k_i w$, где $i = 1, \dots, s$, является при $w \rightarrow \infty$ бесконечно большой величиной порядка R , где R ранг матрицы $[k_i]$, составленной из s строк опреде-

лителя $|W|$, в которых элементы $W_{ij} + k_i w$ заменены числами k_i , а остальные элементы нулями.

Доказательство: Если ранг матрицы $[k_i]$ равен R , то R строк из s являются линейно независимыми, а остальные $(s - R)$ зависят от первых. Поэтому, прибавляя к каждой из $(s - R)$ некоторые линейные комбинации из остальных строк, можно все элементы строк $(s - R)$ обратить в нули. Прделав такие же преобразования с $(s - R)$ строками определителя $|W|$, можно исключить в них элементы $k_i w$, после чего останется R строк (a, b, \dots, r) , содержащих величины $k_i w$.

Рассмотрим предел

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{|W|}{w^R} = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{1}{w^R} \begin{vmatrix} w_{11} \dots & w_{1\alpha} \dots & w_{1\beta} \dots & w_{1\gamma} \dots & w_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{a1} \dots & (w_{a\alpha} + k_\alpha w) \dots & w_{a\beta} \dots & w_{a\gamma} \dots & w_{an} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{b1} \dots & w_{b\alpha} \dots & (w_{b\beta} + k_\beta w) \dots & w_{b\gamma} \dots & w_{bn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{r1} \dots & w_{r\alpha} \dots & w_{r\beta} \dots & (w_{r\gamma} + k_\gamma w) \dots & w_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} \dots & w_{n\alpha} \dots & w_{n\beta} \dots & w_{n\gamma} \dots & w_{nn} \end{vmatrix}$$

Умножив элементы каждой из R строк, содержащих величины $k_i w$, на w^{-1} и, перейдя к пределу $w \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{|W|}{w^R} = \begin{vmatrix} w_{11} \dots & w_{1\alpha} \dots & w_{1\beta} \dots & w_{1\gamma} \dots & w_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & k_\alpha \dots & 0 \dots & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & 0 \dots & k_\beta \dots & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & 0 \dots & 0 \dots & k_\gamma \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} \dots & w_{n\alpha} \dots & w_{n\beta} \dots & w_{n\gamma} \dots & w_{nn} \end{vmatrix} = |W|_{(R)}.$$

Полученный определитель $|W|_{(R)}$ разложим по R строкам (a, b, \dots, r) , используя теорему Лапласа [7]. Поскольку строки a, b, \dots, r линейно независимы, то, по крайней мере, один из миноров порядка R , расположенный в этих строках, не будет равен нулю. Поэтому $|W|_{(R)} \neq 0$, следовательно, определитель $|W|$ является бесконечно большой величиной порядка R , что требовалось доказать.

Согласно правилу Крамера [7], искомые величины выражаются отношениями определителей

$$x_i = \frac{\Delta_\varphi}{\Delta_\psi}.$$

Если $\Delta_\varphi \rightarrow \infty$ и $\Delta_\psi \rightarrow \infty$, то x_i можно найти так. Составим вспомогательные матрицы $[k_i]$ для числителя и знаменателя и находим их ранги R_φ и R_ψ . Если $R_\psi > R_\varphi$, то $x_i \rightarrow 0$. Если $R_\psi < R_\varphi$, то $x_i \rightarrow \infty$. Если $R_\psi = R_\varphi = R$, то Δ_φ и Δ_ψ преобразуются так, чтобы в них осталось по R строк, содержащих элементы вида $(w_{ij} + k_i w)$. Затем эти элементы заменяются числами k_i , а остальные элементы в этих строках приравниваются нулю.

Примеры анализа.

Пусть задана матрица проводимостей исходной схемы $[Y]$. Включим между g -ым и h -ым узлами двухполюсник с проводимостью y . Тогда определитель матрицы $|Y|$ приобретет вид:

$$|Y| = \begin{vmatrix} y_{11} \dots & y_{1g} \dots & y_{1h} \dots & y_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{g1} \dots & y_{gg} + y \dots & y_{gh} - y \dots & y_{gn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{h1} \dots & y_{hg} - y \dots & y_{hh} + y \dots & y_{hn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} \dots & y_{ng} \dots & y_{nh} \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

Если $y \rightarrow \infty$, получим короткое замыкание g -го и h -го узлов. Найдем потенциал k -го узла (1) при условии, что $k \neq g, h$, см. [1, 6].

Согласно доказанной теореме оба определителя являются бесконечными величинами первого порядка. Действительно, сложив g -ый столбец с h -ым, можно исключить y в элементах g -го столбца, после чего останется только один h -ый столбец, который содержит элементы с y . Перейдя к пределу, получим (2):

$$\Phi_k = \lim_{y \rightarrow \infty} \begin{vmatrix} y_{11} \cdots & y_{1g} \cdots & y_{1h} \cdots & J_1 & y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{g1} \cdots & y_{gg} + y \cdots & y_{gh} - y \cdots & J_g & y_{gn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{h1} \cdots & y_{hg} - y \cdots & y_{hh} + y \cdots & J_h & y_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} \cdots & y_{ng} \cdots & y_{nh} \cdots & J_n & y_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$\Phi_{k,к.з.} = \begin{vmatrix} y_{11} \cdots & (y_{1g} + y_{1h}) \cdots & 0 \cdots & J_1 & y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{g1} \cdots & (y_{gg} + y_{gh}) \cdots & -1 \cdots & J_g & y_{gn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{h1} \cdots & (y_{hg} + y_{hh}) \cdots & 1 \cdots & J_h & y_{hn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} \cdots & (y_{ng} + y_{nh}) \cdots & 0 \cdots & J_n & y_{nn} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Сложив g -ую строку с h -ой, и разложив определитель за h -му столбцу, окончательно получим:

$$\Phi_{k,k.з.} = \frac{\begin{vmatrix} y_{11}\dots\dots\dots & (y_{g1} + y_{h1})\dots & J_1\dots & y_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ (y_{g1} + y_{h1})\dots & (y_{gg} + y_{gh} + y_{hg} + y_{hh})\dots & (J_g + J_h)\dots & (y_{gn} + y_{hn}) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ y_{n1}\dots & (y_{ng} + y_{nh})\dots & J_n\dots & y_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11}\dots\dots\dots & (y_{g1} + y_{h1})\dots & y_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ (y_{g1} + y_{h1})\dots & (y_{gg} + y_{gh} + y_{hg} + y_{hh})\dots & (y_{gn} + y_{hn}) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ y_{n1}\dots & (y_{ng} + y_{nh})\dots & y_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{|Y|_{(k \rightarrow J)(g+h)h}^{(g+h)h}}{|Y|_{(g+h)h}^{(g+h)h}}. \quad (3)$$

Здесь и дальше верхние индексы относятся к строкам, а нижние к столбцам. Индексы в скобках показывают проведенные превращения строк и столбцов в исходном определителе, а единичные индексы показывают номера вычеркнутых строк и столбцов. Если $k = g, h$, то аналогично получим:

$$\phi_{g,k.з.} = \phi_{h,k.з.} = \frac{|Y|_{(g \rightarrow J)h}^{(g+h)h}}{|Y|_{(g+h)h}^{(g+h)h}} = \frac{|Y|_{(h \rightarrow J)h}^{(g+h)h}}{|Y|_{(g+h)h}^{(g+h)h}}. \quad (4)$$

Найдем теперь ток короткого замыкания

$$i_{k.з.} = \lim_{y \rightarrow \infty} y \cdot (\phi_g - \phi_h) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} y \cdot \frac{\begin{vmatrix} y_{11}\dots & J_1 & y_{1h}\dots & y_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ y_{g1}\dots & J_g & y_{gh} - y\dots & y_{gn} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ y_{h1}\dots & J_h & y_{hh} + y\dots & y_{hn} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ y_{n1}\dots & J_n & y_{nh}\dots & y_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11}\dots & y_{1g}\dots & J_1 & y_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ y_{g1}\dots & y_{gg} + y\dots & J_g & y_{gn} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ y_{h1}\dots & y_{hg} - y\dots & J_h & y_{hn} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ y_{n1}\dots & y_{ng}\dots & J_n & y_{nn} \end{vmatrix}}. \quad (5)$$

Переставив во втором определителе числителя g - и h - ий столбцы, и сложив оба определителя, получим:

$$i_{к.з.} = \frac{\begin{vmatrix} y_{11}\dots & J_1 & (y_{1h} + y_{1g})\dots & y_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ y_{g1}\dots & J_g & (y_{gh} + y_{gg})\dots & y_{gn} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ y_{h1}\dots & J_h & (y_{hh} + y_{hg})\dots & y_{hn} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ y_{n1}\dots & J_n & (y_{nh} + y_{ng})\dots & y_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11}\dots & & (y_{1h} + y_{1g})\dots & y_{1n} \\ \dots\dots & & \dots\dots & \dots \\ (y_{h1} + y_{g1})\dots & & (y_{gg} + y_{gh} + y_{hg} + y_{hh})\dots & y_{gn} \\ \dots\dots & & \dots\dots & \dots \\ y_{n1}\dots & & (y_{nh} + y_{ng})\dots & y_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{|Y|_{(g \rightarrow J)(h+g)}}{|Y|_{(g+h)h}}. \quad (6)$$

Если задана матрица Z - параметров исходной схемы, то можно получить дуальные соотношения [1], аналогичные к формулам (1, 6).

В общем случае при замыкании произвольного числа узловых пар применение теоремы также позволяет найти потенциалы всех узлов и токи всех ветвей, замкнутых ветвей включительно. Для этого надо к соответствующим элементам определителя, по которым рассчитываются искомые величины, прибавить с должным знаком величины y и перейти к пределу $y \rightarrow \infty$, применив теорему.

Выводы

Доказана теорема, которая позволяет определять порядок величины определителя, у которого величина произвольного количества элементов растет бесконечно. Разработан метод анализа электрических схем после замыкания и размыкания произвольного количества ветвей, используя лишь одну из матриц параметров (проводимостей или сопротивлений) исходной схемы.

Литература

1. Сигорский В. П. Основы теории электронных схем / В. П. Сигорский, А. И. Петренко. — К. : Вища школа, 1971. — 568 с.
2. Сигорский В. П. Анализ электронных схем / В. П. Сигорский. — К. : Гос. Изд. Техн. Лит. УССР, 1964. — 199 с.
3. Атабеков Г. И. Теория линейных электрических цепей / Г. И. Атабеков. — М. : Сов. Радио, 1960. — 718 с.
4. Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. — Л. : Энергоиздат, 1981. — 536 с.

5. Сташук В. Д. Радіоелектронні кола і пристрої / В. Д. Сташук. — К. : Університет «Україна», 2007. — 357 с.
6. Сташук В. Д. Теорія і комп'ютерне моделювання радіоелектронних кіл / В. Д. Сташук. — К. : Університет «Україна», 2011. — 379 с.
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1975. — 432 с.

References

1. Sigorskij V. P., Petrenko A. I. (1971) *Osnovy teorii jelektronnyh shem* [Bases of the theory of electronic circuits]. Kiev, Vishha shkola Publ., 568 p.
2. Sigorskij V. P. (1964) *Analiz jelektronnih shem* [Analysis of electronic circuits]. Kiev, Gos. Izd. Tehn. Lit. USSR, 199 p.
3. Atabekov G. I. (1960) *Teoriya linejnyh jelektricheskikh cepej* [The theory of linear electrical circuits]. Moscow, Sov. Radio Publ., 718 p.
4. Nejman L. R., Demirchjan K. S. (1981) *Teoreticheskie osnovy jelektrotehniki* [Theoretical bases of electrical engineering]. Leningrad, Energoizdat Publ. 536 p.
5. Stashuk V. D. (2007) *Radioelektronni kola i prystroi* [Electronic circles and devices]. Kyiv, Universytet «Ukraina» Publ., 357 p.
6. Stashuk V. D. (2011) *Teoriia i kompiuterne modeliuvannia radioelektronnykh kil* [Theory and computer simulation of radio-electronic circuits]. Kyiv, Universytet «Ukraina» Publ., 379 p.
7. Kurosh A. G. (1975) *Kurs vysshej algebrы* [Course of Higher Algebra]. Moscow, Nauka Publ., 432 p.

Сташук В. Д. Перетворення матриць параметрів і аналіз схем після замикання і розмикання довільного числа віток. Доведено теорему, яка дозволяє визначати порядок величини визначника, у якого величина довільної кількості елементів нескінченно зростає. Запропоновано метод аналізу електричних схем при замиканні і розмиканні довільного числа віток, користуючись однією з матриць параметрів вихідної схеми, коли величини окремих параметрів, опорів чи провідностей, зростають до нескінченності.

Ключові слова: аналіз, електричні схеми, режими замикання і розмикання, матриці параметрів.

Сташук В. Д. Преобразование матриц параметров и анализ схем после замыкания и размыкания произвольного числа ветвей. Доказана теорема, которая позволяет определять порядок величины определителя, у которого величина произвольного количества элементов растет бесконечно. Предложен метод анализа электрических схем при замыкании и размыкании произвольного числа ветвей, пользуясь одной из матриц параметров исходной схемы, когда величины отдельных параметров, сопротивлений или проводимостей, стремятся к бесконечности.

Ключевые слова: анализ, электрические схемы, режимы замыкания и размыкания, матрицы параметров.

Stashuk V. D. Conversion of matrices parameters and the circuit analysis after closing and breaking the arbitrary number of branches. The theorem allowing to define the magnitude order of determinant with infinite value growing of arbitrary quantity of elements is proved. The method of electric circuit analysis after closing and breaking of arbitrary quantity of branches is developed using only one of matrices parameters (conductivity or resistance) the initial circuit. Circuit analysis examples after closing of branch are given, using a matrix of conductivities of the initial circuit. Generally, closing arbitrary number of nodal couples theorem application also allows to find potentials of all nodes and currents of

all branches, closed branches inclusively. For this purpose it is necessary to add to the appropriate elements of determinant y value with due sign and to pass to a limit applying the theorem. If the matrix of Z - parameters of the initial circuit is set it is possible to receive dual results, using the proved theorem.

Keywords: *analysis, electric scheme, modes of shorting and breaking, matrix of parameters.*