

ОБЛАСТИ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ  
НЕКОТОРЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Каширский И.С.

В статье доказано, что существуют области эквивалентности методов конечных разностей и конечных элементов, которые используются для расчетов полей в радиотехнических задачах. Полученные результаты дают основания предполагать, что область эквивалентности этих методов может быть значительно шире.

Для численного расчета полей в радиоустройствах применяются два основных класса методов – конечных разностей (КР) [1,2] и конечных элементов (сплайнов) (КЭ) [3,4]. Ниже рассматриваются общие свойства этих методов, приводящие в ряде случаев к их эквивалентности.

Рассмотрим классическую двумерную задачу численного решения дифференциального уравнения с частными производными

$$P(x,y)(\partial^2 u/\partial x^2) + Q(x,y)(\partial^2 u/\partial y^2) = f(x,y) \quad (1)$$

В методе КР уравнение заменяется аппроксимационной моделью

$$P(x,y)\mathcal{L}_{mn}(\partial^2 u/\partial x^2) + Q(x,y)\mathcal{L}_{mn}(\partial^2 u/\partial y^2) = \mathcal{L}_{mn}(f(x,y)), \quad (2)$$

где  $m, n$  определяют дискретную сетку ( $m=0, \dots, M; n=0, \dots, N$ ) с шагом  $h$ ,  $\mathcal{L}_{mn}$  – формулы аппроксимации выражений на дискретной сетке.

Так, применяя известные формулы аппроксимации [1], получим

$$\mathcal{L}_{mn}(\partial^2 u/\partial x^2) = (u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n})/h^2; \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_{mn}(\partial^2 u/\partial y^2) = (u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1})/h^2; \quad \mathcal{L}_{mn}(f(x,y)) = f(mh, nh),$$

приводим уравнение (2) к системе линейных уравнений

$$DU = h^2 F + U0, \quad (4)$$

где  $D$  – ленточная матрица коэффициентов;  $F$  – вектор значений  $f(mh, nh)$ ;  $U$  – вектор неизвестных значений поля  $u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{M,N}$ ;  $U0$  – вектор граничных условий на границе области расчета, включающий заданные значения  $u_{m,0}, u_{m,N}, u_{0,n}, u_{M,n}$  ( $m=0, 1, \dots; n=0, 1, \dots$ ).

Решим задачу (1) методом КЭ Рунца [3]

$$\sum_k C_k \{ (P \partial \varphi_k / \partial x, \partial \varphi_k / \partial x) + (Q \partial \varphi_k / \partial y, \partial \varphi_k / \partial y) \} =$$

$$= (f, \varphi_i) - \sum_r C_r \{ (P \partial \varphi_r / \partial x, \partial \varphi_r / \partial x) + (Q \partial \varphi_r / \partial y, \partial \varphi_r / \partial y) \}, \quad (i=1, 2, \dots), \quad (5)$$

где  $\varphi_k(x,y), \varphi_r(x,y)$  – внутренние и граничные сплайны области, соответственно;  $C_k, C_r$  – высоты соответствующих сплайнов, известные из заданных граничных условий;  $(P \partial \varphi_r / \partial x, \partial \varphi_r / \partial x), (Q \partial \varphi_r / \partial y, \partial \varphi_r / \partial y)$  – скалярные произведения, как обозначения двойных определенных интегралов:

$$(v1(x,y), v2(x,y)) = \int_{g1(x)}^{g2(x)} dx \int_{s1(x)}^{s2(x)} v1(x,y)v2(x,y) dx dy.$$

После вычисления всех скалярных произведений (двойных определенных интегралов) (5) превращается в систему уравнений, подобную (4), в которой вычисляемые значения  $C_k$  соответствуют значениям поля  $u_{m,n}$ . Выберем конкретный вид сплайна  $\varphi_i(x,y)$  – пусть это будет шестигранная пирамида единичной высоты, изображенная на рис.1, в основе которой, как геометрической фигуры, лежит 6 треугольников. Сплайн описывается выражением

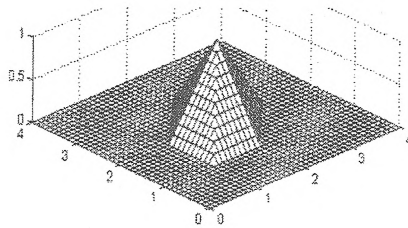


Рис.1

$$\varphi_i(x,y) = \sum_{j=1}^6 \psi_{ij}(x,y), \quad (i=1,2,\dots) \quad (6)$$

где  $\psi_{ij}(x,y)$  - уравнения шести граней-плоскостей пирамиды  $\varphi_i(x,y)$ .

Рассмотрим области эквивалентности систем уравнений (4) и (5).

1.  $P(x,y)=Q(x,y)=1; f(x,y)=0$ ; граничные условия произвольные.

Вычисление определенных интегралов в (5) с учетом (6) и сопоставление с элементами матрицы  $D$  в (4) дает следующее тождество:

$$(P\partial\varphi_k/\partial x, \partial\varphi_l/\partial x) + (Q\partial\varphi_k/\partial y, \partial\varphi_l/\partial y) =$$

$$\begin{aligned} & \int_{j=1}^6 \int_{g1(mh)}^{g2(mh)} dx \int_{s1(x,mh)}^{s2(x,mh)} ((\partial\psi_{ij}/\partial x, \partial\psi_{ij}/\partial x) + (\partial\psi_{ij}/\partial y, \partial\psi_{ij}/\partial y)) dy \equiv D_{ik}, \\ & (i=1,\dots, M; k=1,\dots, N) \end{aligned}$$

Следовательно, матрицы коэффициентов систем (4) и (5) совпадают. В геометрической интерпретации дискретные значения поля  $u_{1,1}, u_{1,2}, \dots$  уравнений (4) и высоты сплайнов  $C_1, C_2, \dots$  в методе Ритца (5) имеют одинаковый смысл, и, более того, веса этих величин в обеих системах равны.

Вычисление определенных интегралов в правой части (5) дает:

$$\begin{aligned} & \sum_r C_r \{ (P\partial\varphi_r/\partial x, \partial\varphi_r/\partial x) + (Q\partial\varphi_r/\partial y, \partial\varphi_r/\partial y) \} = \\ & \sum_r C_r \left\{ \int_{j=1}^6 \int_{g1(mh)}^{g2(mh)} dx \int_{s1(x,mh)}^{s2(x,mh)} ((\partial\psi_{rj}/\partial x, \partial\psi_{rj}/\partial x) + (\partial\psi_{rj}/\partial y, \partial\psi_{rj}/\partial y)) dy \right\} \equiv U_{0r}, \\ & (i=1, 2, \dots, N; r=r-1, r+1, \dots) \end{aligned}$$

Правые части уравнений (4) и (5) также совпадают и, таким образом, для случая 1 метод КР и метод КЭ (для шестигранной пирамиды) эквивалентны. Отсюда следует важный вывод, касающийся точности методов. Казалось бы, геометрическая фигура в виде шестигранной пирамиды несет больше информации, чем КР пяти значений  $u_{m,n}, u_{m-1,n}, u_{m+1,n}, u_{m,n-1}, u_{m,n+1}$

(3), и метод КЭ должен обеспечивать более высокую точность при одинаковом шаге  $h$ . Условие эквивалентности опровергает это предположение – методы имеют одинаковую точность. Картина шестигранных сплайнов является в этом случае геометрической интерпретацией метода КР.

2.  $P(x,y)=Q(x,y)=1; f(x,y)=const$ ; граничные условия произвольные.

Выполнение эквивалентности зависит от определенного интеграла

$$(f, \varphi_i) = \int_{g1(mh)}^{g2(mh)} dx \int_{s1(x,mh)}^{s2(x,mh)} f \varphi_i(x,y) dy = f \int_{g1(mh)}^{g2(mh)} dx \int_{s1(x,mh)}^{s2(x,mh)} \varphi_i(x,y) dy,$$

вычисление которого с учетом (6), приводит к новому тождеству

$$\sum_{j=1}^6 \int_{g1(mh)}^{g2(mh)} dx \int_{s1(x,mh)}^{s2(x,mh)} \psi_{ij}(x,y) dy = h^2$$

Т.о., вектор  $(f, \varphi_i)$ ,  $i=1, 2, \dots$  системы (5) равен вектору  $h2F$  системы (4), и эти системы уравнений остаются эквивалентными в случае 2.

3.  $P(x,y)=Q(x,y)=1; f(x,y)=ax+by+c$ ; граничные условия произвольные.

Выполнение эквивалентности, как и в случае 2, зависит от определенных интегралов системы (5)

$$(f, \varphi_i) = \int_{g1(mh)}^{g2(mh)} dx \int_{s1(x,mh)}^{s2(x,mh)} f(x,y) \varphi_i(x,y) dy$$

Опуская доказательство, приведем результат вычисления этого интеграла с учетом (6), что дает новое тождество

$$(f, \varphi_n) = \sum_{j=1}^6 \int_{g1(mh)}^{g2(mh)} dx \int_{s1(x,mh)}^{s2(x,mh)} f(x,y) \psi_{nj}(x,y) dy = h^2 f(mh, nh).$$

Т.о., вектор  $(f, \varphi_n)$ ,  $n=1, 2, \dots$  системы (5) равен вектору  $h^2F$  системы (4), и условие эквивалентности выполняется и в этом случае.

Приведенные условия эквивалентности совершенно разных методов дают основания предполагать, что при использовании более сложных (чем (3)) формул аппроксимации  $\mathcal{L}_{mn}(\partial^2 u / \partial x^2)$ ,  $\mathcal{L}_{mn}(\partial^2 u / \partial y^2)$ ,  $\mathcal{L}_{mn}(f(x,y))$ , можно установить эквивалентность методов КР и КЭ с другими видами сплайнов.

Приведенные результаты позволяют сделать выводы: 1. необходимо говорить не только о различиях, но и сходстве внешне совершенно различных методов; 2. сходство методов может переходить в эквивалентность, и тогда методы имеют одинаковые вычислительные характеристики (точность расчета, численная устойчивость и т.п.); 3. в области эквивалентности методы КЭ дают геометрическую интерпретацию методов КР в виде пространственной картины сплайнов.

#### Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. Наука, М., 1977, 656 с.

2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. Наука, М., 1978. 572 с.
3. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. Мир, М., 1977, 349 с
4. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. Мир, М., 1986, 229 с.

**Ключові слова:** чисельні методи, розрахунки електромагнітних полів, граничні задачі електродинаміки.

Каширский И.С.

Kashytsky I.S.

**Області еквівалентності деяких чисельних методів** - **The Field Of Equivalent Some Numerical Methods**

Доведено, що існують області еквівалентності методів кінцевих різниць та кінцевих елементів, які застосовуються для розрахунку полів в радіотехнічних задачах. Одержані результати дають підстави для припущення, що області еквівалентності цих методів більш широкі.

This paper describes some properties of methods for numerical solving partial differential equations. A number of identities are proved to show there are regions of equivalency for finite differences methods and finite elements Ritz-method.

УДК 538.3, 621.371

## ЕВОЛЮЦІЯ ВІДЕОІМПУЛЬСІВ, ВИПРОМІНЕНИХ ДИПОЛЕМ ГЕРЦА, ПРИ ПОШИРЕННІ У ВАКУУМІ

Найденко В.І., Пільтяй С.І.

*Розглянуто властивості полів та енергетичних характеристик. Показано, що форма відеоімпульсів у дальній зоні визначається похідною від форми імпульсу струму, поданого на диполь Герца. Енергетичні характеристики електромагнітного поля пропорційні квадрату похідної від форми імпульсу струму, поданого на диполь Герца.*

Відеоімпульси знаходять застосування у радіолокації та локації підземних об'єктів. Для їх випромінювання застосовують надширокосмугові антени, однією з яких є диполь Герца (ДГ). При застосуванні ДГ у надширокосмуговій радіолокації досліджується поле у дальній зоні. При локації підземних об'єктів досліджується, як правило, поле у проміжній зоні. У [1] доведена дисперсія поля гармонічної хвилі, випроміненої ДГ, при поширенні її у вакуумі. Метою даної роботи є дослідження еволюції відеоімпульсів, випромінених ДГ, при поширенні у вакуумі. Як і в [1] розглядаємо електричний ДГ. Результати для магнітного ДГ можна знайти за принципом переставної двоїстості. У [1] показано, що хвилі, випромінені ДГ, поширюючись у вакуумі, зазнають дисперсії. Для відновлення сигналу, що зазнав дисперсії, потрібна інформація про ступінь його спотворення. Актуальним є дослідження зміни полів та енергетичних характеристик електричного ДГ. Ці величини доцільно проаналізувати у ближній (БЗ), проміжній (ПЗ) і дальній (ДЗ) зонах випромінювання.

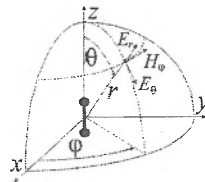


Рис. 1

Електричний ДГ зображено на рис. 1. Полярна вісь сферичної системи координат є віссю диполя. Диполь збуджується гармонічним струмом. Тоді