УДК 621.396.67.095

СТОХАСТИЧНІ ФУНКЦІОНАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАДІОЕЛЕКТРОННИХ АПАРАТІВ

Уваров Б.М., к.т.н., доцент,
Зіньковський Ю.Ф., д.т.н., професор
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут", м. Київ, Україна

Вступ. Формулювання проблеми

У відповідності до функціонального призначення кожний радіоелектронний засіб (РЕЗ) проектується, як технічний об'єкт з робочими характеристиками, які можна представити множиною фізичних величин z_i, а їх сукупність – вектором

$$\boldsymbol{Z} = [z_1, z_2 \ldots z_i \ldots z_n]^{\mathrm{T}}. \quad (1)$$

Під час функціонування РЕЗ у ньому здійснюються процеси, результатами яких повинні бути вихідні характеристики y_i, сукупністю яких будуть вектори

$$\boldsymbol{Y} = [y_1, y_2 \ldots y_i \ldots y_n]^{\mathrm{T}}, \quad (2)$$

кожний з яких, у свою чергу, можна представити вектор-функцією

$\boldsymbol{Y} = \varphi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})$, де:

– вхідні впливи $\boldsymbol{X} = [x_1, x_2 \ldots x_j \ldots x_m]^{\mathrm{T}}$, (3)

– внутрішні процеси $\boldsymbol{P} = [\, p_1, p_2 \ldots p_k \ldots p_l]^{\mathrm{T}}$, (4)

– зовнішні впливи $\boldsymbol{Q} = [\, q_1, q_2 \ldots q_r \ldots q_s]^{\mathrm{T}}$. (5)

Функціональні характеристики РЕЗ – це різні вектори $\boldsymbol{Z_v}$, а комплексна функція всього пристрою – функціонал $\mathscr{F} = [\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2 \ldots \boldsymbol{Z}_v \ldots \boldsymbol{Z}_w]^{\mathrm{T}}$.

Вектори $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ та функціонал $\mathscr{F}$ у реально функціонуючому РЕЗ не є детермінованими – кожен з них завжди має відхилення від номінальних значень й повинен розглядатися як стохастична функція, що знаходиться у межах розсіяння.

Тому найбільш доцільно характеризувати функціональні показники РЕЗ не тільки їх номінальними значеннями, але й імовірнісними показниками – функціями розсіяння, щільностями імовірності, числовими характеристиками (моментами відповідних порядків).

Узагальнена схема процесів у складному РЕЗ наведена на рис. 1.

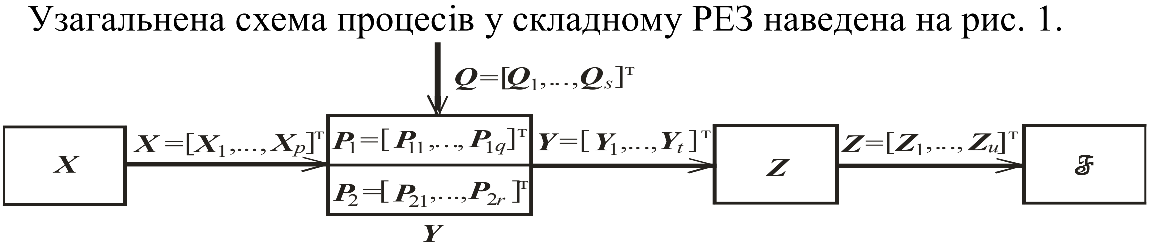

Рис. 1. Процеси у РЕЗ

До числа вхідних впливів $\boldsymbol{X}$ відносяться різні електричні процеси (наприклад, напруги, що подаються на вхід функціонального вузла – ФВ), механічні процеси (наприклад, вібро- переміщення опорних точок друкованої плати), теплові процеси (наприклад, процеси тепловиділення у електрорадіоелементах – ЕРЕ чи ФВ) та ін.

Внутрішні процеси $\boldsymbol{P}$ у РЕЗ можна поділити на дві групи. До першої групи $\boldsymbol{P}_1$ слід віднести основні процеси, до другої $\boldsymbol{P}_2$ – процеси, що викликаються основними.

Процеси $\boldsymbol{P}_1$ – це підсилення, генерація, модуляція, демодуляція, передача та прийом радіо- та інформаційних сигналів; перетворення сигналів: цифро-аналогове, аналого-цифрове, за частотою, фазою; відведення механічної енергії від конструктивних модулів РЕЗ у віброізоляторах; виникнення механічних напружень у елементах конструкції при деформаціях; тепломасоперенос й т.п. Фізичні та математичні моделі цих процесів достатньо розроблені.

Неідеальність процесів, які складають першу групу (загальна характеристика їх недосконалості – коефіцієнт корисної дії $\eta < 0{,}1$), призводить до появи процесів групи $\boldsymbol{P}_2$. До числа останніх відносяться: виділення тепла у резистивних плівках та перехідних зонах діодів й транзисторів; зворотний струм у них же; внутрішнє розсіяння енергії в елементах конструкції; електролітичні процеси у конденсаторах; часові зміни властивостей конструкційних матеріалів, що пов'язані з їх старінням. Енергетичні витрати на процеси другої групи складають 75 – 90% загальних витрат в усьому РЕЗ.

Кожний з процесів, що входять у групу $\boldsymbol{P}_1$, може породжувати декілька процесів групи $\boldsymbol{P}_2$. Моделі процесів групи $\boldsymbol{P}_2$ у більшості своїй значно складніше моделей групи $\boldsymbol{P}_1$ (наприклад, теорія зовнішнього тертя та зношування матеріалів – одна з найбільш складних фізичних теорій й до нинішнього дня до кінця не сформована).

До числа зовнішніх впливів $\boldsymbol{Q}$ на РЕЗ можна віднести: електромагнітні та іонізаційні випромінення оточуючого середовища (у тому числі ті, що викликані сонячною радіацією); лінійні прискорення, вібрації та удари; кліматичні фактори й т.п.

Методи проектування РЕЗ як складної ієрархічної системи взаємопов’язаних компонентів повинні відповідати суті процесів, що протікають в ньому при функціонуванні й зображуються векторами $\boldsymbol{Y} = [y_1, y_2 \ldots y_i \ldots y_n]^{\mathrm{T}}$.

У зв’язку з цим виникає проблема створення методів проектування та оптимізації РЕЗ, функціональні характеристики яких повинні бути одержані як множина векторів, що знаходяться у межах, які відповідають імовірнісним показникам. З цієї множини й повинні обиратися варіанти конструкції, яка може бути т.зв. моделлю нульового рівня. Для виконання цієї задачі необхідно створити комплекс об’єктно-орієнтированих програм –

модулей системи автоматизованого проектування (САПР), результатом роботи якої буде модель нульового рівня майбутнього РЕЗ.

На наступних етапах проектування повинні бути одержані найвищі показники якості об'єкта, який проектується, що досягається параметричною оптимізацією, для якої також необхідно створювати відповідні модулі САПР.

Стохастична природа функціональних характеристик РЕЗ

Джерелом імовірнісних властивостей характеристик РЕЗ перед усім повинні бути властивості конструкційних матеріалів, значення котрих завжди мають деяке розсіяння, яке викликане нестабільністю хімічного складу, особливостями технологічного процесу виготовлення матеріалу, методами експериментальних вимірювань властивостей останнього. У більшості випадків допуски на розсіяння характеристик електро- та радіотехнічних матеріалів достеменно невідомі; можна вважати, що вони не перевищують ± 5 %

Значення параметрів ЕРЕ – опори, ємності, індуктивності й т.п., характеристики активних елементів (напівпровідникових приладів – НПП, мікросхем – МС) також наводяться у технічних умовах з допусками, іноді значними. Для опорів резисторів та ємностей конденсаторів допуски складають ± 5, 10, 20%; на температурний коефіцієнт ємності конденсаторів допуски можуть перевищувати ±40%. Також достатньо великі допуски на параметри НПП й МС.

Тому вектори $\boldsymbol{P}$ (математичні моделі внутрішніх процесів), що залежать від властивостей матеріалів та параметрів ЕРЕ, повинні визначатися як стохастичні функції й характеризуватися відповідними імовірнісними чи числовими (не імовірнісними) показниками.

Параметри зовнішніх факторів (температури, механічні впливи й т. ін.), що впливають на внутрішні процеси в РЕЗ – вектори $\boldsymbol{Q}$ – також ніколи не є детермінованими, не залишаються стабільними та завжди змінюються в деяких межах, тобто є випадковими функціями.

Найбільш стабільними можна вважати вхідні впливи $\boldsymbol{X}$, але й вони у більшості випадків мають стохастичну природу. Так, наприклад, якщо керуючий сигнал формується людиною-оператором, цей останній завжди підданий у тому чи іншому степеню впливу оточуючого середовища, параметри котрого можуть мати стохастичний характер, а це призведе до розсіяння значень керуючих впливів. Якщо керуючий сигнал сам формується технічним пристроєм (наприклад, керуючим комплексом технологічного процесу), то він також буде стохастичною величиною чи функцією.

Таким чином, методика розрахунку значень функціональних характеристик РЕЗ – векторів $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})$ – при проектуванні повинна враховувати їх стохастичну природу.

Стохастичні математичні моделі процесів в РЕЗ

Початковий етап проектування будь-якого РЕЗ – створення математичних моделей для процесів, що представлені векторами (функціями) ***Y***, ***Z*** та функціоналом $\mathscr{F}$.

Необхідні функціональність та надійність РЕЗ можуть бути одержані лише комплексним одночасним врахуванням всіх вказаних процесів як підмножини взаємопов'язаних явищ, що встановлюють вплив кожного з них на вихідні системні параметри виробу.

Загальні закономірності перетворення форм енергії можливо одержати, використовуючи принцип найменшої дії Остроградського для варіацій кінетичної енергії δT й узагальненої роботи δA у вигляді:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} (\delta T + \delta A) d\tau = 0, \tag{6}$$

де τ – час.

Якщо варіація елементарної роботи δA дорівнює варіації потенціальної енергії δU для консервативних систем, рівняння (6) перетворюється у вираз принципу Гамільтона:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} (\delta T - \delta U) d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\delta L) d\tau = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} (L) d\tau = 0, \tag{7}$$

де $L = T - U$, чи функція Лагранжа (лагранжіан).

Для системи об'єктів інтеграл $S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L d\tau$ – дія за Гамільтоном – Остроградським, повинен приймати мінімальне значення на достатньо малому відрізку часу $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (L) d\tau \to \min . \tag{8}$$

Використання виразів (6)...(8) для знаходження характеристик реальних енергетичних процесів призводить до основної задачі варіаційного числення: знаходження невідомих скалярних функцій $z_i(x,y)$, які реалізують максимум чи мінімум визначених інтегралів системи n функцій $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$,..., $z_n(x,y)$ [1]:

$$I[z(x,y)] = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} F[x, y, z, z'(x), z'(y), z''(x), z''(y)] dx dy. \tag{9}$$

Кожна із скалярних функцій $z_i(x,y)$ у виразу функціонала (9) повинна вдовольняти системі диференціальних рівнянь Ейлера:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0; \; i = 1,2,..., n . \tag{10}$$

З рівнянь (7) – (10) можливо одержати систему диференціальних рівнянь Лагранжа (т.зв. рівняння Лагранжа другого роду), які для детермінованих величин мають вигляд [2]:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}-Q_i=0,\ i=1,...,k, \qquad (11)$$

де T – кінетична енергія, U – потенціальна; Φ – функція розсіяння енергії (функція Релея); Q – зовнішня узагальнена сила; q_i – узагальнені координати.

Рівняння (11) виражають фундаментальну природу будь-якого енергетичного процесу й можуть бути використані для побудови моделей основних процесів, що протікають у РЕЗ, якщо знайдені вирази для силових факторів, кінетичної та потенціальної енергій, функції розсіяння, які притаманні даному процесу.

Рішення системи вихідних диференціальних рівнянь дають можливість одержати для цих процесів рівняння у скінченному вигляді, які об'єднують первинні фізичні величини у функції, що відповідають природі процесу. По суті кожне з цих рішень також є математичною моделлю відповідного процесу, тільки у скінченній формі. Диференціальне рівняння придатне для опису класу явищ, алгебраїчне – конкретного явища, відповідного значенням фізичних величин, що входять в нього. Але обидві ці моделі подають описи стану одного й того ж фізичного явища (чи об'єкту) у дану мить часу, представлені різними рівняннями – диференціальним та алгебраїчним.

Вихідні диференціальні рівняння звичайно записують як детерміновані, такими же детермінованими вважають й входячи в них фізичні величини, у детермінованій формі також одержують й розв'язки – алгебраїчні рівняння.

Але реальні процеси є стохастичними, тому й вихідні математичні моделі для них необхідно представляти у стохастичній формі, з врахуванням стохастичних властивостей величин, пов'язаних з процесом перетворення енергії. Вихідну систему рівнянь Лагранжа можна записати у такому вигляді:

$$\left[\frac{d}{d\tau}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right]^{st}-\left[\frac{\partial T}{\partial q_i}\right]^{st}+\left[\frac{\partial U}{\partial q_i}\right]^{st}+\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}\right]^{st}-Q_i^{st}=0,\ i=1,...,k; \qquad (12)$$

верхнім символом "*st*" (*stochastic* – стохастичний) тут і далі позначені стохастичні властивості відповідних величин та функцій.

Вирази для різних форм енергії та функції розсіяння як функцій узагальнених координат q_i мають вигляд:

$$T^{st}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^{st}\left(\dot{q}_i^{st}\right)^2 \text{ – для кінетичної енергії;} \qquad (13)$$

$$U^{st}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}c_i^{st}\left(q_i^{st}\right)^2$$ – для потенціальної енергії; (14)

$$\Phi^{st}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}b_i^{st}\left(\dot{q}_i^{st}\right)^2$$ – для функції розсіяння Релея, (15)

де узагальнені коефіцієнти: a_i^{st} – інерції; c_i^{st} – жорсткості; b_i^{st} – розсіяння енергії.

Методи інтегрування стохастичних диференціальних рівнянь суттєво відрізняються від звичайних правил інтегрування для детермінованих функцій та процесів й розглянуті у спеціальній літературі [7,8]. Для цих операцій використовують інтеграли Іто, Стратоновича, числові методи статистичного моделювання. Головна задача при такому підході – одержати невідоме раніше рішення вихідного стохастичного диференціального рівняння (чи системи таких рівнянь).

Для детермінованих моделей розв’язки вихідних диференціальних рівнянь у багатьох випадках відомі: так, наприклад, з системи (11) після відповідних перетворень можна одержати: рівняння Максвелла для електромагнітних процесів [3], диференціальні рівняння для струмів та напруг у електричних колах [4], процесів тепломасопереносу [5], механічних коливальних процесів [6].

Якщо ж вихідні рівняння (12) будуть стохастичними, то й одержані з них диференціальні рівняння процесів, що протікають у РЕЗ – електромагнітних, електричних, механічних, тепломасопереносу – також повинні бути стохастичними, а розв’язки останніх (рівняння функціональних характеристик) – відображати їх стохастичну природу, й характеризуватися функціями розподілу, математичним сподіванням, дисперсією.

Таким чином, взявши за основу детерміновані вирази для функціональних характеристик РЕЗ, які є у наявності, та виявивши стохастичну природу фізичних величин, що у них входять, можливо одержати стохастичні вирази цих характеристик, оминаючи інтегрування вихідних стохастичних диференціальних рівнянь.

При такому підході можливо вважати, що математичні перетворення, позначені символами похідних від стохастичних величин, тобто $\left[\frac{\partial T}{\partial q}\right]^{st}$, $\left[\frac{\partial U}{\partial q}\right]^{st}$ та ін. є операторними зображеннями математичних скінченних переходів (по суті аналогічних детермінованим) від первісної стохастичної величини до зображення її похідної, причому методи цього переходу можна не розглядати. Зворотні переходи (інтегрування диференціальних стохастичних рівнянь, також без деталізації математичних операцій) дозволять одержати розв’язки вихідних рівнянь на основі відомих детермінованих рішень у вигляді стохастичних функцій.

Це дозволяє одержати рівняння для основних енергетичних процесів у

РЕЗ у стохастичному вигляді з рівняння (12), використавши детерміновані математичні моделі з [3 – 6]:

для *електромагнітних процесів*

$$\left.\begin{aligned}&\left(\mathrm{rot}\ \vec{H}\right)^{st} = \vec{j}^{\,st} + \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial \tau}\right)^{st}; \quad \left(\mathrm{rot}\ \vec{E}\right)^{st} = -\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau}\right)^{st};\\ &\left(\mathrm{div}\ \vec{B}\right)^{st} = 0; \quad \left(\mathrm{div}\ \vec{D}\right)^{st} = \rho^{st},\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

де вектори: $\vec{H}$ – магнітної напруженості, $\vec{j}$ – щільності струму, $\vec{L}$ – електричної індукції, $\vec{E}$ – електричної напруженості, $\vec{B}$ – магнітної індукції; ρ – щільність зарядів.

для *електричних послідовного та паралельного кіл* з резистором R, індуктивністю L, ємністю C:

$$\left.\begin{aligned}&L^{st}\left(\frac{d^2 q_e}{d\tau^2}\right)^{st} + R^{st}\left(\frac{dq_e}{d\tau}\right)^{st} + \frac{1}{C^{st}}\left(dq_e\right)^{st} = E^{st}(\tau);\\ &C^{st}\left(\frac{d^2 U}{d\tau^2}\right)^{st} + \frac{1}{R^{st}}\left(\frac{dU}{d\tau}\right)^{st} + \frac{1}{L^{st}}U^{st} = \left(\frac{di}{d\tau}\right)^{st},\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

де q_e – заряд конденсатора, E – електрорушійна сила та U – напруга джерела струму;

– диференціальне рівняння *механічних коливань* пластини (наприклад, друкованої плати чи підкладки мікрозбірки), які збуджуються зовнішньою силою $P(x,y,\tau)$, також одержане з (12):

$$m^{st}\left[\frac{\partial^2 w(x,y,\tau)}{\partial \tau^2}\right]^{st} + D^{st}\left(1 + j\gamma^{st}\right)\times\left\{\left[\frac{\partial^4 w(x,y,\tau)}{\partial x^4}\right]^{st} + 2\left[\frac{\partial^4 w(x,y,\tau)}{\partial x^2 \partial y^2}\right]^{st} + \left[\frac{\partial^4 w(x,y,\tau)}{\partial y^4}\right]^{st}\right\} = P^{st}(x,y,\tau), \qquad (18)$$

де $w(x,y,\tau)$ – динамічні прогини; m – зведена маса плати; D – циліндрична жорсткість плати; γ – коефіцієнт механічних втрат матеріалу; j – уявна одиниця;

– для *теплових процесів* – передавання тепла конвекцією, кондукцією, радіацією – математичні моделі у вигляді відповідних систем рівнянь: наприклад, модель нестаціонарного теплового процесу поширення тепла у платі чарунки РЕЗ чи у підкладці мікрозбірки (МЗб) кондукцією – диференціальне рівняння параболічного типу:

$$\frac{1}{a^{st}}\left[\frac{T(x,y,\tau)}{\partial \tau}\right]^{st} = \left[\frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial x^2}\right]^{st} + \left[\frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial y^2}\right]^{st} + \frac{Q^{st}(x,y,\tau)}{\lambda^{st}}, \qquad (19)$$

де $T(x,y,\tau)$ – температура; $Q(x,y,\tau)$ – потужність теплового джерела; a та λ – коефіцієнти температуро- та теплопровідності матеріалу плати;

– для *процесів тепломасопереноса* у об'ємі тіла (речовини) – систему рівнянь:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)^{st} = K_{22}^{st}\left(\nabla^2 T\right)^{st} + K_{21}^{st}\left(\nabla^2 u\right)^{st}; \ \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^{st} = K_{11}^{st}\left(\nabla^2 u\right)^{st} + K_{12}^{st}\left(\nabla^2 T\right)^{st}, \qquad (20)$$

де T – температура, u – вологовміст у об'ємі; коефіцієнти:

$$K_{11}^{st}=a_m^{st};\ K_{12}^{st}=a_m^{st}\delta^{st};\ K_{21}^{st}=a_{m1}^{st}\frac{r_{12}^{st}}{c^{st}};\ K_{22}^{st}=a^{st}+a_{m1}^{st}\frac{r_{12}^{st}}{c^{st}},$$

де, у свою чергу: a, a_m, a_{m1} – критерії температуропровідності речовини, масопровідності вологи, пари відповідно; c – зведена теплоємність речовини у об'ємі; δ – параметричний коефіцієнт термодифузії; r_{12} – питома теплота сублімації вологи.

Розв'язками рівнянь (16)...(20) будуть вирази для відповідних функцій $\boldsymbol{Y} = \varphi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$; всі фізичні величини, що входять у вихідні рівняння, доцільно вважати стохастичними, тому й результатом розв'язання цих рівнянь будуть функції з імовірнісними характеристиками, й кожна з них буде множиною величин у діапазоні, що визначається межами первинних стохастичних величин.

Імовірнісні та числові характеристики випадкових функцій чи векторів $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$, функціонала $\mathscr{F}$, можна розрахувати за відповідними характеристиками первинних величин, які у них входять [9].

Приклади визначення характеристик РЕЗ як стохастичних функцій

Нестаціонарне температурне поле МЗб

Для підкладки МЗб з розмірами $l{\times}b{\times}h$, на якій встановлені джерела тепла (ДТ) – МС, ЕРЕ, ФВ, яка охолоджується конвекцією з її поверхонь та торців з коефіцієнтами α та k, стохастичне диференціальне рівняння нестаціонарного процесу, по аналогії з (19):

$$\frac{1}{a^{st}}\left[\frac{\partial T(x,y,\tau)}{\partial \tau}\right]^{st} = \left[\frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial x^2}\right]^{st} + \left[\frac{\partial^2 T(x,y,\tau)}{\partial y^2}\right]^{st} - \frac{\alpha^{st}}{\lambda^{st} h}T^{st}(x,y,\tau) + \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^{st}(x,y)}{\lambda^{st} h}, \qquad (21)$$

де q_i – поверхнева щільність теплового потоку від локальних ДТ; a та λ – коефіцієнти температуро- та теплопровідності.

Розв'язок рівняння (21) можна одержати методом скінченних інтегральних перетворень, застосувавши ядра перетворень [5], що подані з врахуванням стохастичних властивостей величин:

де μ_n , μ_m – корені характеристичних рівнянь:

$$\tan \mu_n^{st} = \frac{2\mu_n^{st}\mathrm{Bi}_1^{st}}{\left(\mu_n^{st}\right)^2 - \left(\mathrm{Bi}_1^{st}\right)^2}; \quad \tan \mu_m^{st} = \frac{2\mu_m^{st}\mathrm{Bi}_2^{st}}{\left(\mu_m^{st}\right)^2 - \left(\mathrm{Bi}_2^{st}\right)^2}.$$

Критерії Біо: $\mathrm{Bi}_1^{st} = \frac{k^{st} l}{\lambda^{st}}$, $\mathrm{Bi}_2^{st} = \frac{k^{st} b}{\lambda^{st}}$, $\mathrm{Bi}^{st} = \frac{\alpha^{st} h}{\lambda^{st}}$; стохастична природа цих критеріїв визначається стохастичністю коефіцієнтів α, k, λ.

Кінцеве рівняння для температури:

$$T^{st}(x,y,\tau)= 8\sum_{i=1}^{k}\frac{\mathrm{Bi}^{st}}{\alpha^{st}}\frac{lb}{h^2}\frac{q_i^{st}}{\Delta x_i\Delta y_i}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(K_n^{st}\right)^2\left(K_m^{st}\right)^2\frac{I_n^{st}(x_i)I_m^{st}(y_i)}{\mu_n^2\frac{b}{l}+\mu_m^2\frac{l}{b}+\mathrm{Bi}^{st}\frac{lb}{h^2}}\times$$

$$\times\left[\cos\left(\frac{\mu_n^{st}}{l}x\right)+\frac{\mathrm{Bi}_1^{st}}{\mu_n^{st}}\sin\left(\frac{\mu_n^{st}}{l}x\right)\right]\cdot\left[\cos\left(\frac{\mu_m^{st}}{b}y\right)+\frac{\mathrm{Bi}_2^{st}}{\mu_m^{st}}\sin\left(\frac{\mu_m^{st}}{b}y\right)\right]\Phi_{n,m}^{st}(\tau), \quad (22)$$

де $\Phi_{n,m}^{st}(\tau)=1-\exp\left[-\frac{a^{st}}{lb}\left(\left(\mu_n^{st}\right)^2\frac{b}{l}+\left(\mu_m^{st}\right)^2\frac{l}{b}+\mathrm{Bi}^{st}\frac{lb}{h^2}\right)\tau\right]$ – функція, що враховує вплив часу τ.

Таким чином, температури у будь-якій точці плати МЗб – стохастичні величини, а їх межі визначаються імовірнісними показниками найбільш впливових величин, що входять у рівняння (22). Це розсіяння значень щільностей теплових потоків q_i та теплофізичних величин α, k, λ, a, тобто будь-яка температура $T(x, y, \tau)$ є стохастичною функцією п'яти стохастичних величин.

При більш детальному розгляді особливостей процесу можливо врахувати також й вплив стохастичних параметрів лінійних розмірів пластини та координат точок x, y; але виробничі допуски на них значно менші (на декілька порядків) розсіяння значень інших параметрів, які входять у (22).

Міцність та витривалість елементів конструкції при дії зовнішніх механічних факторі

Механічна стійкість конструкції РЕЗ визначається рівнем механічних напружень у її деталях, причому аналіз показує, що найбільш навантажені елементи РЕЗ – виводи ЕРЕ та МС, та їх паяні з'єднання [10]. Для зменшення напружень в них необхідно намагатися забезпечити мінімальні динамічні деформації (прогини плат та кутові деформації в місцях виводів та пайок) при дії вібрацій та ударів.

Диференціальне стохастичне рівняння динамічних деформацій плати РЕЗ під дією зовнішньої періодичної сили $P(x, y, \tau)$ – рівняння (18). Розв'язуючи його, одержимо динамічні прогини плати [10], які також подамо у вигляді стохастичної функції:

$$w^{st}(x,y)=\sum_{j}\sum_{k}\frac{P^{st}(x_i,y_i)}{2m^{st}\left(\omega_0^{st}\right)^2}KR_P^{st}w_i(\xi)w_k(\vartheta), \quad (23)$$

де K – коефіцієнт, що визначається способами закріплення сторін плати; $w(\xi)$, $w(\vartheta)$ – т.зв. базисні функції вертикальних прогинів [10]; ω_0^{st} – власна частота плати; R_P^{st} – коефіцієнт динамічного підсилення; зведена маса плати

$$m^{st}=m_{\text{п}}^{st}+\sum_{i,k}\frac{m_i^{st}w_i^2(\xi)w_k^2(\vartheta)}{lb\int_a w_i^2(\xi)d\xi\int_b w_k^2(\vartheta)d\vartheta},$$

де $m_{\text{п}}$ – маса самої плати, m_i – маси встановлених на платі ФВ.

Стохастичними величинами у (23) перед усім слід вважати масу m, частоту власних коливань ω_0, силу $P(x,y)$, коефіцієнт механічних втрат γ.

Коефіцієнт R_P залежить від відношення стохастичних частот зовнішнього збудження ω_P та власної ω_0 – коефіцієнта розладу $\varpi = \omega_P/\omega_0$, й також повинен розглядатися як стохастична функція:

$$R_P^{st} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\varpi^{st}\right)^2\right]^2 + 4\left(\gamma^{st}\varpi^{st}\right)^2}},$$

власна частота $\omega_0^{st} = \frac{\varphi(\beta)}{l^2}\sqrt{\frac{D^{st}}{m^{st}}}$, де $\varphi(\beta)$ – функція, що враховує відношення сторін плати $\beta = l/b$ та характер їх закріплення.

Циліндрична жорсткість плати D – стохастична функція:

$$D^{st} = \frac{E^{st}h^3}{12\left[1-\left(\nu^{st}\right)^2\right]},$$

де E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона для матеріалу.

Таким чином, динамічні прогини плати $w(x,y)$ – стохастичні функції стохастичних величин m, E, γ, ν, z_o, ω_z, ω_0.

Методи визначення імовірнісних показників функціональних характеристик

Числові характеристики векторів $\boldsymbol{Y}$ (моменти відповідних порядків – математичне сподівання, дисперсію й т.д.) як стохастичних векторів $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ можна визначити, наприклад, таким чином. Припустимо, що імовірнісні характеристики кожного з векторів $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ у складі вектора $\boldsymbol{Y}$ визначені на основі статистичних даних чи задані, тобто відомі їх умовні щільності розподілу $f_X = f(x_1,\ldots,x_m)$, $f_P = f(p_1,\ldots,p_l)$, $f_Q = f(q_1,\ldots,q_s)$ (наприклад, вони відповідають нормальному закону), а самі вектори $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ незалежні – у більшості практичних випадків такі умови виконуються.

По аналогії з характеристиками випадкових величин для функціонального вектора $\boldsymbol{Y}$ імовірнісна характеристика [9]:

– щільність розподілу: $f_Y = f_X f_P f_Q$;

числові характеристики:

– математичне сподівання:

$$m_Y = M\left[\varphi(X,P,Q)\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(X,P,Q) f_Y\, dx\, dp\, dq\,; \tag{24}$$

– дисперсія: $$D_Y = D\left[\varphi(X,P,Q)\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(X,P,Q) - m_Y\right]^2 f_Y\, dx\, dp\, dq\,. \tag{25}$$

У дійсності задача визначення числових показників функціональних характеристик РЕЗ, що проектується, може виявитися більш складною за таких причин:

– вектори $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})$ можуть бути математично складними функціями;

– вектори $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ можуть бути взаємозалежними.

При цьому можуть з'явитися труднощі обчислювального характеру розрахунку значень інтегралів у формулах (24), (25). Такі розрахунки звичайно провадять за допомогою математичних пакетів (наприклад, ***MathCad***), але для інтегралів великої кратності чи для складних математичних виразів векторів $\boldsymbol{Y}$ результат одержати не завжди вдається.

У такому випадку дисперсію D_Y можна обчислювати за допомогою коефіцієнтів впливу дисперсій [9]:

$$D_Y = k_{Yx} D_X + k_{Yp} D_P + k_{Yq} D_Q; \qquad k_{Yx} = \frac{\partial \varphi}{\partial X};\; k_{Yp} = \frac{\partial \varphi}{\partial P};\; k_{Yq} = \frac{\partial \varphi}{\partial Q}.$$

Якщо функція $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})$ явно нелінійна, дисперсію D_Y потрібно визначити з врахуванням цієї нелінійності:

$$D_Y = \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \Phi_i}\right)_i^2 D_{\Phi i} + 0{,}5 \sum_i \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Phi_i^2}\right)_i^2 D_{\Phi i}^2 + \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j}\right) D_{\Phi i} D_{\Phi j}, \tag{31}$$

де Φ_i – вектори $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$.

Коефіцієнти впливу k_{Yi} за неможливістю аналітичного їх визначення, також як й дисперсія D_Y за рівнянням (31), можуть бути розраховані числовими методами, але для цього, скоріш всього, буде потрібно створити спеціальну програму.

Таким же чином можливо оцінити числові характеристики векторів $\boldsymbol{Z}$, які будуть одержані у результаті проектування, а значення кожного з них повинні у тому чи іншому степеню відповідати потрібним показникам $\boldsymbol{Z_P}$ пристрою, що проектується.

Висновки:

– показано, що всі функціональні характеристики РЕЗ представляють собою взаємно корельовані функції високої складності зі стохастичними властивостями;

– показано, що всі показники міцності, витривалості, теплових режимів, надійності структурно-конструктивних модулів РЕЗ повинні під час проектування розглядатися як стохастичні, з відповідними імовірнісними характеристиками й межами, у яких можуть знаходитися розраховані значення;

Література

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1982. – 424 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10-ти т. Т.1 – Механика – М.: Наука, 1988. – 216 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. — Издание 7-е, исправленное. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
4. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1982. – 624 с.
5. Лыков А.В. Тепломассообмен (Справочник). 2-е изд., перераб. и доп.– М.:

Энергия, 1978. – 480 с.
6. Бабаков И.М. Теория колебаний: Учеб. пособие для студентов втузов. – М.: Наука, 1968. – 560 с.
7. Стратонович Р.Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. – М.: Наука, 1985 – 478 с.
8. Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: Теория и практика численного решения. – 3-е изд., испр. И доп. – СПб.: СПбГПУ, 2009. – 767 с.
9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей – 8-е изд. – М.: Высш. шк., 2002 – 576 с.
10. Уваров Б.М. надійність конструкцій чарунок радіоелектронної апаратури за зовнішніх механічних впливів// Вісник НТУУ "КПІ". Серія радіотехніка, радіоапаратобудування. – 2009. – Вип. 39, с. 91 – 98.

Уваров Б.М., Зіньковський Ю.Ф. ***Стохастичні функціональні характеристики радіоелектронних апаратів.*** *Розглянуті моделі фізичних процесів у радіоелектронних апаратах (РЕА) у вигляді стохастичних диференціальних рівнянь. Показано, що всі фізичні процеси у РЕА є стохастичними, а функціональні характеристики апаратів повинні бути представлені функціями з імовірнісними показниками. Наведені стохастичні диференціальні рівняння для електромагнітних, електричних, механічних, теплових процесів та запропоновані методи одержання їх розв'язків на основі детермінованих моделей. Наведені приклади визначення функціональних характеристик за дії механічних та теплових впливів.*

Ключові слова: *фізичні процеси у РЕА, стохастичні диференціальні рівняння, функціональні характеристики*

Уваров Б.М., Зиньковский Ю.Ф. ***Стохастические функциональные характеристики радиоэлектронных аппаратов.*** *Рассмотрены модели физических процессов в радиоэлектронных аппаратах (РЭА) в виде стохастических дифференциальных уравнений. Показано, что все физические процессы в РЭА – стохастические, а функциональные характеристики аппаратов должны быть представлены функциями с вероятностными показателями. Приведены стохастические дифференциальные уравнения для электромагнитных, электрических, механических, тепловых процессов и предложены методы получения их решений на основе детерминированных моделей. Приведены примеры получения функциональных характеристик при механических и тепловых воздействиях.*

Ключевые слова: *физические процессы в РЭА, стохастические дифференциальные уравнения, функциональные характеристики*

Uvarov B.M., Zinkovsky Ju. F. ***The stochastic functional characteristics of radioelectronic devices.*** *The models of physical processes in radio electronic devices (RED) as the stochastic differential equations are considered. Is shown, that all physical processes in RED - stochastic, and functional characteristics of devices should be submitted by functions with stochastic by parameters. The stochastic differential equations for electromagnetic, electrical, mechanical, thermal processes are given and the methods of reception of their decisions are offered on the basis of the determined models. The examples of reception of the functional characteristics are given at mechanical and thermal influences.*

Key words: *physical processes in RED, stochastic differential equations, functional characteristics*