УДК. 621.37

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА БАЗИСОВ ВЕЙВЛЕТОВ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЧЕВЫХ СИГНАЛОВ

***Стыскун Г.М., студентка*[1]**

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина

Введение

В современных системах распознавания речи можно выделить два этапа: это этап обучения системы и некоторый этап распознавания. Оба этапа работают, как правило, в условиях ограниченных ресурсов. Поэтому на этапе обучения необходимо создать банк эталонов относительно небольшого размера, обладающий гибкой системой адресации.

Для формирования банка копий речевых сигналов необходимо выбрать такой базис представления речевых сигналов, который позволял бы, с одной стороны, хранить небольшое количество коэффициентов, а с другой стороны – обладал бы простым алгоритмом перехода от одного набора векторов базиса к другому.

С точки зрения правильной передачи физических свойств речевого сигнала разумно выбирать такие базисы, которые выделяют как частотную составляющую сигнала, так и временную локализацию частотной составляющей. Указанным требованиям к базису удовлетворяют базисы вейвлетов.

Предположим, что сигнал записан с интервалом дискретизации Δt_D. Согласно теореме Котельникова любой сигнала с неограниченным спектром может быть представлен с некоторыми потерями как сигнал с ограниченным спектром. При этом относительная ошибка аппроксимации определяется отношением нормы расхождения между сигналом и его моделью с ограниченным спектром к норме сигнала. Другим словами, рассматривается, насколько точно представляет сигнал базис Котельникова при выбранном фиксированном значении Δt_D.

В данной работе исследуется зависимость относительной ошибки аппроксимации от верхней частоты спектра, нормированной на величину масштаба, для двух типов сигналов: вейвлет-функции Хаара и вейвлета «Мексиканская шляпа».

Вейвлет-преобразование сигналов

Последние 20 лет в теории и практике обработки сигналов активно используется вейвлет-преобразование. В общетеоретическом плане это пре-

[1] Научный руководитель работы асистентка Иванюк Н.А.

образование означает представление сигнала в виде обобщенного ряда или интеграла Фурье. Коэффициенты такого ряда являются обобщенными амплитудами некоторых колебаний.

Вейвлеты позволяют выделять одновременно как низкочастотные характеристики сигнала, так и высокочастотные составляющие. Это свойство является существенным преимуществом в задачах обработки речевых сигналов по сравнению с оконным преобразованием Фурье, где, варьируя ширину окна, приходится выбирать масштаб, на котором требуется выделять особенности в сигнале.

Результатом вейвлет-преобразования одномерного ряда является двумерный массив амплитуд вейвлет-преобразования. Распределение этих значений в пространстве «временной масштаб» – «временная локализация» дает информацию об эволюции относительного вклада компонент разного масштаба во времени и называется спектром коэффициентов вейвлет-преобразования или вейвлет-спектром [1].

Вейвлет Хаара

Дискретным вейвлет-преобразованием называют представление сигналов в виде обобщенного ряда Фурье по системе базисных функций, возникающих из некоторого исходного вейвлета $\psi(t)$ за счет операций сдвига во времени и изменения временного масштаба [2].

Рассмотрим случай, когда порождающим элементом базиса служит вейвлет Хаара. Вейвлет-функция Хаара существует на отрезке [0;1] и принимает здесь одно из двух возможных значений:

$$\psi(t)=\begin{cases}1, & 0<t\le\dfrac{1}{2}\\ -1, & \dfrac{1}{2}<t\le 1\end{cases}$$

Рассмотрим преобразование Фурье вейвлет-функции Хаара. Так как преобразование Фурье сигнала $s(t)$:

$$S(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt\ ,$$

то преобразование Фурье вейвлет-функции Хаара имеет вид:

$$S_H(\omega)=\int\limits_0^{1/2}e^{-j\omega t}dt-\int\limits_{1/2}^{1}e^{-j\omega t}dt=\frac{2je^{-0{,}5j\omega}-j\left(1+e^{-j\omega}\right)}{\omega}=\frac{e^{-j0{,}5\omega}\cdot j\cdot 4\cdot\sin^2\left(\dfrac{\omega}{4}\right)}{\omega},$$

а преобразование Фурье функции

$$\psi_{ab}(t)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right):$$

$$S_{\psi_{ab}}(\omega)=S_{\psi_{a0}}(\omega)\cdot e^{-j\omega b}=\frac{|a|}{\sqrt{|a|}}\cdot S_{\psi}(a\omega)\cdot e^{-j\omega b}=\sqrt{|a|}\cdot\frac{e^{-j0{,}5a\omega}\cdot j\cdot 4\cdot\sin^2\left(\frac{a\omega}{4}\right)}{a\cdot\omega}\cdot e^{-j\omega b}.$$

Если энергетический спектр сигнала ψ_{ab}

$$W_{\psi_{ab}}(\omega)=\left|S_{\psi_{ab}}(\omega)\right|^2=\frac{16\cdot\sin^4\left(\frac{a\omega}{4}\right)}{a\cdot\omega^2},\quad a>0,$$

и энергия сигнала

$$E_{\psi_{ab}}=\left\|\psi_{ab}\right\|^2=\int\limits_{b}^{b+a/2}\left(\frac{1}{\sqrt{|a|}}\right)^2dt+\int\limits_{b+a/2}^{b+a}\left(-\frac{1}{\sqrt{|a|}}\right)^2dt=1,$$

то по теореме Рэлея [2]:

$$\left\|s_{ou}\right\|^2=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{\omega_U}^{\infty}W_{\psi_{ab}}(\omega)d\omega=E_{\psi_{ab}}-\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{0}^{\omega_U}W_{\psi_{ab}}(\omega)d\omega=1-\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(a\omega_U)^{2n+3}}{(2n+4)!\cdot(2n+3)}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2n+2}}\right).$$

Тогда относительная ошибка аппроксимации в контексте разложения вейвлета Хаара ψ_{ab} в ряд Котельникова описывается выражением:

$$\eta(\omega_U)=\frac{\left\|s_{\hat{i}ø}\right\|}{\sqrt{E_{\psi_{ab}}}}=\sqrt{1-\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(a\omega_U)^{2n+3}}{(2n+4)!\cdot(2n+3)}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2n+2}}\right)}.$$

На графиках $\eta(2\pi f_U)$ и $\lg(\eta(\omega_U))$ показана зависимость ошибки аппроксимации от верхней частоты фильтра $f_U=k/a$, $a>0$, $a=const$, $k\in[0,+\infty)$, $\omega_U=2\pi f_U$

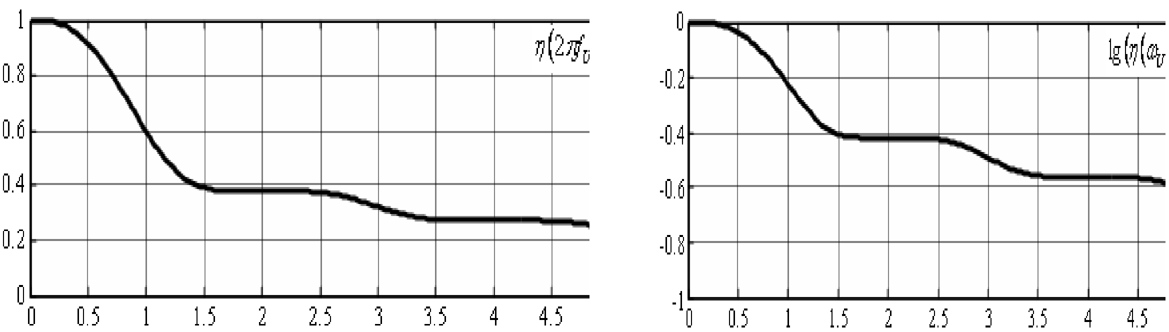


Рис. 1. Ошибка аппроксимации для вейвлета Хаара

Вейвлет "Мексиканская шляпа"

Наряду с разрывными функциями, подобными вейвлетам Хаара, можно пользоваться и непрерывными вейвлетами, построив на их основе полные аналоги преобразований Фурье [2]. Примером такой функции может служить вейвлет «сомбреро» (мексиканская шляпа):

$$\psi(t) = \left(t^2 - 1\right) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}},$$

являющийся второй производной гауссова импульса $g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Рассмотрим преобразование Фурье этой вейвлет-функции

Известно, что преобразование Фурье гауссова импульса имеет вид:

$$S_G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-j\omega t} dt = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

Так как вейвлет «сомбреро» – это вторая производная гауссова импульса, а $G(\omega) = (j\omega)^n S(\omega)$, где $S(\omega)$ – спектральная плотность сигнала $s(t)$ и $g(t) = \frac{d^n s}{dt^n}$, то преобразование Фурье вейвлета «сомбреро» имеет вид:

$$S_\psi(\omega) = (j\omega)^2 S_G(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot (j\omega)^2 \cdot e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

Найдем преобразование Фурье функции $\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$.

Так как $\psi_{a0}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \cdot \left(\left(\frac{t}{a}\right)^2 - 1\right) \cdot e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$,

а спектральная плотность сигнала $s(kt)$, есть $\frac{1}{|k|} S\left(\frac{\omega}{k}\right)$, то

$$S_{\psi_{a0}}(\omega) = \frac{|a|}{\sqrt{|a|}} \cdot S_\psi(a\omega) = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot (ja\omega)^2 \cdot e^{-\frac{(a\omega)^2}{2}}.$$

Так как $\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \left(\left(\frac{t-b}{a}\right)^2 - 1\right) \cdot e^{-\frac{(t-b)^2}{2a^2}}$, а спектральная плотность сигнала, смещенного во времени $s(t - t_0)$, есть $S(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$, то

$$S_{\psi_{ab}}(\omega) = S_{\psi_{a0}}(\omega) \cdot e^{-j\omega b} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot (ja\omega)^2 \cdot e^{-\frac{(a\omega)^2}{2}} \cdot e^{-j\omega b}.$$

Если энергетический спектр сигнала ψ_{ab}

$$W_{\psi_{ab}}(\omega)=\left|S_{\psi_{ab}}(\omega)\right|^2=2\pi\cdot a^5\cdot\omega^4\cdot e^{-a^2\omega^2},\ a>0,$$

то

$$\left\|s_{ош}\right\|^2=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{\omega_U}^{\infty}W_{\psi_{ab}}(\omega)d\omega=\frac{a\cdot\omega_U\cdot e^{-a^2\omega^2}\cdot\left(2\cdot a^2\cdot\omega_U^2+3\right)}{2}+\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\cdot erfc(a\cdot\omega_U).$$

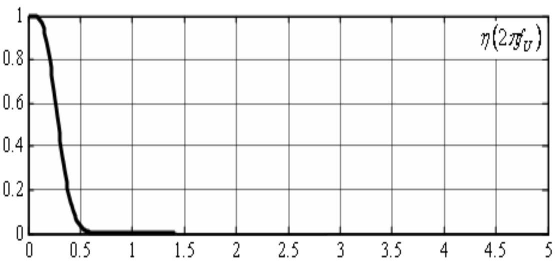
Энергия сигнала при этом равна:

$$E_{\psi_{ab}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{ab}^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{|a|}}\cdot\left(\left(\frac{t-b}{a}\right)^2-1\right)\cdot e^{-\frac{(t-b)^2}{2a^2}}\right)^2dt=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\cdot$$

Тогда относительная ошибка аппроксимации в контексте разложения вейвлета «Мексиканская шляпа» ψ_{ab} в ряд Котельникова описывается выражением:

$$\eta(\omega_U)=\frac{\left\|s_{\hat{\imath}ø}\right\|}{\sqrt{E_{\psi_{ab}}}}=\sqrt{\frac{4\cdot a\cdot\omega_U\cdot e^{-a^2\omega^2}}{3\sqrt{\pi}}\cdot\left((a\cdot\omega_U)^2+\frac{3}{2}\right)+erfc(a\cdot\omega_U)}.$$

Как и в случае с вейвлетами Хаара на графиках $\eta(2\pi f_U)$ и $\lg(\eta(\omega_U))$ показана зависимость ошибки аппроксимации от верхней частоты фильтра $f_U=k/a$, $a>0$, $a=const$, $k\in[0,+\infty]$, $\omega_U=2\pi f_U$:



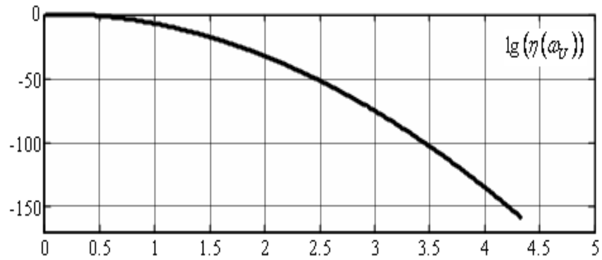


Рис. 2. Ошибка аппроксимации для вейвлета "Мексиканская шляпа".

Выводы

По результатам моделирования можно сделать вывод, что вейвлет Хаара плохо представляет сигнал с ограниченным спектром такого же масштаба. Даже в случае, когда частота равна пяти единицам частотного масштаба, величина ошибки аппроксимации примерно равна 25%. В отличие от этого для вейвлета "Мексиканская шляпа" ошибка аппроксимации спадает очень быстро и при частоте, равной уже трем единицам частотного масштаба, имеет значение порядка 10^{-75}.

Литература

1. Астафьева Н.В. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения //Успехи физических наук, – 1996. – Т.166, - №11. – С. 1145 - 1170.

2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высш. шк., – 2000. – 462с.
3. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: Изд-во ВУС. – 1999. – 180с.
4. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. –
5. Ижевск: – НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2002. – 272 с.
6. Яковлев А.Н. Основы вейвлет-преобразования сигналов,М.: Сайнс-пресс. – 2003. – 79 с.

Стискун Г.М. ***Порівняльна характеристика базисів вейвлетів для представлення мовних сигналів.*** *Вейвлети дозволяють виділяти одночасно як низькочастотні характеристики сигналу, так і високочастотні складові. Ця властивість є суттєвою перевагою в задачах обробки мовних сигналів у порівнянні з віконним перетворенням Фур'є, де, варіюючи шириною вікна, вибираємо*

масштаб, на якому потрібно виділяти особливості в сигналі. Дискретним вейвлет-перетворенням називають подання сигналів у вигляді узагальненого ряду Фур'є за системою базисних функцій, які виникають з деякого вихідного вейвлета за рахунок операцій зсуву в часі і зміни часового масштабу.

Досліджується залежність відносної помилки апроксимації від верхньої частоти спектру, нормованої на величину масштабу, для двох типівсигналів: вейвлет-функції Хаара і вейвлета «Мексиканський капелюх».

Ключові слова:*вейвлет-функція Хаара,вейвлет "Мексиканський капелюх", перетворення сигналів.*

*Стыскун Г.М.****Сравнительная характеристика базисов вейвлетов для представления речевых сигналов.*** *Вейвлеты позволяют выделять одновременно как низкочастотные характеристики сигнала, так и высокочастотные составляющие. Это свойство является существенным преимуществом в задачах обработки речевых сигналов по сравнению с оконным преобразованием Фурье, где, варьируя ширину окна, приходится выбирать масштаб, на котором требуется выделять особенности в сигнале. Дискретным вейвлет-преобразованием называют представление сигналов в виде обобщенного ряда Фурье по системе базисных функций, возникающих из некоторого исходного вейвлета за счет операций сдвига во времени и изменения временного масштаба.*

Исследуется зависимость относительной ошибки аппроксимации от верхней частоты спектра, нормированной на величину масштаба, для двух типов сигналов: вейвлет-функции Хаара и вейвлета «Мексиканская шляпа».

Ключевые слова*: вейвлет-функция Хаара, вейвлет "Мексиканская шляпа", преобразование сигналов.*

Styskun A.M. ***Comparative characteristics of the bases of wavelets to represent the speech signals.*** *Wavelets allow us to delineate both a low frequency signal characteristics, and high-frequency components. This property is a significant advantage in problems of speech signal processing in comparison with the windowed Fourier transform, where, by varying the width of the window to choose the scale at which you want to highlight features in the signal. Discrete wavelet transform called the representation of signals in the form of a generalized Fourier series in the system of basic functions that arise from some source wavelet due to shift operations in time and change the time scale. The dependence of the relative error of approximation ofthe upper frequency spectrum, normalized to the scalefor two types of signals: the wavelet function and the Haar wavelet "Mexican hat".*

Key words*: wavelet function of Haar, wavelet "Mexican hat", the conversion of signals.*