

**ВХІДНІ ІМПЕДАНСНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ДВОБАР'ЄРНИХ СТРУКТУР**

*Водолазька М. В., аспірантка; Миколайчик О. В., магістрант;
Нелін Є. А., д.т.н., професор*

*Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна,
m.vodolazka@kpi.ua*

INPUT IMPEDANCE CHARACTERISTICS OF DOUBLE BARRIER STRUCTURES

*Vodolazka M. V., Postgraduate Student; Mykolaichyk O. V., Undergraduate Student;
Nelin E. A., Doctor of Engineering, Professor*

National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine

Вступ

Двобар'єрні структури (ДБС) широко застосовують в різних технічних областях. Ключовий ефект, що спостерігається в ДБС, і який є основою функціонування різноманітних пристроїв обробки сигналів — резонансне проходження, у тому числі резонансне тунелювання, хвиль з коефіцієнтом проходження $T=1$. Квантово-механічна ДБС з резонансним тунелюванням електронів (РТЕ) [1] — базова структура наноелектроніки. ДБС з РТЕ покладено в основу резонансного тунельного діода, що характеризується від'ємним диференціальним опором та іншими нелінійними ефектами [2]. Резонансне тунелювання крізь ДБС використовують для електромагнітних [3, 4] та акустичних [5] хвиль. На основі ДБС конструюють оптичні мікро-резонатори [1, 6].

Традиційно для моделювання ДБС, як і інших хвильових структур, використовують матричний математичний апарат, що встановлює зв'язок між полями падаючої та відбитої хвиль [1, 6]. Імпедансний підхід [7, 8] дозволяє суттєво спростити вирішення, у багатьох випадках рішення має аналітичний характер. В рамках такого підходу фізичні властивості хвильової структури ілюструють імпедансні характеристики.

Метою статті є дослідження особливостей вхідних імпедансних характеристик ДБС, встановлення імпедансних умов резонансного проходження, у тому числі резонансного тунелювання, хвиль.

Дельта-модель двобар'єрної структури

На рис. 1, а і 1, б показано ДБС та її модель у вигляді двох імпедансних δ -бар'єрів. Імпедансна δ -модель структури дозволяє отримати зручні для аналізу аналітичні рішення [9]. Розглянемо бар'єри в таких середовищах: середовище 1 — квантово-механічне, хвильовий імпеданс бар'єра, нормо-

ваний до імпедансу зовнішнього середовища, визначається виразом $Z = \sqrt{(E - V)m' / Em}$, де E — енергія електрона; V — потенціальна енергія (висота бар'єра); m — ефективна маса електрона, штрих відповідає зовнішньому середовищу; середовище 2 — електромагнітне або акустичне, $Z = \text{const}$. Параметри імпедансних δ -бар'єрів у середовищах 1 і 2 позначимо нижніми індексами 1 і 2.

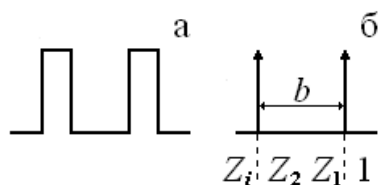


Рис. 1. ДБС та її δ -модель:
 а — ДБС; б — δ -модель
 ДБС, b — відстань між δ -бар'єрами, 1 — нормований імпеданс зовнішнього середовища, Z_1, Z_2 і Z_i — нормовані входні імпеданси правого δ -бар'єра, на правій межі лівого δ -бар'єра і ДБС.

Ефективність δ -бар'єра визначає константа α , що дорівнює його «площі». Товщина δ -бар'єра $a \rightarrow 0$. Для δ_1 -бар'єра $\alpha = Va$, $V = \alpha / a \rightarrow \infty$, $Z \rightarrow i\infty$; для δ_2 -бар'єра $\alpha = Za$, $Z = \alpha / a \rightarrow \infty$.

Знайдемо входний імпеданс ДБС (рис.1, б), послідовно визначивши імпеданси Z_1, Z_2 і Z_i .

Вхідний імпеданс δ -бар'єра визначається виразом [9]

$$Z_1 = 1 + 2i\eta. \quad (1)$$

Для δ_1 -бар'єра $\eta_1 = \alpha \sqrt{m' / 2E} / \hbar$ [9]. Аналогічно перетворенням [9], у випадку δ_2 -бар'єра маємо $\eta_2 = -\alpha k / 2$, де k — хвильове число.

Як бачимо з (1), δ -бар'єр трансформує імпеданс зовнішнього середовища, вносячи реактивну складову. Знак «+» в (1) відповідає знаку «+» у фазовому множнику e^{ikx} прямої хвилі. У реактивному середовищі (наприклад, тунельному бар'єрі) $k = i|k|$ і з вказаним знаком хвиля експоненційно загасає. Оскільки в теорії радіотехнічних кіл [10] у фазовому множнику знак «-», при аналізі характеру реактивної складової входного імпедансу в радіотехнічних термінах (ємнісний або індуктивний) знак реактивної складової необхідно змінити на протилежний.

Вхідний імпеданс Z_2 визначається формулою

$$Z_2 = \frac{Z_1 - iB}{1 - iZ_1B}, \quad (2)$$

де $B = \text{tg}\varphi$, $\varphi = k'b$ — набіг фаз між бар'єрами.

Аналогічно (1) для імпедансу Z_i маємо

$$Z_i = Z_2 + 2i\eta. \quad (3)$$

Підставивши в (3) вирази (2) і (1), після перетворень отримаємо

$$Z_i = \frac{1+B^2+4i\eta[\eta B(2\eta B+3)+1]}{(2\eta B+1)^2+B^2}. \quad (4)$$

Імпедансна умова резонансного проходження ДБС (РТЕ для δ_1 -бар'єрів) визначається узгодженням вхідного імпедансу ДБС з імпедансом зовнішнього середовища:

$$\operatorname{Re} Z_i = 1, \quad \operatorname{Im} Z_i = 0, \quad (5)$$

де $\operatorname{Re} Z_i$ і $\operatorname{Im} Z_i$ — активна і реактивна складові Z_i . Умовам (5) відповідає

$$B = -\eta^{-1}, \quad (6)$$

що для δ_1 -бар'єрів збігається з відомою формулою [1].

Вираз (4) «відкриває» додаткові умови резонансного проходження ДБС. Друге з співвідношень (5) виконується не лише при (6), але і, якщо

$$B = -(2\eta)^{-1}. \quad (7)$$

Позначимо випадки (6) і (7) як I і II. У випадку II $\operatorname{Re} Z_{iII} = 1 + 4\eta^2$. Таким чином, резонансне проходження ДБС буде і у випадку II, якщо імпеданс зовнішнього середовища з однієї з сторін ДБС дорівнює $\operatorname{Re} Z_{iII}$.

Електромагнітна та акустична двобар'єрні структури

На рис. 2 приведено залежності активної і реактивної складових вхідного імпедансу ДБС на основі δ_2 -бар'єрів згідно (4). Знак «-» перед $\operatorname{Im} Z_i$ обумовлений зазначеним вище знаком фази хвилі. Точки I і II відповідають випадкам I і II. Залежності ілюструють значну трансформацію вхідного імпедансу: активна складова змінюється від 45 до 0,2 (в межах рис. 2), а реактивна — від 29 до -16 і двічі змінює характер.

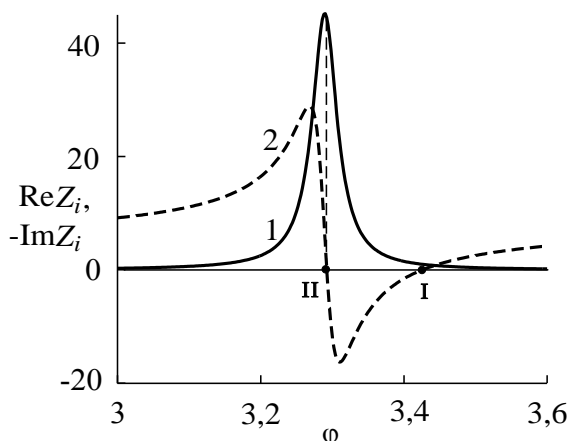


Рис. 2. Залежності активної (1) і реактивної (2) складових вхідного імпедансу ДБС. $k = k'$, $\alpha = 2b$.

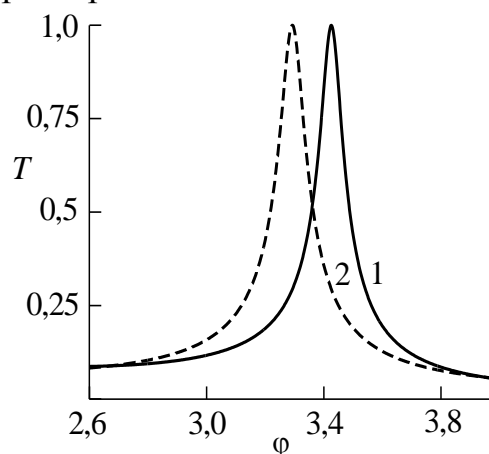


Рис. 3. Характеристики коефіцієнта проходження ДБС для випадків I і II (відповідно 1 і 2).

В результаті зміщення ре-активної складової уверх резонансні значення

випадків I і II знаходяться справа від максимуму $\text{Re} Z_{i_m}$. Зазначимо, що

$$\text{Re} Z_{i_{II}} \approx \text{Re} Z_{i_m}. \quad (8)$$

Характеристики розглянутої ДБС на рис. 3 ілюструють резонансне проходження для випадків I і II. Резонансне проходження обумовлене компенсацією неоднорідностей хвильових збурень на зовнішніх межах ДБС полем резонансної стоячої хвилі, сформованої в ДБС [8]. Поле резонансної стоячої хвилі «узгоджує» вхідний імпеданс ДБС з імпедансом зовнішнього середовища. Випадок I відповідає узгодженню без трансформації імпедансу зовнішнього середовища, а випадок II — з трансформацією.

Рис. 4, а і 4, б ілюструють відповідність імпедансних характеристик ДБС зі скінченними бар'єрами і її δ -моделі.

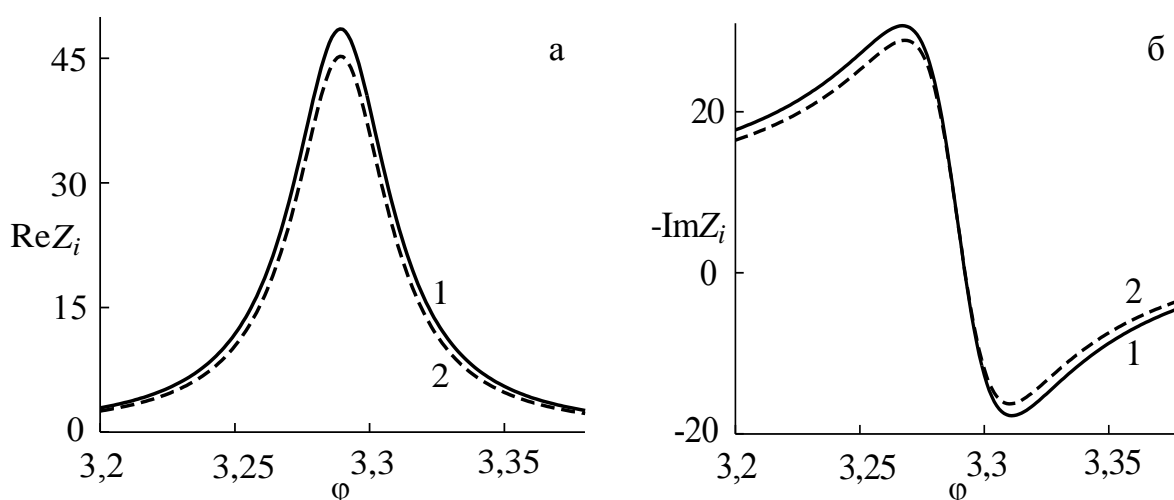


Рис. 4. Залежності вхідного імпедансу ДБС зі скінченними бар'єрами (1) і її δ -моделі (2): а — активна; б — реактивна складові, $k = k'$, $\alpha = 2b$, для ДБС зі скінченними бар'єрами $a=0,1b$, що відповідає $Z=20$, відстань між скінченними бар'єрами $0,9932b$.

У випадку врахування втрат при поширенні хвилі постійна поширення дорівнює $\gamma = -\beta + ik'$, де β — коефіцієнт загасання амплітуди хвилі, і у формулі (3) $B = -ith\gamma b$. Втрати зменшують розмах імпедансних характеристик і змінюють умови узгодження. Так, при $\beta b = 0,01$ діапазони зміни залежностей активної і реактивної складових вхідного імпедансу на рис. 2, розрахованих згідно (1 – 3), дорівнюють відповідно $31 \dots 0,3$ і $22 \dots -9$, а точці I відповідає значення $\text{Re} Z_i = 1,53$.

Умови узгодження при $\text{Re} Z_i = 1$ з урахуванням втрат можна знайти з залежностей активної і реактивної складових вхідного імпедансу варіацією в (3) параметра α_{II} лівого відбивача. У даному випадку $\alpha_{II} = 1,62b$ і $\phi_I = 3,454$, що відповідає співвідношенню $\eta_{II}^{-2} - \eta^{-2} \approx 4\beta b$ [11], отриманому з умови оптимального зв'язку резонатора з падаючою хвилею [6].

Моделювання двобар'єрної структури паралельним контуром

Характер залежностей на рис. 2 відповідає паралельному коливальному контуру зі зміщенням уверх реактивної складової, обумовленим індуктивним доданком в (3). Вхідний імпеданс паралельного контуру дорівнює [10]

$$Z_{ik} = \frac{\operatorname{Re} Z_{im}(1-i\xi)}{1+\xi^2}, \quad (9)$$

де $\xi = 2Q\delta$, Q — добротність, $\delta = (f - f_0) / f_0$, f_0 — резонансна частота. У даному випадку $\delta = (\varphi - \varphi_0) / \varphi_0$, де φ_0 відповідає $\operatorname{Re} Z_{im}$. При $Q=78$ залежності активної і реактивної складових вхідного імпедансу $Z'_i = Z_{ik} + i\alpha k$ співпадають з залежностями на рис. 2. Таким чином, ДБС можна моделювати паралельним контуром з послідовною реактивністю.

Виходячи з (9) і враховуючи (8), для коефіцієнта відбиття від ДБС у випадку II маємо

$$R \approx \frac{\operatorname{Re} Z_{im} - Z'_i}{\operatorname{Re} Z_{im} + Z'_i} = \frac{\xi^2 - i(\chi - \xi)}{2 + \xi^2 + i(\chi - \xi)},$$

де $\chi = \alpha k / \operatorname{Re} Z_{im}$. Зі співвідношення $T = \sqrt{1 - |R|^2}$ отримаємо

$$T \approx \sqrt{\frac{1}{1 + (\xi/2)^2 + \chi(\chi - 2\xi) / 4(1 + \xi^2)}}.$$

Оскільки третя складова набагато менша перших двох, маємо

$$T \approx \sqrt{\frac{1}{1 + (\xi/2)^2}}. \quad (10)$$

Вираз (10) відповідає рівнянню граничної резонансної кривої [10]. Характеристика згідно (10) практично співпадає з залежністю 2 на рис. 3. Добротність характеристики (10) вдвічі менша добротності характеристики активної складової вхідного імпедансу ДБС. Таке зменшення обумовлене тим, що активна складова враховує втрати випромінювання ДБС лише у прямому напрямку, а коефіцієнт проходження — і у протилежному. Можна показати, що, незважаючи на різні хвильові імпеданси середовищ з різних сторін ДБС, модулі коефіцієнтів відбиття від лівого і правого бар'єрів зі сторони резонаторної порожнини ДБС приблизно однакові, тому і втрати випромінювання ДБС в різних напрямках приблизно однакові. При узгодженні амплітуда хвилі, що випромінюється у протилежному напрямку, співпадає з амплітудою відбитої від ДБС хвилі, а фази цих хвиль протилежні, в результаті відбувається компенсація відбитої хвилі.

Квантово-механічна двобар'єрна структура

На рис. 5 приведено характеристики δ -моделі ДБС на основі δ_1 -бар'єрів

згідно (4). Внаслідок ємнісного доданка в (3) реактивна складова зміщена вниз і власні значення випадків I і II знаходяться зліва від $\text{Re}Z_{i_m}$.

На рис. 6 показано залежність коефіцієнта проходження ДБС зі скінченними бар'єрами у випадку I. Як бачимо, РТЕ спостерігається при двох рівнях енергії. Оскільки коефіцієнт відбиття від тунельного бар'єра близький до одиниці, добротність резонансних характеристик ДБС дуже висока.

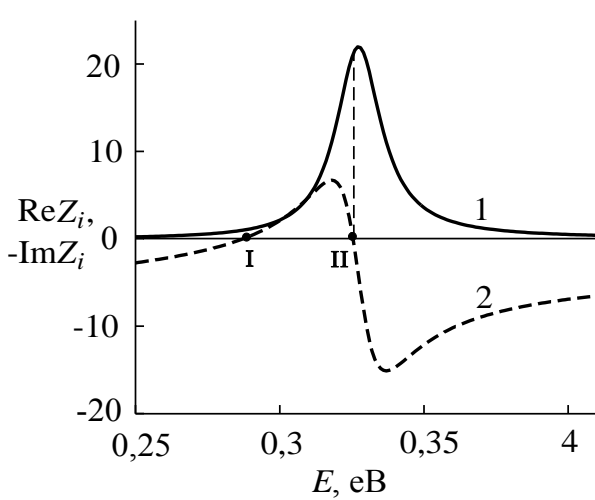


Рис. 5. Залежності активної (1) і реактивної (2) складових вхідного імпедансу ДБС. $\alpha=0,5$ еВ·нм, $b=1$ нм, $m = m' = m_0$, де m_0 — маса електрона.

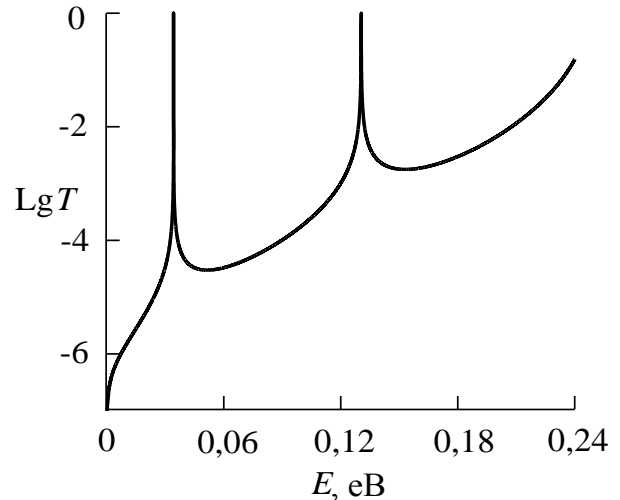


Рис. 6. Характеристики коефіцієнта проходження ДБС. $V=0,24$ еВ, $a=b=2,5$ нм, $m = m' = m_0$.

Рис. 7 ілюструє імпедансні характеристики ДБС з параметрами рис. 6. Характер залежності активної складової повторює характер залежності коефіцієнта проходження. Поблизу власних значень активна складова значно збільшується, що відповідає зростанню інтенсивності хвилі, яка проходить крізь ДБС. Удалечині від власних значень реактивна складова має ємнісний характер, причому $\text{Im}Z_i \gg \text{Re}Z_i$.

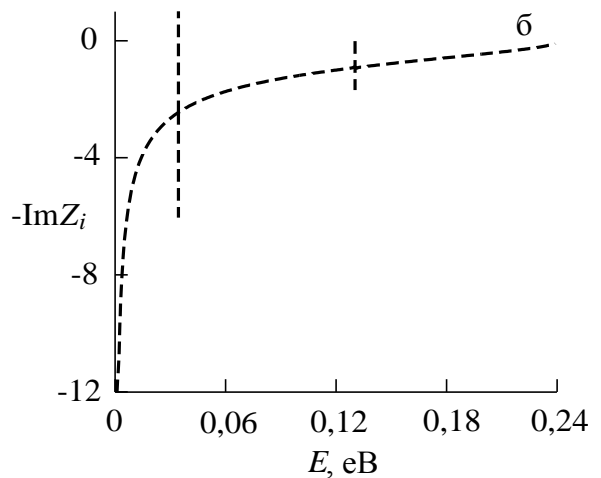
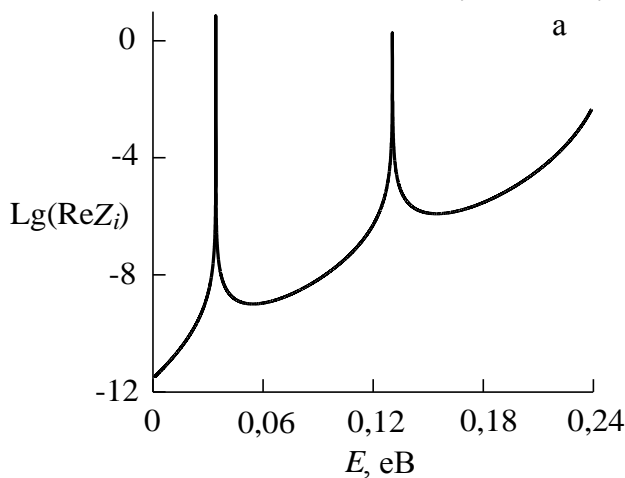


Рис. 7. Залежності вхідного імпедансу ДБС: а — активна; б — реактивна складові.

На рис. 8 приведено характеристики ДБС, що розглядається, поблизу

першого власного рівня. Як бачимо, характер імпедансних залежностей відповідає рис. 5. Характеристики проходження на рис. 8, б ілюструють РТЕ для випадків I і II.

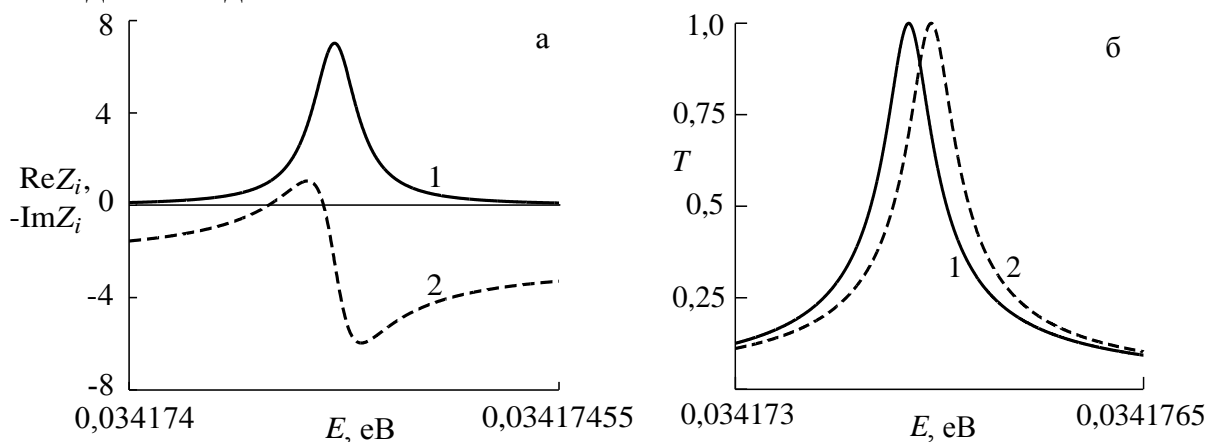


Рис. 8. Характеристики ДБС поблизу першого власного рівня: а — активна (1) та реактивна (2) складові; б — коефіцієнт проходження для випадків I і II (відповідно 1 і 2).

Висновки

Вхідні імпедансні характеристики двобар'єрних структур дозволяють проаналізувати хвильові властивості таких структур, встановити імпедансні умови резонансного проходження, у тому числі резонансного тунелювання, хвиль. В результаті аналізу особливостей вхідних імпедансних характеристик встановлено умови резонансного проходження для ДБС, розміщеної між хвильовими середовищами з різними імпедансами. Становить інтерес дослідження вхідних імпедансних характеристик інших хвильових мікро- і наноструктур.

Перелік посилань

1. Markos P. Wave Propagation From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials / P. Markos, C. M. Soukoulis. — Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2008. — 352 p.
2. Nguyen H. S. Realization of a double-barrier resonant tunneling diode for cavity polaritons / H. S. Nguyen, D. Vishnevsky, C. Sturm et al. // [Phys. Rev.Lett.](#) — 2013. — Vol. 110. — 236601.
3. Seo K. C. Spin filtering in an electromagnetic structure / K. C. Seo, G. Ihm, K.-H. Ahn et al. // [J. Appl. Phys.](#) — 2004. — Vol. 95, No. 11. — pp. 7252—7254.
4. Hayashi S. Observation of resonant photon tunneling in photonic double barrier structures / S. Hayashi, H. Kurokawa, H. Oga // [Opt. Rev.](#) — 1999. — Vol. 6, No. 3. — P. 204-210.
5. Qiu C. Mode-selecting acoustic filter by using resonant tunneling of two-dimensional double phononic crystals / C. Qiu, Z. Liu, J. Mei et al. // [Appl. Phys. Lett.](#) — 2005. — Vol. 87, No. 10. — pp. 104101-104103.
6. Городецкий М. Л. Основы теории оптических микрорезонаторов / М. Л. Городецкий. — М. : МГУ, 2010. — 203 с.
7. Khondker A. N. Transmission line analogy of resonance tunneling phenomena: The generalized impedance concept / A. N. Khondker, M. R. Khan, A. F. M. Anwar // [J. Appl.](#)

[Phys.](#) – 1988. – Vol. 63, No. 10. – P. 5191;5193.

8. Нелин Е. А. Импедансная модель для “барьерных” задач квантовой механики / Е. А. Нелин // [УФН](#). – 2007. – Т. 177, №3. – С. 307-313.

9. Нелін Є. А. Квантово-механічні структури з дельта-функціональним потенціалом / Є. А. Нелін, М. В. Водолазька // [Наукові вісті НТУУ «КПІ»](#). – 2013. – № 4(90). – С. 137—144.

10. Зернов Н. В. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. – Л. : Энергия, 1972. – 816 с.

11. Водолазская М. В. Модель импедансных дельта-неоднородностей для микро- и наноструктур / М. В. Водолазская, Е. А. Нелин // [Известия вузов. Радиоэлектроника](#). – 2014. – Т. 57, №5. – С. 25–34.

References

1. Markos P. and Soukoulis C. M. (2008) Wave Propagation From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials. Princeton and Oxford: Princeton University Press, 352 p.

2. Nguyen H. S., Vishnevsky D., Sturm C., Tanese D., Solnyshkov D., Galopin E., Lemaitre A., Sagnes I., Amo A., Malpuech G. and Bloch J. (2013) Realization of a double-barrier resonant tunneling diode for cavity polaritons. [Phys. Rev. Lett.](#), Vol. 110, pp. 236601.

3. Seo K. C., Ihm G., Ahn K.-H. and Lee S. J. (2004) Spin filtering in an electromagnetic structure. [J. Appl. Phys.](#), Vol. 95, No. 11, pp. 7252-7254.

4. Hayashi S., Kurokawa H. and Oga H. (1999) Observation of resonant photon tunneling in photonic double barrier structures. [Opt. Rev.](#), Vol. 6, No. 3, pp. 204-210.

5. Qiu C., Liu Z. and Mei J. (2005) Mode-selecting acoustic filter by using resonant tunneling of two-dimensional double phononic crystals. [Appl. Phys. Lett.](#), Vol. 87, No. 10, pp 104101-104103.

6. Gorodetskii M. L. (2010) [Osnovy teorii opticheskikh mikrorezonatorov](#) [Fundamentals of the theory of optical microcavities]. Moscow, MHIU, 203 p.

7. Khondker A. N., Khan M. R. and Anwar A. F. M. (1988) Transmission line analogy of resonance tunneling phenomena: The generalized impedance concept. [J. Appl. Phys.](#), Vol. 63, No. 10, pp. 5191—5193.

8. Nelin E.A. (2007) Impedance model for quantum-mechanical barrier problems. [Physics-Uspokhi](#), Vol. 50, No. 3, pp. 293-299.

9. Nelin E. A. and Vodolazka M. V. (2013) Kvantovo-mekhanichni struktury z del'ta-funktsional'nym potentsialom [Quantum-mechanical structures with delta-functional potential]. [Naukovi visti NTUU «KPI»](#), no. 4, pp. 137-144.

10. Zernov N. V. and Karpov V. G. (1972) *Teoriya radiotekhnicheskikh cepej* [Radio circuits theory]. Leningrad, Energiya Publ., 816 p.

11. *Vodolazka M. V. and Nelin E. A. (2014) Model of impedance delta-inhomogeneities for micro- and nanostructures. [Radioelectronics and Communications Systems](#), Vol. 57, No. 5, pp. 208-216.*

Водолазька М. В., Миколайчик О. В., Нелін Є. А. Вхідні імпедансні характеристики двобар'єрних структур. В статті досліджено особливості вхідних імпедансних характеристик двобар'єрних структур. Розглянуто модель двобар'єрної структури у вигляді двох імпедансних δ-бар'єрів у квантово-механічному, електромагнітному та акустичному середовищах. Отримано аналітичні вирази для вхідного імпедансу. Встановлено та проаналізовано імпедансні умови резонансного проходження, у тому числі резонансного тунелювання, хвиль.

Ключові слова: резонансне проходження, резонансне тунелювання, двобар'єрна структура, δ -бар'єр.

Водолазская М. В., Миколайчик А. В., Нелин Е. А. **Входные импедансные характеристики двухбарьерных структур.** В статье исследованы особенности входных импедансных характеристик двухбарьерных структур. Рассмотрена модель двухбарьерной структуры в виде двух импедансных δ -барьеров в квантово-механической, электромагнитной и акустической средах. Получены аналитические выражения для входного импеданса. Установлены и проанализированы импедансные условия резонансного прохождения, в том числе резонансного туннелирования, волн.

Ключевые слова: резонансное прохождение, резонансное туннелирование, двухбарьерная структура, δ -барьер.

Vodolazka M. V., Mikolaychik O. V., Nelin E. A. **Input impedance characteristics of double barrier structures.**

Introduction. Double barrier structures (DBSs) are widely used in different technical areas. In the paper the features of input impedance characteristics of DBS are investigated and conditions of resonant passing, including resonant tunneling, of waves are set.

Delta-model of double barrier structure. A model of DBS in the form of two impedance δ -barriers in quantum-mechanical, electromagnetic and acoustic media is considered. Analytical expressions for the input impedance characteristics are received. Impedance conditions of resonance passing of waves through DBS are obtained. New condition of resonance passing through DBS is set.

Electromagnetic and acoustic double barrier structures. Dependences of input impedance active and reactive components and transfer coefficient of DBS are given. Accordance of DBS characteristics with finite size barriers and its δ -model is analysed. The analogy of DBS and parallel oscillatory circuit is set.

Quantum-mechanical double barrier structure. Dependences of input impedance and transfer coefficient of quantum-mechanical DBS are given. Character of active component dependence is similar to transfer coefficient characteristic. Resonance transfer characteristics have very high quality factor.

Conclusions. Input impedance characteristics of DBS allow to analyse wave properties of such structures, set the conditions of resonant passing, including resonant tunneling, waves. By analysing the input impedance characteristics conditions of resonant passing for DBS, located between media with different wave impedances, were determined.

Keywords: resonant passing, resonant tunneling, double barrier structure, δ -barrier.