

## **РАДИОЕЛЕКТРОНІКА БІОМЕДИЧНИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

УДК 621.372.061

### **СРАВНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ С МЕТОДОМ «ЗОН» ПРОВОДИМОСТИ**

*Сушко И.А., аспирантка; Рыбин А.И., д.т.н. профессор  
Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина*

#### **Введение**

Методы импедансной томографии находят всё большее применение в медицине, технике, физике, геодезии [1 - 5] и т.д. Методы привлекательны тем, что в отличие от других («линейных» — рентгеновских, эмиссионных, ядерного магнитного резонанса и т.д.) методов томографии технические средства для реализации этих методов характеризуются относительной дешевизной и простотой реализации. Однако математические методы решения задачи реконструкции образа по проекциям отличаются (в сравнении с «линейными») значительно большей сложностью и громоздкостью [6 - 18]. Это обусловлено тем, что траектории сигнала носителя информации (линии равного напряжения или равного тока) в импедансной томографии являются нелинейными даже для однородного объекта исследования [13] и их форма сильно усложняется в случае наличия неоднородностей. Поэтому отдельной и важнейшей задачей импедансной томографии является реконструкция (обратная задача или задача синтеза) образа по проекциям. При этом считается известным начальное приближение, т.е. распределение поверхностных проводимостей областей неоднородностей внутри томографического сечения (фантома). Также, в частности, начальное приближение фантома может быть и равномерным. Для решения обратной задачи используют два метода: метод обратной проекции и итерационный метод вычислений.

Метод обратной проекции отличается простотой и высокой вероятностью получения неверного результата (в зависимости от картины неоднородностей, появившихся в начальном фантоме). При использовании этого метода проекции (измеренные передаточные сопротивления) проецируются на фантом в секторы между линиями равного напряжения (вычисленными для начального приближения), начинающимися на измерительных электродах. Метод обратной проекции является «калькой» широко распространённых методов «линейной» томографии (рентгеновской, эмиссионной, ядерного магнитного резонанса, ультразвуковой [13, 16 - 22] и т.д.). При наличии одной дополнительной (к фантому первого приближения)

неоднородности метод используется, например, при диагностике легких [3, 4].

При реконструкции образа итерационными методами необходимо решить две задачи:

1. Задачу анализа или вычисление по заданному фантому передаточных сопротивлений по его обводу (по начальному приближению распределения поверхностных сопротивлений областей неоднородности).
2. Задачу синтеза или реконструкции картины (образа) внутреннего распределения неоднородностей и их поверхностных сопротивлений, при которой результаты анализа и результаты измерений с заданной точностью совпадают.

Задача реконструкции является весьма трудоёмкой и громоздкой, включающей, к тому же, на каждой итерации решение задачи анализа. Для решения как прямой, так и обратной задачи необходимо представить фантом в виде его математической модели. Для этого томографическое сечение с непрерывным распределением поверхностной проводимости следует в соответствии с методом конечных элементов [23] представить в виде совокупности конечных элементов (для определённости — в виде квадратов), представленных их эквивалентными схемами (в виде квадрата [14] сопротивлений с двумя диагоналями). Как прямую, так и обратную задачи импедансной томографии целесообразно решать методами теории цепей [15 - 18].

### Основные теоретические положения

Решение задачи реконструкции фантома по проекциям в итерационной процедуре, например, методом Ньютона-Рафсона заключается в составлении и решении системы уравнений вида

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \partial z_{1 \text{ пер.выч}} / \partial \sigma_1 & \partial z_{1 \text{ пер.выч}} / \partial \sigma_2 & \dots & \partial z_{1 \text{ пер.выч}} / \partial \sigma_N \\ \partial z_{2 \text{ пер.выч}} / \partial \sigma_1 & \partial z_{2 \text{ пер.выч}} / \partial \sigma_2 & \dots & \partial z_{2 \text{ пер.выч}} / \partial \sigma_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial z_{N \text{ пер.выч}} / \partial \sigma_1 & \partial z_{N \text{ пер.выч}} / \partial \sigma_2 & \dots & \partial z_{N \text{ пер.выч}} / \partial \sigma_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \sigma_1 \\ \Delta \sigma_2 \\ \dots \\ \Delta \sigma_N \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} Z_{1 \text{ пер.изм.}} - Z_{1 \text{ пер.выч.}} \\ Z_{2 \text{ пер.изм.}} - Z_{2 \text{ пер.выч.}} \\ \dots \\ Z_{N \text{ пер.изм.}} - Z_{N \text{ пер.выч.}} \end{bmatrix} = \\ & = [\partial \bar{Z}_{m \text{ пер.выч}} / \partial \sigma_k] \times [\Delta \sigma_k] = -[\Delta Z_m], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\partial z_j \text{ пер.выч} / \partial \sigma_d$  — производная от  $j$ -го передаточного сопротивления, вычисленного по фантому по поверхностной проводимости  $d$ -го конечного элемента;  $\Delta \sigma_k$  — искомое корректирующее значение приращения поверхностной проводимости  $k$ -го конечного элемента;  $Z_{m \text{ пер.изм.}} - Z_{m \text{ пер.выч.}} = \Delta Z_m$  — разница между измеренным и вычисленным по фантому значениями  $m$ -го передаточного сопротивления;  $N$  — количество конечных эле-

ментов в фантоме.

Таким образом, для решения задачи реконструкции необходимо многократно решать задачу анализа, т.е. задачу вычисления обратной матрицы (на каждой итерации для текущих значений поверхностных проводимостей неоднородностей фантома), по значениям которой находят передаточные сопротивления  $Z_{m \text{ пер.выч.}}$ . По вычисленным передаточным сопротивлениям далее следует находить разности  $\Delta z_m$  для оценки соответствия картины распределения неоднородности внутри фантома истинному распределению в исследуемом сечении. При неудовлетворительно большой невязке, оцениваемой по  $[\Delta Z_m]$  (1), процедуру вычислений по (1) следует повторить.

Если задача анализа может быть решена достаточно просто, учитывая разреженность матрицы проводимостей системы уравнений узловых напряжений фантома методом модификаций [24 —26], то решение системы (1) представляет значительную проблему.

Так, количество конечных элементов  $N$  должно быть достаточно большим, чтобы полученное в результате реконструкции изображение визуально воспринималось. Пусть  $N=1000$ . Тогда порядок матрицы  $[\partial \bar{Z}_{m \text{ пер. выч.}} / \partial \sigma_k]$  также равен 1000, т.е. матрица содержит  $10^6$  элементов, и эта матрица, в общем случае, не содержит нулевых элементов. Её структура также априори неизвестна. При наличии обратной матрицы текущего фантома задача вычисления всех  $10^6$  производных  $\partial z_j \text{ пер.выч.} / \partial \sigma_d$  не представляет трудности [27 - 32]. Однако, при этом матрица  $[\partial \bar{Z}_{m \text{ пер. выч.}} / \partial \sigma_k]$  порядка 1000 всегда будет плохо обусловленной. Это связано с тем, что производные от передаточных сопротивлений по поверхностной проводимости для двух соседних конечных элементов, расположенных в центре фантома, будут весьма малыми (в сравнении со значением передаточной проводимости) и достаточно близкими по величине. Последнее является достаточным условием равенства нулю определителя этой матрицы. Так, например, для фантома рис.1 при нормированных значениях поверхностной проводимости каждого конечного элемента, равных 1, были вычислены передаточные сопротивления от тока источника между узлами, расположенными по горизонтали (рис.1...рис.4) и напряжения на измерительных электродах, расположенных в основании равных дуг длиной  $2\pi/16$  (точки по обводу контура, пронумерованные от 0 (крайняя точка слева) по часовой стрелке до 14, причём правый крайний узел не пронумерован), а также соответствующие производные.

Результати машинного експеримента

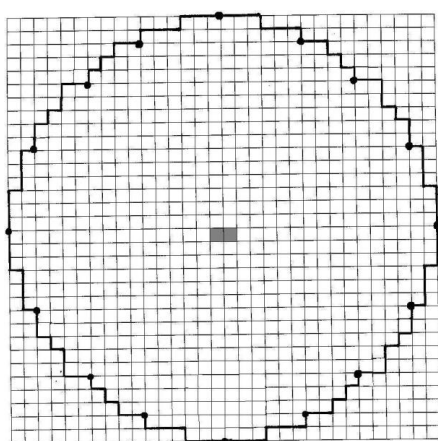


Рис.1

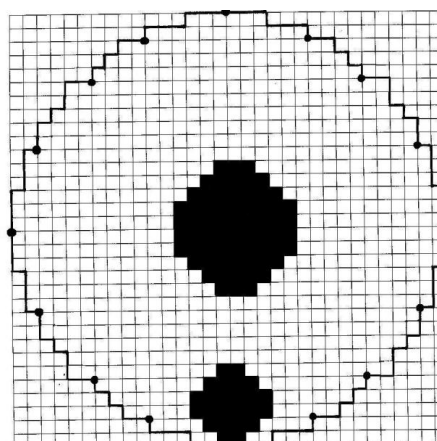


Рис.2

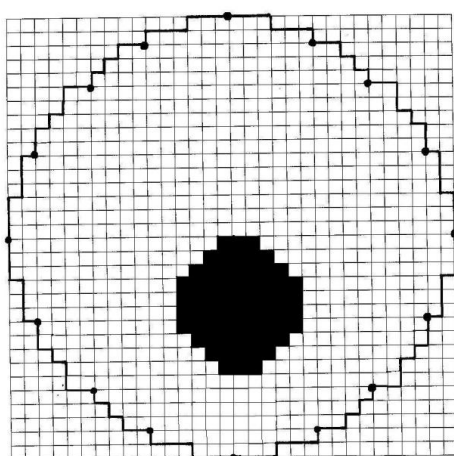


Рис.3

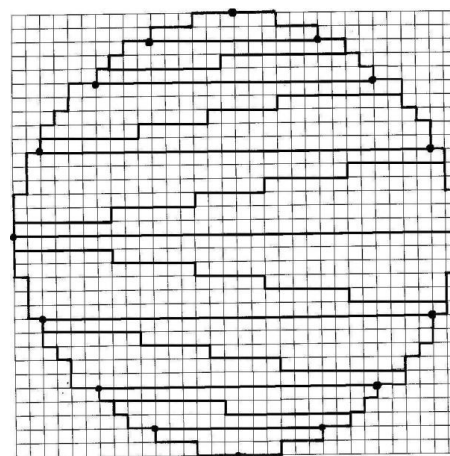


Рис.4

Для равномерного фантома рис.1 значения передаточных сопротивлений

$$\begin{aligned}
 Z_1^{(\text{пер})} &= 0.42526, & Z_2^{(\text{пер})} &= 0.52703, & Z_3^{(\text{пер})} &= 0.57956, & Z_4^{(\text{пер})} &= 0.62754, \\
 Z_5^{(\text{пер})} &= 0.67047, & Z_6^{(\text{пер})} &= 0.71303, & Z_7^{(\text{пер})} &= 0.79461, & Z_8^{(\text{пер})} &= 0.79461, \\
 Z_9^{(\text{пер})} &= 0.71303, & Z_{10}^{(\text{пер})} &= 0.67047, & Z_{11}^{(\text{пер})} &= 0.62754, & Z_{12}^{(\text{пер})} &= 0.57956, \\
 Z_{13}^{(\text{пер})} &= 0.52703, & Z_{14}^{(\text{пер})} &= 0.42526.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Производные  $\partial Z_i^{(\text{пер})} / \partial \sigma_k$  от передаточных сопротивлений по поверхностным проводимостям  $\sigma_1, \sigma_2$  конечных элементов, расположенных в центре фантома (показанных на рис.1) соответственно равны

$$\begin{aligned}
 \partial Z_1^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -2.9624 \cdot 10^{-6}, & \partial Z_2^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -1.6187 \cdot 10^{-5}, \\
 \partial Z_3^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -3.1431 \cdot 10^{-5}, & \partial Z_4^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -4.8338 \cdot 10^{-5}, \\
 \partial Z_5^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -6.1896 \cdot 10^{-5}, & \partial Z_6^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -7.166 \cdot 10^{-5}, \\
 \partial Z_7^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -8.1203 \cdot 10^{-5}, & \partial Z_8^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -8.6158 \cdot 10^{-5},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial Z_9^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -8.0258 \cdot 10^{-5}, \partial Z_{10}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = -7.1906 \cdot 10^{-5}, \\
 \partial Z_{11}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -5.8206 \cdot 10^{-5}, \partial Z_{12}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = -3.9089 \cdot 10^{-5}, \\
 \partial Z_{13}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -2.0821 \cdot 10^{-5}, \partial Z_{14}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = -4.5114 \cdot 10^{-6}; \\
 \partial Z_1^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -2.2325 \cdot 10^{-6}, \partial Z_2^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = -1.2933 \cdot 10^{-5}, \\
 \partial Z_3^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -2.638 \cdot 10^{-5}, \partial Z_4^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = -4.2759 \cdot 10^{-5}, \\
 \partial Z_5^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -5.7083 \cdot 10^{-5}, \partial Z_6^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = -6.8085 \cdot 10^{-5}, \\
 \partial Z_7^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -7.9353 \cdot 10^{-5}, \partial Z_8^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = -8.4817 \cdot 10^{-5}, \\
 \partial Z_9^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -7.7147 \cdot 10^{-5}, \partial Z_{10}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = -6.7114 \cdot 10^{-5}, \\
 \partial Z_{11}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -5.1998 \cdot 10^{-5}, \partial Z_{12}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = -3.305 \cdot 10^{-5}, \\
 \partial Z_{13}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -1.6817 \cdot 10^{-5}, \partial Z_{14}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = -3.5462 \cdot 10^{-6}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Аналогічно, для фантома рис. 2 («маленькая» и «средняя» неоднородности имеют поверхностные проводимости  $\sigma = 100$ )

$$\begin{aligned}
 Z_1^{(\text{пер})} &= 0.42274, \quad Z_2^{(\text{пер})} = 0.51382, \quad Z_3^{(\text{пер})} = 0.55304, \quad Z_4^{(\text{пер})} = 0.58477, \\
 Z_5^{(\text{пер})} &= 0.61348, \quad Z_6^{(\text{пер})} = 0.64512, \quad Z_7^{(\text{пер})} = 0.71527, \quad Z_8^{(\text{пер})} = 0.70581, \\
 Z_9^{(\text{пер})} &= 0.62219, \quad Z_{10}^{(\text{пер})} = 0.5844, \quad Z_{11}^{(\text{пер})} = 0.57388, \quad Z_{12}^{(\text{пер})} = 0.55679, \\
 Z_{13}^{(\text{пер})} &= 0.51494, \quad Z_{14}^{(\text{пер})} = 0.42276;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial Z_1^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -2.7344 \cdot 10^{-9}, \partial Z_2^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = -4.9438 \cdot 10^{-9}, \\
 \partial Z_3^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -5.881 \cdot 10^{-9}, \partial Z_4^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = -6.7723 \cdot 10^{-9}, \\
 \partial Z_5^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -7.5773 \cdot 10^{-9}, \partial Z_6^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = -8.0129 \cdot 10^{-9}, \\
 \partial Z_7^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -7.6976 \cdot 10^{-9}, \partial Z_8^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = -4.5936 \cdot 10^{-9}, \\
 \partial Z_9^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -6.7293 \cdot 10^{-9}, \partial Z_{10}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = -3.9477 \cdot 10^{-9}, \\
 \partial Z_{11}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= 5.5676 \cdot 10^{-9}, \partial Z_{12}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = 6.2508 \cdot 10^{-9}, \\
 \partial Z_{13}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= 6.1067 \cdot 10^{-9}, \partial Z_{14}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = 3.0936 \cdot 10^{-9}; \\
 \partial Z_1^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -1.6975 \cdot 10^{-9}, \partial Z_2^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = -2.9141 \cdot 10^{-9}, \\
 \partial Z_3^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -3.3527 \cdot 10^{-9}, \partial Z_4^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = -3.8699 \cdot 10^{-9}, \\
 \partial Z_5^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -4.4562 \cdot 10^{-9}, \partial Z_6^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = -4.8276 \cdot 10^{-9}, \\
 \partial Z_7^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -4.6718 \cdot 10^{-9}, \partial Z_8^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = -2.6817 \cdot 10^{-9}, \\
 \partial Z_9^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -4.4256 \cdot 10^{-9}, \partial Z_{10}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = -2.7921 \cdot 10^{-9}, \\
 \partial Z_{11}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= 3.5892 \cdot 10^{-9}, \partial Z_{12}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = 4.0381 \cdot 10^{-9}, \\
 \partial Z_{13}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= 3.953 \cdot 10^{-9}, \partial Z_{14}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = 1.9947 \cdot 10^{-9}. \quad (4)
 \end{aligned}$$



Передаточные сопротивления и их производные по поверхностной проводимости для тех же конечных элементов для фантома рис. 3 («средняя» неоднородность с поверхностной проводимостью  $\sigma = 0$ ) приобретают следующие значения

$$\begin{aligned}
 Z_1^{(\text{пер})} &= 0.50917, & Z_2^{(\text{пер})} &= 0.68079, & Z_3^{(\text{пер})} &= 0.7649, & Z_4^{(\text{пер})} &= 0.8273, \\
 Z_5^{(\text{пер})} &= 0.86768, & Z_6^{(\text{пер})} &= 0.89494, & Z_7^{(\text{пер})} &= 0.93088, & Z_8^{(\text{пер})} &= 0.65597, \\
 Z_9^{(\text{пер})} &= 0.3026, & Z_{10}^{(\text{пер})} &= 0.037939, & Z_{11}^{(\text{пер})} &= -0.11344, & Z_{12}^{(\text{пер})} &= -0.035354, \\
 & & Z_{13}^{(\text{пер})} &= 0.16983, & Z_{14}^{(\text{пер})} &= 0.30559; \\
 \partial Z_1^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -0.015025, & \partial Z_2^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -0.029798, \\
 \partial Z_3^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -0.038952, & \partial Z_4^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -0.04651, \\
 \partial Z_5^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -0.051443, & \partial Z_6^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -0.054209, \\
 \partial Z_7^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -0.055083, & \partial Z_8^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -0.03451, \\
 \partial Z_9^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= 0.0056016, & \partial Z_{10}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= 0.060454, \\
 \partial Z_{11}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= 0.1076, & \partial Z_{12}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= 0.10208, \\
 \partial Z_{13}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= 0.06039, & \partial Z_{14}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= 0.020249; \\
 \partial Z_1^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -0.0050922, & \partial Z_2^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -0.010642, \\
 \partial Z_3^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -0.014834, & \partial Z_4^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -0.019211, \\
 \partial Z_5^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -0.023183, & \partial Z_6^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -0.026862, \\
 \partial Z_7^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -0.032573, & \partial Z_8^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -0.049803, \\
 \partial Z_9^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -0.046096, & \partial Z_{10}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= -0.013965, \\
 \partial Z_{11}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= 0.026692, & \partial Z_{12}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= 0.036697, \\
 \partial Z_{13}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= 0.022583, & \partial Z_{14}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= 0.0071607.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Теперь рассмотрим фантом рис. 4, на котором произведено разбиение на 14 зон проводимостей [15 - 18, 32, 33]. При этом полагаем, что каждая такая  $k$ -я зона имеет постоянную поверхностную проводимость  $\sigma_k$ . Пусть теперь зона, примыкающая сверху к «экватору» фантома рис.4, имеет проводимость  $\sigma_1$ , а зона, находящаяся на самом верху на рис.4 -  $\sigma_2$ . Тогда передаточные сопротивления для равномерного фантома ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{14}$ ), вычисленные на тех же, что и рис.1...рис.3 измерительных электродах, имеют значения

$$\begin{aligned}
 Z_1^{(\text{пер})} &= 0.42526, & Z_2^{(\text{пер})} &= 0.52703, & Z_3^{(\text{пер})} &= 0.57956, & Z_4^{(\text{пер})} &= 0.62754, \\
 Z_5^{(\text{пер})} &= 0.67047, & Z_6^{(\text{пер})} &= 0.71303, & Z_7^{(\text{пер})} &= 0.79461, & Z_8^{(\text{пер})} &= 0.79461,
 \end{aligned}$$

$$Z_9^{(\text{пер})} = 0.71303, \quad Z_{10}^{(\text{пер})} = 0.67047, \quad Z_{11}^{(\text{пер})} = 0.62754, \quad Z_{12}^{(\text{пер})} = 0.57956, \\ Z_{13}^{(\text{пер})} = 0.52703, \quad Z_{14}^{(\text{пер})} = 0.42526,$$

а производные по поверхностным проводимостям зон  $\sigma_1, \sigma_2$  — следующие значения

$$\begin{aligned} \partial Z_1^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -0.13998, \quad \partial Z_2^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = -0.14394, \\ \partial Z_3^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -0.14694, \quad \partial Z_4^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = -0.14889, \\ \partial Z_5^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -0.15124, \quad \partial Z_6^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = -0.15384, \\ \partial Z_7^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -0.161, \quad \partial Z_8^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = -0.21398, \\ \partial Z_9^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -0.18833, \quad \partial Z_{10}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = -0.17719, \\ \partial Z_{11}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -0.16738, \quad \partial Z_{12}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = -0.15784, \\ \partial Z_{13}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 &= -0.14863, \quad \partial Z_{14}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1 = -0.132; \\ \partial Z_1^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= 0.51143, \quad \partial Z_2^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = 0.71444, \\ \partial Z_3^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= 1.1318, \quad \partial Z_4^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = 0.77858, \\ \partial Z_5^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= 0.70978, \quad \partial Z_6^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = 0.68691, \\ \partial Z_7^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= 0.66234, \quad \partial Z_8^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = 0.62536, \\ \partial Z_9^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= 0.60935, \quad \partial Z_{10}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = 0.59666, \\ \partial Z_{11}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= 0.58005, \quad \partial Z_{12}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = 0.55643, \\ \partial Z_{13}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 &= 0.52415, \quad \partial Z_{14}^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2 = 0.4442. \end{aligned} \quad (6)$$

Производные от передаточных сопротивлений в (3) имеют величину порядка  $6 \cdot 10^{-4} \% \dots 1 \cdot 10^{-4} \%$  от абсолютных значений передаточных сопротивлений. Аналогично малые значения производных получаются для фантома рис.1 и в случае, когда дифференцирование проводится по поверхностным проводимостям конечных элементов, расположенных на обводе контура в крайней верхней части фантома. Обозначим эти поверхностные проводимости как  $\sigma_3=1$  и  $\sigma_4=1$ . Тогда производные

$$\begin{aligned} \partial Z_1^{(\text{пер})} / \partial \sigma_3 &= 3.0853 \cdot 10^{-6}, \quad \partial Z_2^{(\text{пер})} / \partial \sigma_3 = 1.1705 \cdot 10^{-5}, \\ \partial Z_3^{(\text{пер})} / \partial \sigma_3 &= 4.0073 \cdot 10^{-5} \text{ и т.д.}; \\ \partial Z_1^{(\text{пер})} / \partial \sigma_4 &= 3.6959 \cdot 10^{-6}, \quad \partial Z_2^{(\text{пер})} / \partial \sigma_4 = 1.3501 \cdot 10^{-5}, \\ \partial Z_3^{(\text{пер})} / \partial \sigma_4 &= 4.1117 \cdot 10^{-5} \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

При этом разница между производными  $\partial Z_k^{(\text{пер})} / \partial \sigma_1$  и  $\partial Z_k^{(\text{пер})} / \partial \sigma_2$  в (3) не превышает  $10^{-6}$ , а для  $\partial Z_k^{(\text{пер})} / \partial \sigma_3$  и  $\partial Z_k^{(\text{пер})} / \partial \sigma_4$  —  $10^{-5}$ .

Ещё худший результат получен в (4). И только при очень больших изме-

неннях поверхневих провідностей ( $\sigma=0$ ) в (5) значення производних стануться соизмеримими со значеннями передаточних сопротивлений.

Для результатів (3) і (4) значення елементів оберненої матриці в (1)  $[\partial \bar{Z}_{m \text{ пер выч}} / \partial \sigma_k]^{-1}$  будуть порядку  $10^6$  для (3) і  $10^9$  для (4), що не буде сприяти сходимості ітераційної процедури реконструкції образу по проекціям.

Отметим также, что фантом рис.1 содержит 840 узлов и 776 конечных элементов. И если решение прямой задачи методом модификаций (учитывая разреженность матрицы проводимости системы уравнений узловых напряжений) не представляет сложности, то как составлении, так и обращение матрицы производных в (1) представляет собой громоздкую задачу, решение которой весьма проблематично, учитывая плохую обусловленность матрицы производных и её порядок. Тем более, что структура матрицы производных  $[\partial \bar{Z}_{m \text{ пер выч}} / \partial \sigma_k]$  неизвестна и матрицу следует считать полностью заполненной ненулевыми элементами.

Приведенные в (6) результаты показывают, что, учитывая плохую обусловленность матрицы производных от передаточных сопротивлений по поверхностным проводимостям конечных элементов, значительно более привлекательным является метод зон проводимости, в котором такими конечными элементами являются сами зоны, состоящие из большого числа элементарных конечных элементов.

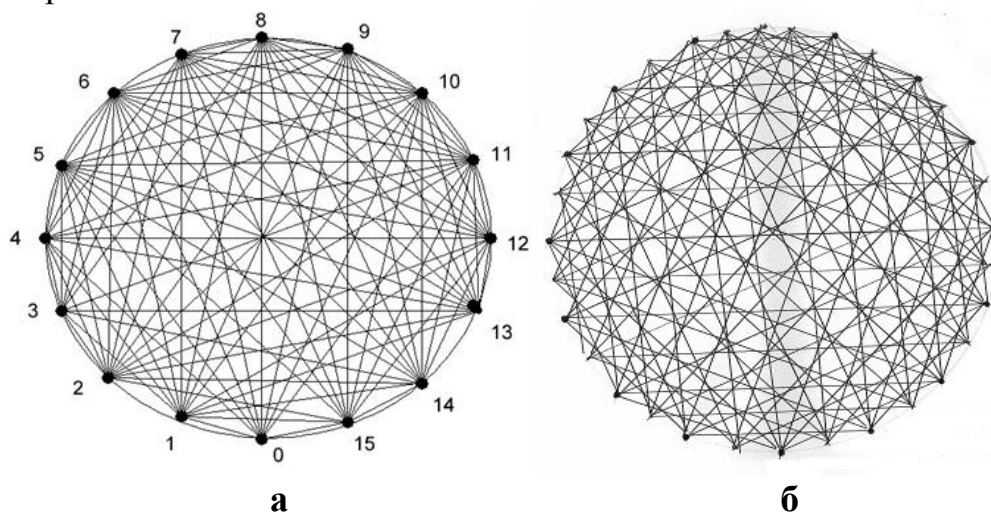


Рис.5

При введении зон проводимостей производится дополнительная структуризация схемы фантома, в результате чего матрица производных 776-го порядка преобразуется в 16 (для разных узлов включения источника тока по кросс-методу) матриц производных 14-го порядка.

При этом растр для результирующего изображение для зон проводимости (в отличие от растра рис.1 классического метода конечных элементов) будет, например, иметь вид рис.5,а,б.



Производные  $\partial Z_k^{(\text{пер})} / \partial \sigma_j$  в этом случае соизмеримы со значениями передаточных сопротивлений, а матрицы таких производных достаточно хорошо обусловлены.

### **Выводы**

Проведенный сравнительный анализ классического метода реконструкции образа по проекциям и метода зон проводимостей показал:

1. Громоздкость процедуры формирования матрицы производных для классического подхода, при котором такое формирование следует выполнять на каждой итерации. Эта громоздкость определяется большими порядками матрицы производных.

2. Отсутствие структуризации и плохую обусловленность матрицы производных (при классическом подходе), вызванную весьма малой (в общем случае) чувствительностью передаточных сопротивлений к изменению поверхностной проводимости конечных элементов.

3. Простоту формирования матрицы производных при использовании метода зон проводимости, поскольку её порядок в рассмотренном случае рамен 14, а при использовании 32 электродов — 30.

4. Значительно лучшую обусловленность матрицы производных при методе зон проводимости в сравнении с классическим методом.

5. Хорошую геометрическую разрешающую способность метода зон проводимости, обеспечиваемую растром, образованным наложением поверхностных проводимостей зон, полученных для каждой отдельно схемы подключения источника тока.

### **Литература**

1. Brown В.Н. Electrical Impedance Tomography/ В.Н. Brown, D.C. Barber // *Clinical Physics and Physiological Measurement*.—1992.—v.13.—Suppl. A, 207p.
2. Электроимпедансная томография / Я.С. Пеккер, К.С. Бразовский, В.Ю. Усов, М.П. Плотников, О.С. Уманский.— Томск: ООО «Издательство научно-технической литературы»,2004.—190с.
3. Корженевский А. В. Квазистатическая электромагнитная томография для биомедицины. Автореферат диссертации на соискание ученой степени д.ф.-м.н. Москва, 2009 —32с.
4. Корженевский А. В. Способ получения томографического изображения тела и электроимпедансный томограф / А.В. Корженевский, Ю.С. Культисов, В.А. Черепнин. Патент РФ на изобретение № 2127075, 1996 .
5. Дорожковець М.М. Фізичні принципи побудови вимірювальних томографічних систем промислового застосування / М.М. Дорожковець // *Вимірювальна техніка та метрологія*.— 1996.— №52.— С.113 —121.
6. Cormack А.М. Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it/ А.М. Cormack // *Nobel Lectures in Physiology or Medicine 1971—1980*. World Scientific Publishing Co – 1992. – P.551 – 563.
7. Murray T. Electrical Impedance Computed Tomography Based on a Finite Elements Model / Т. Murray, Y. Kagawa // *IEEE Trans. on Biomed. Eng.* – 1985. – v. 32. – P. 177 – 184.

8. Yorkey T. A comparison of impedance tomographic reconstruction algorithms / T.J. Yorkey, J.G. Webster // Clin. Phys. Physiol. Meas. – 1987. – v. 8. – Suppl. A. – P. 55.
9. Cheney M. Electrical Impedance Tomography / M. Cheney, D. Isaakson, J.C. Newell // SIAM Reviev. – 1999. – v. 41 — № 1. – P. 85 – 101.
10. Hua P. et al. Finite Element Modeling of Electrode – Skin Contact Impedance Tomography // IEEE Trans. on Biomed. Eng.— 1993. – v. 40. – P. 335 – 343.
11. Рыбин А.И. Решение обратной задачи импедансной томографии методом модификаций / А.И. Рыбин, И.А. Манюк // Радиоэлектроника.- 1998.- № 4. – С. 36 - 44 (Изв. вузов).
12. Рибіна І.О. Моделювання кінцевого елемента для об'ємного фантома в імпедансній томографії / І.О. Рибіна // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.—2011.— №46.—С.72 —84.
13. Физика визуализации изображений в медицине. Под ред. С. Уэбба.—М.: Мир,1991, т.1.—408с., т.2— 408с.
14. Рибіна І.О. Моделювання кінцевого елемента в імпедансній томографії / О.І. Рибіна, Є.В. Гайдаєнко // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.—2010.—№41.—С.19 —24.
15. Рыбина И.А. Решение прямой задачи импедансной томографии методами теории цепей / И.А. Рыбина // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.—2010.—№43.—С 4.—13.
16. Рибіна І.О. Метод променів провідностей та моделювання фантома в імпедансній томографії / І.О. Рибіна // Вісник ЖДТУ.—2010.—т.8.—4.—С.21 — 28.
17. Рибіна І.О. Обчислення похідних від передаточного опору по поверхневій провідності кінцевих елементів при розв'язанні зворотної задачі імпедансної томографії / І.О. Рибіна, О.І. Рибін, О.Б. Шарпан // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2011.—№44.— С.5—11.
18. Рибіна І.О. Розв'язання зворотної задачі імпедансної томографії методами зон провідностей та зворотної проєкції / І.О. Рибіна, О.І. Рибін, О.Б. Шарпан // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2011.—№45.—С.5—18.
19. Hounsfield G.N. Computed Medical Imaging / G.N. Hounsfield // Nobel Lectures in Physiology or Medicine 1971—1980. World Scientific Publishing Co. –1992. - P.568 - 586 .
20. Mansfield P. Snap-short MRI / P. Mansfield // Les Prix Nobel. The Nobel Prizes 2003. Nobel Foundation. – 2004. – P. 245 – 257.
21. Хорнак Дж. П. Основы МРТ.
22. Мэнсфилд П. Быстрая магнитно-резонансная томография/П. Мэнсфилд // Успехи физических наук. – 2005. – т.175.— № 10. – С. 1044 – 1052.
23. Сильвестр П., Феррари З. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков.— М.: Мир, 1986.—229с.
24. Рыбин А.И. Решение задач моделирования обращением матрицы методом взаимных производных/ А.И. Рыбин // Радиоэлектроника.—1978.—№6.—С.35—47. (Изв. вузов).
25. Рыбин А.И. Численно-символьный метод анализа электрических цепей обобщенным методом модификаций / А.И. Рыбин // Праці Інституту електродинаміки НАН України: Сб. наукових праць.—2002.—№1(1)—С.26—30.
26. Основы теории кіл: Підручник для ВНЗ. Ч.2 /Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін / За заг. ред. В.М. Шокала та В.І. Правди.—Харків: ХНУРЕ: Колегіум, 2006.—668с.
27. Трохименко Я.К. Статистический анализ линейных электронных цепей постоянного тока / Я.К.Трохименко, И.С. Каширский, А.И. Рыбин // Радиоэлектроника.—

1974.—№6.—С.69—73. (Изв.вузов).

28. Трохименко Я.К. Вероятностный анализ линейных электронных цепей переменного тока / Я.К. Трохименко, И.С. Каширский, А.И. Рыбин // Радиоэлектроника.—1975.—№6.—С.35—40. (Изв. вузов).

29. Трохименко Я.К. Вероятностный анализ линейных электронных цепей методом разбиения на подсхемы / Я.К. Трохименко, И.С. Каширский, А.И. Рыбин // Радиоэлектроника.—1976.—№6.—С.70—77. (Изв. вузов).

30. Рыбин А.И., Трохименко Я.К. Символьный анализ электронных цепей с использованием матрицы взаимных производных / А.И. Рыбин, Я.К. Трохименко // Радиоэлектроника.—1979.—№6.—С.32—37. (Изв. вузов).

31. Rybin A.I., Trochimenko J.K., Rodionova M.V. Analysis of Irregular Networks using Diacoptic Modification of Admittance Matrix / A.I. Rybin, J.K. Trochimenko, M.V. Rodionova // Electronic Engineering (Czech rep.).—1993.—№4.—P.9—12.

32. Рибіна І.О. Обчислення похідних від передаточного опору по поверхневій провідності кінцевих елементів при розв'язанні зворотної задачі імпедансної томографії методом зон провідностей / І.О. Рибіна, О.І. Рибін, О.Б. Шарпан // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. — 2011. — №44.— С.5—21.

33. Сушко І.О. Алгоритм розв'язання прямої задачі імпедансної томографії методом модифікацій / І.О. Сушко // Вісник НТУУ «КПІ» Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. — 2011. — № 47. — С.165 – 175.

*Сушко І.А., Рыбин А.И. Сравнение классического метода решения обратной задачи импедансной томографии с методом «зон» проводимости. Проведено сравнение свойств классического итерационного метода реконструкции образа в импедансной томографии и метода зон проводимости с точки зрения организации вычислительных процедур, ожидаемой точности и трудоёмкости получения образа. На расчётных примерах показана весьма малая чувствительность передаточных сопротивлений к изменению поверхностной проводимости отдельного конечного элемента. При этом малая чувствительность проявляется, как для конечных элементов, расположенных в центре фантома, так и для конечных элементов, расположенных по обводу фантома. Малая чувствительность вызывает плохую обусловленность матрицы производных, усугубляемую большим порядком матрицы. Всё это приводит к численной неустойчивости при решении обратной задачи (задачи реконструкции). Метод зон проводимости позволяет обойти указанные трудности: приводит (за счёт дополнительной структуризации фантома) к радикальному уменьшению порядка матрицы производных, повышению чувствительности и обусловленности такой матрицы. Для оценок приведены значения передаточных сопротивлений и производных для равномерного фантома и фантомов с неоднородностями.*

**Ключевые слова:** импедансная томография, фантом, конечный элемент, зоны проводимости, прямая задача, обратная задача, задача реконструкции изображения, матрица производных.

*Сушко І.О., Рибін О.І. Порівняння класичного методу розв'язання зворотної задачі імпедансної томографії з методом «зон» провідності. Проведено порівняння властивостей класичного ітераційного методу реконструкції образу в імпедансній томографії і методу зон провідності з точки зору організації процедур обчислення, очікуваної точності та трудоємності отримання образу. На прикладах розрахунку показана доволі мала чутливість передаточних опорів до зміни поверхневої провідності окремого кінцевого елементу. При цьому мала чутливість проявляється, як для кін-*

цевих елементів, розташованих в центрі фантому, так і для кінцевих елементів, розташованих по обводу фантому. Мала чутливість є причиною поганої обумовленості матриці похідних, що посилюється великим порядком матриці. Все це призводить до чисельної нестійкості при розв'язанні зворотної задачі (задачі реконструкції). Метод зон провідності дозволяє оминати вказані труднощі: призводить (за рахунок додаткової структуризації фантому) до радикального зменшення порядку матриці похідних, підвищення чутливості та обумовленості такої матриці. Для оцінки приведені значення передаточних опорів та похідних для рівномірного фантому та фантомів з неоднорідностями.

**Ключові слова:** імпедансна томографія, фантом, кінцевий елемент, зони провідності, пряма задача, зворотна задача, задача реконструкції зображення, матриця похідних.

*Sushko I.O., Rybin O.I. Comparison of classical and conductivity “zones” methods for solving EIT inverse problem. Comparison of classical iteration imagine reconstruction method and conductivity zones method properties in EIT from the point of view of calculation organization, expecting precision and computational cost of imagine receiving is carried out. Reasonably small transfer resistances sensitivity to surface conductivity changes of separate finite element is shown. Small sensitivity is appeared for finite elements, which are situated in the central part of phantom, and also for finite elements, which are situated in the phantom outline. Small sensitivity is the cause of derivative matrix bad conditionality, that is aggravated with big matrix order. It led to quantity instability by solving of inverse problem (reconstruction problem). Conductivity zones method allows to avoid some difficulties: leads to derivative matrix order reduction, increasing of sensitivity and matrix conditionality. Transfer resistances and derivatives values for uniform phantom and for phantoms with different inhomogeneities for assessment are proposed.*

**Keywords:** Electrical Impedance Tomography, phantom, finite element, conductivity zones, forward problem, inverse problem, imagine reconstruction problem, derivative matrix.