

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛЯ ПО  
СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ В МИКРОВОЛНОВОЙ  
ТОМОГРАФИИ<sup>1</sup>**

*Горб Н. С., аспирант; Гусева Е. В., к.т.н, доцент  
Национальный Технический Университет Украины «Киевский Политехни-  
ческий Институт», Киев, Украина  
guseva@tor.kpi.ua*

**APPLICATION OF EIGENFUNCTION EXPANSION METHOD TO THE  
MICROWAVE TOMOGRAPHY**

*Gorb M. S, Postgraduate Student; Guseva E. V, PhD, Associate Professor  
National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine*

**Вступление**

Микроволновая томография или микроволновая визуализация (microwave imaging, microwave tomography, inverse scattering – англ.) – метод определения внутренней структуры (распределения диэлектрической, магнитной проницаемости, проводимости) исследуемого объекта по значениям электромагнитного поля рассеянным данным объектом. Данный метод, как и метод электоримпедансной томографии, применяется для определения электрических свойства исследуемого объекта. Различие между данными методами заключается в диапазоне применяемых частот, если электоримпедансная томография использует частоты до 10 МГц и задача формулируется относительно скалярного потенциала и тока [1], то в микроволновой визуализации применяются частоты в диапазоне 0.5–10 ГГц [2] и необходимо решать задачу рассеивания электромагнитных волн.

Метод микроволновой визуализации обладает рядом преимуществ [2,3] по сравнению с другими методами томографии:

– «здоровые» и «больные» биологические ткани характеризуются диэлектрическими свойствами, которые значительно различаются, что способствует их идентификации, в отличие от рентгеновской томографии, которая «не видит» электрических свойств объекта;

– безопасность – используется излучение низкой мощности, что даёт возможность частого и безопасного мониторинга за состоянием пациента (в отличие от рентгеновского излучения);

– низкая стоимость и компактность аппаратуры (преимущество относительно магниторезонансной томографии);

---

<sup>1</sup> Электронный вариант статті: <http://radar.kpi.ua/index.php/radiotechnique/article/view/938>

Именно значительный контраст в электрических свойствах биологических тканей способствовал развитию данного метода для медицинских целей. Например, контраст между здоровой тканью молочной железы и опухолью лежит в пределах  $(2...5):1$  [4], что помогает диагностировать заболелания на ранней стадии, когда другие методы ещё являются менее чувствительными. Медицинское применение микроволновой томографии включает в себя [2, 5]: мониторинг за температурой тканей при лечении их гипертермией, диагностику сердца, головного мозга, костной системы, и наиболее развивающиеся направление – диагностика рака молочной железы.

### **Прямая и обратная задачи микроволновой томографии**

При решении задачи микроволновой визуализации можно выделить два этапа: решение прямой и обратной задачи.

**Прямая задача** – определение поля, рассеянного исследуемым объектом, при заданных источниках и известной внутренней структуре объекта.

Поскольку, большинство реальных объектов – трёхмерные поперечно и продольно неоднородные, то для их анализа необходимо применять вычислительные методы электродинамики [6–9]. Следует отметить, что выбор метода зависит от конкретно поставленной задачи, и может быть субъективным, поскольку на него влияет опыт знания и навыки конкретного человека. В работах [3; 10–12; 13 с.147-194] для решения прямой задачи используется метод конечных элементов и метод конечных разностей, с применением граничных условий для ограничения бесконечного пространства. В [11] приведено сравнение численной эффективности методов конечных элементов и конечных разностей при решении задачи микроволновой визуализации. В [14–17] для решения прямой задачи применён метод интегральных уравнений, также возможно применение гибридного метода – объединения метода конечных элементов с методом интегральных уравнений [3].

Поскольку анализ задачи в трёхмерной постановке является численно затратным, то часто рассматривается двумерная модель [13 с. 151] – исследуемый объект и возбуждающий источник считаются продольно однородными (независящими от одной координаты). Понятно, что двумерная математическая модель является приближением при анализе продольно неоднородного объекта, поэтому в [18] определяется область применения данного упрощения.

**Обратная задача** – определение распределения внутренней структуры (распределения комплексной диэлектрической проницаемости) объекта исследований по измеренным значениям поля вокруг данного объекта.

Основные трудности при решении обратной задачи заключаются в том, что она является нелинейной и плохо обусловленной (ill-posed – англ.).

Нелинейность отображает нелинейную зависимость диэлектрической проницаемости от измеряемых значений поля вокруг объекта исследования, и является результатом рассеивания электромагнитного поля. В связи с этим, задачу микроволновой томографии необходимо решать в трёхмерной постановке [13 с.151], поскольку расположив источники в поперечном сечении объекта, поле будет взаимодействовать со всем объектом целиком, а не с выбранным сечением (в отличие от рентгеновской томографии, где «прямолинейными» X – лучами, можно исследовать узкий срез объекта). Для того чтобы свести задачу к двумерной, исследуемый объект и возбуждающий источник должны быть продольно однородными (независящими от одной координаты).

Задача называется плохо обусловленной по-Адамару [19 с.16; 20 гл.1.1], если не выполняется, хотя бы одно из трёх условий:

- решение задачи существует;
- решение однозначно;
- решение – устойчивое, то есть непрерывно зависит от входных данных.

В отличие от прямой задачи, решение обратной задачи неоднозначное и неустойчивое, то есть одному набору измеренных данных может соответствовать несколько решений, причём незначительные изменения исходных данных (например, влияние шума) может привести к сильному изменению выходных данных – неустойчивость решения. Для того чтобы решить плохо обусловленную обратную задачу применяют методы регуляризации [3].

В математической форме обратную задачу можно сформулировать как задачу оптимизации [3]:

$$\min_{\dot{\epsilon}(x,y)} \left\| \vec{E}_{meas}(\vec{r}_i) - \vec{E}_{calc}[\vec{r}_i, \dot{\epsilon}(x,y)] \right\|^2, \quad (1)$$

то есть необходимо найти такое распределение комплексной диэлектрической проницаемости  $\dot{\epsilon}(x,y)$ , которое минимизирует разность между измеряемыми значениями поля -  $\vec{E}_{meas}(\vec{r}_i)$  в точках расположения приёмных антенн  $\vec{r}_i$  (в отсутствии экспериментальных данных, посчитанными при искомом распределении), и посчитанными  $\vec{E}_{calc}(\vec{r}_i, \dot{\epsilon}(x,y))$  для заданного распределения  $\dot{\epsilon}(x,y)$ .

После линеаризации (1) с применением методов регуляризации, поиск  $\dot{\epsilon}(x,y)$  можно свести к итерационной процедуре Ньютона-Гаусса [3, 21]:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{n+1} &= \dot{\epsilon}_n + \Delta\epsilon_n; \\ \Delta\epsilon_n &= \left( J_n^T \cdot J_n + \alpha \cdot R^T \cdot R \right)^{-1} \cdot J_n^T \left( \Delta E_n + \alpha \cdot R^T \cdot R \cdot \dot{\epsilon}_n \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где:  $J_n = \frac{\partial E_{calc}(\epsilon_n)}{\partial \epsilon}$  – матрица чувствительности (Якобиан), которая отоб-

ражает изменение поля к изменению параметров объекта; численно эффективный метод вычисления Якобиана на основании теоремы взаимности приведён в [10, 12];

$\Delta E_n = E_{meas}(\vec{r}_i) - E_{calc}(\vec{r}_i, \dot{\epsilon}_n(x, y))$  – разница между измеренными значениями поля и посчитанными для заданного распределения  $\dot{\epsilon}_n(x, y)$ ;

$R, \alpha$  – матрица и коэффициент регуляризации, для выбора которых можно применить методы, приведённые в [3, 14];

Применяя (2) на каждой итерации, получаем новое распределение  $\epsilon_{n+1}(x, y)$ , до тех пор, пока разность (квадрат нормы) между измеренными значениями поля и посчитанными для заданного распределения  $\dot{\epsilon}_n(x, y)$  не станет меньше заданного уровня  $\delta$ :

$$\left\| \vec{E}_{calc}(\vec{r}_i, \dot{\epsilon}_n(x, y)) - \vec{E}_{meas}(\vec{r}_i) \right\|_2^2 \leq \delta.$$

Во избежание неверных результатов [19 с.33; 20 гл. 1.11] (inverse crimes – англ.) решения обратной задачи, при отсутствии экспериментальных данных, необходимо:

1. Учитывать шум в данных, которые моделируют экспериментальные –  $\vec{E}_{meas}(\vec{r}_i)$ ;
2. Использовать различную сетку разбиения объекта при решении прямой и обратной задачи;

### **Экспериментальные макеты**

Приведём обзор некоторых экспериментальных макетов созданных для диагностики объектов методом микроволновой визуализации.

Возможно, наиболее передовая группа по разработке методов и аппаратуры для диагностики рака молочной железы методом микроволновой визуализации - Dartmouth College (USA) [3, 22]. В [22] на основании экспериментально полученных данных решается трёхмерная задача с использованием метода discrete dipole approximation – англ. для решения прямой задачи, что позволяет произвести вычисления матрицы чувствительности в аналитическом виде, сокращая при этом время решения обратной задачи. Получены следующие результаты: время сбора данных менее 2 минут, решение обратной задачи - менее 20 минут, разрешающая способность –  $0.5 \div 1$  см на частотах  $1.1 \div 1.5$  ГГц.

В [23] приведён обзор работ и экспериментальных макетов по микроволновой визуализации, разработанных в университете Манитобы (Канада). С помощью одной из этих установок в [24] произведено экспериментальное исследование руки человека.

В датском техническом университете создан экспериментальный макет для диагностики молочной железы [16], при этом прямая задача решается методом интегральных уравнений, а обратная – методом Ньютона.

Сравнение различных методов решения обратной задачи в двумерной и трёхмерной постановках с использованием экспериментальных данных приведено в [25].

Обзор некоторых других экспериментальных установок можно найти в [4].

### **Постановка задачи**

На данный момент микроволновая визуализация находится на этапе развития, следовательно, актуальным является разработка и реализация численно эффективных математических методов решения прямой и обратной задачи с последующей экспериментальной проверкой полученных результатов.

Авторы этой статьи предлагают применить метод разложения полей по собственным функциям для решения прямой задачи микроволновой томографии. Преимуществом данного подхода является численная эффективность:

– при расчёте продольно однородного объекта за счёт известной зависимости поля от продольной координаты –  $e^{-j\beta z}$  задачу можно свести к двумерной (при этом источник может быть трёхмерным);

– расчёт поперечно и продольно неоднородного объекта методом разложения полей по собственным функциям численно эффективнее, чем с применением других численных методов [26 с. 365];

Данный подход предлагается применить в [13 с.161] для расчёта продольно однородного открытого (неэкранированного) диэлектрического объекта. Сложностью в данной постановке является необходимость учёта непрерывного спектра волн излучения [27] открытой диэлектрической структуры.

Задача микроволновой визуализации для поперечно однородного продольно неоднородного объекта кубической формы с металлическими стенками решается в [28] методом разложения поля по собственным функциям. Из-за однородности параметров в поперечном сечении и простой формы объекта, решение прямой задачи можно найти в аналитическом виде.

В [29] показано, что при решении трёхмерной задачи электроимпедансной томографии с продольно однородными параметрами численно эффективнее решить «набор» двумерных задач (аналог разложения полей по собственным функциям в электродинамике), чем задачу в трёхмерной постановке.

Для реализации метода разложения полей по собственным функциям при решении задачи микроволновой томографии предлагаем следующую последовательность действий:

– Выбрать экранированную модель исследуемого объекта – рис.1 [30], что позволит не учитывать волны излучения непрерывного спектра. Преимущества экранированной модели и сравнение с неэкранированной приведено в [31]. На начальном этапе рассмотреть поперечно неоднородный продольно однородный объект с дальнейшим усложнением к поперечно и продольно неоднородному;

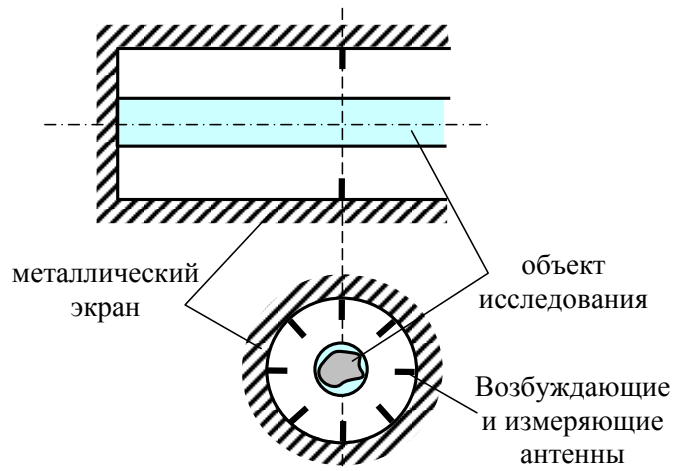


Рис.1 Исследование экранированного объекта методом микроволновой томографии

– Решить задачу на собственные значения. Поскольку рассматриваемый объект - поперечно неоднородный с произвольной формой, то для решения задачи на собственные значения необходимо применять численные методы, например, метод конечных элементов [32];

– Представить поле в виде суммы собственных волн (найденных на предыдущем этапе). Для корректного представления поля необходимо учитывать все типы волн, которые могут существовать в заданной структуре [27]. Для определения амплитуд собственных волн можно воспользоваться леммой Лоренца [6 с.187; 33 с.297-306; 34 с.212], или аппаратом тензорной функции Грина [35];

На основании полученных данных решить обратную задачу.

### **Выводы**

Показана целесообразность применения метода разложения полей по собственным функциям для решения задачи микроволновой томографии. Данный подход к решению поставленной задачи применялся только в [28], где рассматривался упрощенный объект исследований. В данном направлении авторами проделана определённая работа: в [36] решена задача на собственные значения для поперечно неоднородного открытого диэлектрического объекта, в [21] решена задача микроволновой визуализации для двумерного экранированного объекта. Для развития данной темы, авторы предлагают исследовать модель в виде экранированного поперечно и продольно неоднородного объекта, применяя метод разложения полей по собственным функциям.

Ожидаемые результаты от реализации предложенного метода:

- повышение точности при анализе продольно однородного объекта, по сравнению с задачей в двумерной постановке [10];
- повышение численной эффективности при расчёте трёхмерных объёмов

ктов (поперечно и продольно неоднородных) по сравнению с другими численными методами [26 с. 365]

### References

1. Gorb, N. S. and Guseva, E. V. (2013) Choice of the study object for mathematical model in Electrical Impedance Tomography. *Visn. NTUU KPI, Ser. Radiotekh. radioaparotobuduv.*, no. 52, pp. 120-128. (in Ukrainian)
2. Garcia M.G. (2013) Multi-antenna multi-frequency microwave imaging systems for biomedical applications: PhD Thesis / Universitat Politècnica de Catalunya.–Barcelona, 183p.
3. Fang Q. (2004) Computational Methods for Microwave Medical Imaging: PhD Thesis / Thayer School of Engineering Dartmouth College.–Hanover, New Hampshire, 357 p.
4. Gunnarsson T. (2006) Microwave Imaging of Biological tissues: the current status in the research area. Available at: [http://www.es.mdh.se/pdf\\_publications/1067.pdf](http://www.es.mdh.se/pdf_publications/1067.pdf)
5. Paulsen K.D., Lynch D.R. and Strohbehn J.W. (1988) Three-dimensional finite, boundary, and hybrid element solutions of the Maxwell equations for lossy dielectric media. *IEEE Trans.on Microw. Theory and Techn.*, Vol.36, No.4, pp.682-693.
6. Jin J. (2010) Theory and computation of electromagnetic fields. New Jersey, John Wiley & Sons, 572p. ISBN: 978-0-470-53359-8.
7. Garg R. (2008) Analytical and computational methods in electromagnetism. Boston, London, Artech House, 528 p. ISBN: 13: 978-1-59693-385-9.
8. Davidson D.B. (2011) Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering. Cambridge, Cambridge University Press, 505p. ISBN: 978-0-521-51891-8.
9. Chari M. V. K. and Salon S. J. (2000) Numerical methods in electromagnetism. San Diego, Academic Press, 767p. ISBN: 0-12-615760-X.
10. Fang Q., Meaney P.M., Geimer S.D., Streltsov A.V. and Paulsen K.D. (2004) Microwave image reconstruction from 3-D fields coupled to 2-D parameter estimation. *IEEE Trans. on Med. Imag.*, Vol.23, No.4, pp.475-484.
11. Fang Q., Meaney P.M. and Paulsen K.D. (2010) Viable Three-Dimensional Medical Microwave Tomography: Theory and Numerical Experiments. *IEEE Trans.on Anten.Prop.*, Vol. 58, No 2, pp. 449-458.
12. Drogoudis D.G., Kyriacou G.A. and Sahalos J.N. (2009) Microwave tomography employing an adjoint network based sensitivity matrix. *PIERS*, Vol. 94, No. 6, pp.213-242.
13. Okechukwu F.E. (2011) Medical imaging. Croatia, Intech Publisher, 400 p.
14. Franchois A. and Pichot C. (1997) Microwave Imaging-Complex Permittivity Reconstruction with a Levenberg-Marquardt Method. *Anten. Prop.*, *IEEE Trans. on*, Vol. 45, No 2, pp. 203-215.
15. Zaeytijd J.D., Franchois A., Eyraud C. and Geffrin J.M. (2007) Full-Wave Three-Dimensional Microwave Imaging With a Regularized Gauss–Newton Method – Theory and Experiment. *Anten. Prop*, *IEEE Trans. on*. Vol. 55, No 11, pp. 3279-3292.
16. Rubæk T., Kim O.S. and Meincke P. (2009) Computational Validation of a 3-D Microwave Imaging System for Breast-Cancer Screening. *Anten.Prop.*, *IEEE Trans.on*. Vol. 57, No 7, pp. 2105-2115.
17. Abubakar A., Berg P.M. and Mallorqui J.J. (2002) Imaging of Biomedical Data Using a Multiplicative Regularized Contrast Source Inversion Method. *IEEE Trans.on on Microw. Theory and Techn.*, Vol. 50, No 7, pp.1761-1771.
18. Meaney P.M., Paulsen K.D., Geimer S.D., Haider S.A. and Fanning M.W. (2002) Quantification of 3-D Field Effects During 2-D Microwave Imaging. *IEEE Trans. on Biomed. Engin.*, Vol. 49, No 7, pp.708-720.
19. Gilmore C. (2009) Towards an Improved Microwave Tomography System: PhD

Thesis, University of Manitoba, Winnipeg, 205 p.

20. Holder D.S. (2005) *Electrical Impedance Tomography: Methods, History and Applications*. Bristol, Philadelphia, Institute of Physics Publishing, 464 p.

21. Guseva, E. V. and Gorb, M. S. (2014) Two dimensional microwave imaging of shielded objects. *Visn. NTUU KPI, Ser. Radiotekh. radioaparotobuduv.*, no. 58, pp.35-46. (in Ukrainian)

22. Grzegorzczak T.M., Meaney P.M., Kaufman P.A., diFlorio-Alexander R.M. and Paulsen K.D. (2012) Fast 3-D Tomographic Microwave Imaging for Breast Cancer Detection. *Med. Imag., IEEE Trans. on*, Vol.31, No 8, pp.1584-1592.

23. Mojabi P, Ostadrahimi M., Shafai L. and Vetri J.L. (2012) Microwave Tomography Techniques and Algorithms: A Review. *Antenna Technology and Applied Electromagnetics, 15th International Symposium on*, pp.1-4.

24. Gilmore C., Zakaria A., Pistorius S. and Vetri J.L. (2013) Microwave Imaging of Human Forearms: Pilot Study and Image Enhancement. *Intern. Journal of Biomed.Imag.*, Vol. 2013, p.1-17

25. Semenov S.Y., Bulyshev A.E., Abubakar A., Posukh V.G., Sizov Y.E., Souvorov A.E., van den Berg P.M. and Williams T.C. (2005) Microwave-Tomographic Imaging of the High Dielectric-Contrast Objects Using Different Image-Reconstruction Approaches. *Microw. Theory and Techn.*, IEEE Trans.on, Vol. 53, No 7, pp.2284-2294.

26. Chew W.C. (1995) *Waves and fields in inhomogeneous media*. New York, IEEE PRESS, 608p.

27. Barybin A. A. (2007) *Elektrodinamika volnovodushchikh sistem. Teoriya vzbuzhdeniya i svyazi voln.* [Electrodynamics of waveguide system. Excitation and mode coupling theory]. Moscow, 512 p. – ISBN 978-5-9221-0740-2.

28. Doerstling B.H. (1995) A 3-D Reconstruction algorithm for linearized inverse boundary value problem for Maxwell's equations: Ph.D thesis / Rensselaer Polytechnic Institute.–New York, 116 p.

29. Bahrani N. (2012) 2½D Finite Element Method for Electrical Impedance Tomography Considering the Complete Electrode Model: Ms.Sc thesis / Carleton University. – Ottawa, Ontario, 153 p.

30. Mojabi P. and Vetri J.L. (2009) Eigenfunction contrast source inversion for circular metallic enclosures. *Inv.Problems*. Vol. 26, No. 2, pp.1–23.

31. Gilmore C., Vetri J.L. (2008) Enhancement of microwave tomography through the use of electrically conducting enclosures. *Inv. Problems*, Vol. 24, No. 3, pp. 1-21

32. Reddy C.J., Deshpande M.D., Cockrell C.R. and Beck F.B. (1994) Finite element method for eigenvalue problems in electromagnetics. *Tech.Rep.*, NASA, Langley Res.Center, Hampton, VA, 28 p.

33. Vayinshtein L. A. (1988) *Elektromagnitnye volny* [Electromagnetic waves]. Moscow, 440 p. ISBN 5-256-00064-0.

34. Berezhnoi V.A. and Kurdyumov V.N. (2013) *Lektsii po vysokochastotnoi elektrodinamike* [Lectures on the high-frequency electrodynamics]. Moscow, 405 p. – ISBN 978-5-94274-227-0.

35. Zhang J.P. and Chen K.M. (2000) Mode-matching analysis of the induced electric field in a material sample placed within an energized cylindrical cavity. *PIERS*. Vol.28, pp. 295–311.

36. Guseva, E. V. and Gorb, M. S. (2014) Eigenvalue problem of open inhomogeneous dielectric waveguide. *Visn. NTUU KPI, Ser. Radiotekh. radioaparotobuduv.*, no. 56, pp. 42-54. (in Ukrainian)



Горб М. С., Гусєва О. В. **Застосування методу розкладу поля за власними функціями в мікрохвильовій томографії.** Наведено опис та огляд літератури з методу мікрохвильової візуалізації. Запропоновано алгоритм вирішення задачі мікрохвильової томографії із застосуванням методу розкладу поля за власними функціями для розв'язку прямої задачі. Об'єктом дослідження є екранований (для обмеження області розрахунку та уникнення врахування хвиль випромінювання неперервного спектра) поперечно неоднорідний об'єкт, з можливістю подальшого ускладнення до поперечно та поздовжньо неоднорідного. Очікувані результати при реалізації даного підходу: підвищення точності при аналізі поздовжньо однорідного об'єкта в порівнянні з задачею в двовимірній постановці, підвищення чисельної ефективності при розрахунку тривимірних об'єктів (поперечно і поздовжньо неоднорідних) порівняно з іншими чисельними методами.

**Ключові слова:** мікрохвильова томографія, мікрохвильова візуалізація, метод розкладу поля за власними функціями

Горб Н. С., Гусєва Е. В. **Применение метода разложения поля по собственным функциям в микроволновой томографии.** Приведено краткое описание и обзор литературы по методу микроволновой визуализации. Описан алгоритм решения задачи микроволновой томографии с применением метода разложения поля по собственным функциям для решения прямой задачи. Объектом исследования является экранированный (для ограничения области расчёта и во избежание учёта волн излучения непрерывного спектра) поперечно неоднородный объект, с возможностью дальнейшего усложнения к продольно неоднородному. Ожидаемые результаты при реализации данного подхода: повышение точности при анализе продольно однородного объекта по сравнению с задачей в двумерной постановке, повышение численной эффективности при расчёте трёхмерных объектов (поперечно и продольно неоднородных) по сравнению с другими численными методами.

**Ключевые слова:** микроволновая томография, микроволновая визуализация, метод разложения поля по собственным функциям

Gorb M. S., Guseva E. V. **Application of eigenfunction expansion method to the microwave tomography.**

Introduction. Literature review and description of the microwave imaging are presented. Advantages, application, description of experimental setups, and methods for solving forward and inverse problem are underlined.

Methods. Algorithm for solving the problem of microwave tomography using eigenfunction expansion method is described. Object of research is shielded (to limit the area of calculation and avoid accounting radiation waves of the continuous spectrum) transversely inhomogeneous object, with the possibility of further complications to the longitudinally inhomogeneous object. Method of eigenfunction expansion for solving forward problem of microwave imaging is proposed.

Expected results. Improving accuracy of calculation longitudinally homogeneous object, compared with the two-dimensional problem, numerically effective calculation of the three-dimensional objects (transversely and longitudinally inhomogeneous) in comparison with other numerical methods are the expected results.

**Keywords:** microwave imaging, microwave tomography, eigenfunction expansion method