РАДІОТЕХНІЧНІ КОЛА ТА СИГНАЛИ

УДК 621.372.061

УМОВНА ДЕКОНВОЛЮЦІЯ В ОБЛАСТІ ТРАНСФОРМАНТ ФУР'Є. ПОБУДОВА МАТРИЦІ ДЕГРАДАЦІЇ ОБРАЗУ

Рибін О.І. ,д.т.н. професор; Іванюк Н.О., аспірантка
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут", м.Київ, Україна

Вступ

Реставрація образів має велике значення при розв'язанні багатьох задач, пов'язаних з діагностикою (технічною або медичною) in vivo. Одним з розповсюджених методів реставрації є реставрація за методом умовної деконволюції [1 – 3]. Для реалізації алгоритму реставрації в базисі перетворення Адамара [4, 5]

$$\hat{f}_{Had} = [\bar{\bar{G}}_{2Had} + \frac{1}{\lambda}\bar{\bar{C}}_{2Had}]^{-1} \times \bar{\bar{G}}^{T}_{Had} \times \bar{L}_{Had} \qquad (1)$$

необхідно сформувати матриці $\bar{\bar{G}}_{2Had}$ та $\bar{\bar{C}}_{2Had}$, які за алгоритмом [3] формально обчислюються за формулами

$$\bar{\bar{G}}_{2Had} = \overline{\overline{Had}} \times \bar{\bar{G}}_2 \times \overline{\overline{Had}}^T \text{ та } \bar{\bar{C}}_{2Had} = \overline{\overline{Had}} \times \bar{\bar{C}}_{Had} \times \overline{\overline{Had}}^T,$$

де $\hat{f}_{Had}$, $\bar{L}_{Had}$ — стовпці дискретних відліків оцінки реставрованого образу та образу спотвореного розміру $N \times 1; \bar{\bar{G}}_2 = \bar{\bar{G}}^T \times \bar{\bar{G}}; \bar{\bar{G}}$ — дискретний матричний оператор згортки (конволюції) порядку N; $\bar{\bar{C}}_2 = \bar{\bar{C}}^T \times \bar{\bar{C}}; \overline{\overline{Had}}$ — матричний оператор дискретного перетворення Адамара порядку N; $\bar{\bar{C}}$ — матричний дискретний оператор корегуючої імпульсної характеристики «гладкості» [1]; λ — коефіцієнт варіації Лагранжа; T — знак транспортування.

Матрицю $\bar{\bar{G}}_{2Had}$ можна представити у вигляді

$\bar{\bar{G}}_{2Had} = \overline{\overline{Had}} \times \bar{\bar{G}}^T \times \overline{\overline{Had}}^T \times \overline{\overline{Had}} \times \bar{\bar{G}} \times \overline{\overline{Had}}^T$, звідки видно, що слід детальніше розглянути формування матриці

$$\bar{\bar{G}}_{H1} = \overline{\overline{Had}} \times \bar{\bar{G}} \times \overline{\overline{Had}}^T. \qquad (2)$$

Матриця $\bar{\bar{G}}$ є циркулянтною, тому $\bar{\bar{G}}_{H1}$ є блочно-діагональною матрицею, причому величина блоків зростає із зростанням номерів рядків матриці. Так, перші два елементи цієї матриці є діагональними

$$g_{H1,00} = (g_0 + g_1 + g_2 + ... + g_N);$$

$$g_{H1,11} = (g_0 - g_1 + g_2 - g_3 + g_4 ... + g_{2n} - g_{2n+1} ... + g_N),$$

де g_i — i-й відлік імпульсної характеристики деградації ($i=0,1,2, \ldots N-1$); $N=2^n$ — формат перетворення (оскільки імпульсна характеристика завжди значно коротша, ніж формат образу N, то рядки матриці $\bar{\bar{G}}$ доповнюються нулями); n — ціле позитивне число.

Елементи другого та третього рядків утворюють матрицю другого порядку, елементи якої

$$\begin{aligned} g_{H1,22} &= g_{H1,33} = (g_0 - g_2 + g_4 - g_6 + g_8 - g_{10} + \ldots); \\ g_{H1,23} &= -g_{H1,32} = (g_1 - g_3 + g_5 - g_7 + g_9 - g_{11} + \ldots). \end{aligned} \tag{3а}$$

Наступним блоком є матриця четвертого порядку з елементами

$$\begin{aligned} & g_{H1,44} = g_{H1,66} = [g_0 + \frac{1}{2}(g_1 - g_3) - g_4 - \frac{1}{2}(g_5 - g_7) + g_8 + \frac{1}{2}(g_9 - g_{11}) - g_{12} - \ldots]; \\ & g_{H1,45} = g_{H1,67} = -g_{H1,54} = -g_{H1,76} = \frac{1}{2}[(g_1 + g_3) - (g_5 + g_7) + (g_9 + g_{11}) - \ldots]; \\ & g_{H1,55} = -g_{H1,77} = [g_0 - \frac{1}{2}(g_1 - g_3) + g_4 - \frac{1}{2}(g_5 - g_7) - g_8 - \frac{1}{2}(g_9 - g_{11}) - g_{12} + \ldots]; \\ & g_{H1,46} = -g_{H1,64} = [\frac{1}{2}g_1 + g_2 + \frac{1}{2}g_3 - \frac{1}{2}g_5 - g_6 - \frac{1}{2}g_7 + \frac{1}{2}g_9 + g_{10} + \frac{1}{2}g_{11} - \ldots]; \\ & -g_{H1,57} = g_{H1,75} = [\frac{1}{2}g_1 - g_2 + \frac{1}{2}g_3 - \frac{1}{2}g_5 + g_6 - \frac{1}{2}g_7 + \frac{1}{2}g_9 - g_{10} + \frac{1}{2}g_{11} - \ldots]; \\ & -g_{H1,17} = g_{H1,52} = -g_{H1,71} = g_{H1,65} = [\frac{1}{2}(g_1 - g_3) + \frac{1}{2}(g_5 - g_7) + \frac{1}{2}(g_9 - g_{11}) - g_{12} + \ldots]. \end{aligned} \tag{3б}$$

Наступний блок – матриця восьмого порядку з номерами рядків та стовпців 8…15, далі матриця з номерами рядків та стовпців 16…31 і т.д.

Алгоритм обчислення коефіцієнтів блочно-діагональної матриці

Безпосереднє обчислення добутку матриць (2) в чисельній формі призведе до громіздких математичних операцій (враховуючи порядок N матриць $\overline{\overline{Had}}$ та $\bar{\bar{G}}$, який для одновимірних сигналів зазвичай становить 128…512, а для двовимірних образів відповідно $(512)^2 \ldots (2048)^2$). Використання того, що матриця $\bar{\bar{G}}_{H1}$ в (2) має блочно-діагональний вигляд, дозволяє зекономити на кількості операцій множення в (2), якщо не обчислювати ті добутки рядків та стовпців матриць $\overline{\overline{Had}}$ та $\overline{\overline{Had}}^T$ на матрицю $\bar{\bar{G}}$, які апріорі дорівнюють нулю. Тим не менше, обчислення ненульових добутків в (2) в чисельному вигляді призведе (враховуючи великі порядки N) до накопичення великої операційної похибки за рахунок обмеженої розрядності операнд.

Дійсно, як видно з символьних виразів (3), значна кількість коефіцієнтів при g_i дорівнює нулю, що зумовлено їх багаторазовим додаванням та відніманням при обчисленні (2). Але враховуючи структуру матриці $\bar{\bar{G}}$, можна проводити обчислення без згаданого накопичення операційної похибки. Для пояснення розглянемо структуру матриці $\bar{\bar{G}}$ та процедуру обчислення матриці $\bar{\bar{G}}_{H1}$ на простому прикладі матриць в (2) восьмого порядку для найбільшої можливої для такого порядку кількості (вісім) відліків імпульсної характеристики g_i. Так, матриця $\bar{\bar{G}}$ восьмого порядку має вигляд

g_0	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1
g_1	g_0	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2
g_2	g_1	g_0	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3
g_3	g_2	g_1	g_0	g_7	g_6	g_5	g_4
g_4	g_3	g_2	g_1	g_0	g_7	g_6	g_5
g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0	g_7	g_6
g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0	g_7
g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0

(4а)

а, наприклад, елемент $g_{H1,45}$ можна обчислити множенням цієї матриці $\bar{\bar{G}}$ на четвертий рядок had_4 матриці $\overline{\overline{Had}}$ ліворуч та п'ятий стовпець had_5 матриці $\overline{\overline{Had}}^T$ праворуч для даного прикладу

$$had_4 = [1111-1-1-1-1],$$
$$had_5 = [1-11-1-11-11]^T, \qquad (4б)$$

де T – знак транспортування.

Можна показати, що знаки перед елементами g_i добутку (2) для множників (4) можна отримати у вигляді матриці $\bar{\bar{\varphi}}$ множенням had_4 у вигляді стовпця на had_5 у вигляді рядка, тобто

$$\bar{\bar{\varphi}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Порівнюючи (4) та (5), можна визначити, з якими знаками підсумовуються елементи g_i. Так, наприклад, коефіцієнт перед відліком g_0 при представленні елемента матриці $\bar{\bar{G}}_{H1}$ в символьному вигляді в клітині (4,5) дорівнює сумі всіх елементів 1 та -1 головної діагоналі матриці (5), а, наприклад, елемент g_3 має коефіцієнт, обчислений як сума (4) елементів третьої нижньої під діагоналі матриці (5) та верхньої п'ятої. При запропонованому способі обчислення коефіцієнтів перед відліками g_i:

а) обчислюються тільки ненульові елементи матриці $\bar{\bar{G}}_{H1}$, для чого перемножуються з цією матрицею тільки ті рядки і стовпці дискретних матричних операторів перетворення Адамара, які і утворюють відповідні елементи добутку;

б) обчислення коефіцієнтів перед ненульовими елементами матриці $\bar{\bar{G}}_{H1}$ проводиться підсумовуванням цілих чисел +1 та -1, що дозволяє запобігти накопиченню операційної похибки за рахунок обмеженої розрядності операндів при підсумовуванні чисельних значень g_i.

Алгоритм обчислення елементів блоків діагоналі матриці $\bar{\bar{G}}_{H1}$ має наступний вигляд.

1. Для наданого формату N матриці $\bar{\bar{G}}$ ($N = 2^n$, n – ціле число) визначити номери рядків та стовпців матричного оператора дискретного перетворення Адамара $\overline{\overline{\overline{Had}}}$, які відповідають номерам рядків та стовпців окремих блоків діагоналі матриці $\bar{\bar{G}}_{H1}$.

2. Множенням i-го стовпця матриці $\overline{\overline{\overline{Had}}}$ на j-й рядок отримати матрицю $\bar{\bar{\varphi}}_{ij}$ для обчислення коефіцієнтів при відліках імпульсної характеристики g_i, що дозволить обчислити значення елемента h_{ij} блоків діагоналі матриці $\bar{\bar{G}}_{H1}$.

3. Послідовно обчислюючи усі елементи h_{ij} блоків діагоналі побудувати блочно-діагональну матрицю $\bar{\bar{G}}_{H1}$.

При реалізації алгоритму слід враховувати додатково властивості отримуваних матриць

$$\bar{\bar{G}}_{(a\ldots b)(a\ldots b)} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{G}}_{(a\ldots a+\frac{M}{2}-1),(a\ldots a+\frac{M}{2}-1)} & \bar{\bar{G}}_{(a\ldots a+\frac{M}{2}-1),(b-\frac{M}{2}\ldots b)} \\ -\bar{\bar{G}}_{(a\ldots a+\frac{M}{2}-1),(b-\frac{M}{2}\ldots b)} & \bar{\bar{G}}_{(a\ldots a+\frac{M}{2}-1),(a\ldots a+\frac{M}{2}-1)} \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

де $M = 2^m$ — порядок матриці-блока діагоналі, m – ціле число.

Таким чином, для формування будь-якої з матриць $\bar{\bar{G}}_{(a\ldots b)(a\ldots b)}$ достатньо сформувати лише матриці $\bar{\bar{G}}_{(a\ldots a+\frac{M}{2}-1)}$ та $\bar{\bar{G}}_{(b-\frac{M}{2}\ldots b)}$. Формування цих матриць за запропонованим алгоритмом дозволяє в символьному вигляді знайти запис кожного елемента матриці $\bar{\bar{G}}_{H1}$ будь-якого порядку.

Символьний метод формування матриць

Для цього у подальшому будемо зберігати значення усіх коефіцієнтів при відліках g_i кожного ненульового елемента $h_{k,l}$ матриці $\bar{\bar{G}}_{H1}$ в масивах чисел $\bar{\mu}_{k,l}$, в яких номери $i = 0,1,2,...,D-1,$ D — кількість відліків імпульсної характеристики ($D = 2^s$, s – ціле число).

Тоді для матриці $\bar{\bar{G}}_{(0),(0)}$ (нульовий за номером елемент діагоналі матриці $\bar{\bar{G}}_{H1}$) маємо $\bar{\mu}_{0,0} = [1,1,1,...,1]$. Аналогічно $\bar{\mu}_{1,1} = [1,-1,1,-1,1,-1,...,1,-1]$. Матриця другого порядку з номерами рядків та стовпців 2 та 3 має коефіцієнти

$$\begin{aligned} &\bar{\mu}_{2,2} = \bar{\mu}_{3,3} = [1,0,-1,0,1,0,-1,0,...,1,0,-1,0] \\ &\bar{\mu}_{2,3} = -\bar{\mu}_{3,1} = [0,1,0,-1,0,1,0,-1,...]. \end{aligned} \tag{7а}$$

Матриця четвертого порядку має коефіцієнти при відліках імпульсної характеристики для під матриці $\bar{\bar{G}}_{(4...5)}$ у вигляді

$$\begin{aligned} &\bar{\mu}_{4,4} = [1,\tfrac{1}{2},0,-\tfrac{1}{2},-1,-\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2},...,1,\tfrac{1}{2},0,...], \\ &\bar{\mu}_{5,5} = [1,-\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2},-1,\tfrac{1}{2},0,-\tfrac{1}{2},...,1,-\tfrac{1}{2},0,...], \\ &\bar{\mu}_{4,5} = -\bar{\mu}_{5,4} = [0,\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2},0,-\tfrac{1}{2},0,-\tfrac{1}{2},...,0,\tfrac{1}{2},0,...], \\ &\bar{\mu}_{4,6} = [0,\tfrac{1}{2},1,\tfrac{1}{2},0,-\tfrac{1}{2},1,-\tfrac{1}{2},...,0,\tfrac{1}{2},1,...], \\ &\bar{\mu}_{5,7} = [0,-\tfrac{1}{2},1,-\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2},-1,\tfrac{1}{2},...,0,-\tfrac{1}{2},1,...], \\ &\bar{\mu}_{6,5} = -\bar{\mu}_{5,6} = [0,-\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2},0,-\tfrac{1}{2},...,0,-\tfrac{1}{2},0,...]. \end{aligned} \tag{7б}$$

Блок $\bar{\bar{G}}_{(a...a+\frac{M}{2}-1)}$ (6) підматриці $\bar{\bar{\mu}}$ восьмого порядку (рядки та стовпці з номерами 8…15) має коефіцієнти (для рядків та стовпців з номерами 8…11) у вигляді $\bar{\bar{\mu}}_{8...11,8...11} =$

(1,3/4, 1/2, 1/4, 0, -1/4, -1/2, -3/4, -1, -3/4 -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 3/4.…)	(0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, 1/4,…)	(0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, -1/4, -1/2, -1/4, 0, -1/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4,...)	(0, -1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, -1/4,…)
(0, -1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -1/4,...)	(1,-3/4, 1/2, -1/4, 0, 1/4, -1/2, 3/4, -1, 3/4 -1/2, 1/4, 0, -1/4, 1/2, -3/4, 1, -3/4,…)	(0, 1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, 1/4.…)	(0, -1/4, 1/2, -1/4, 0, -1/4, 1/2, -1/4, 0, 1/4, -1/2, 1/4, 0, 1/4, -1/2, 1/4, 0, -1/4,...)

(0, -1/4, -1/2, -1/4, 0, -1/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, -1/4,...)	(0, 1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, 1/4,…)	(1, 1/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, 1/4, -1, -1/4, 1/2, 1/4, 0, -1/4, -1/2, 1/4, 1, 1/4,...)	(0, 3/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, 3/4, 0, -3/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -3/4, 0, 3/4, ...)
(0, -1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, -1/4,…)	(0, 1/4, -1/2, 1/4, 0, 1/4, -1/2, 1/4, 0, -1/4, 1/2, -1/4, 0, -1/4, 1/2, -1/4, 0, 1/4,...)	(0, -3/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -3/4, 0, 3/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, 3/4, 0, -3/4, ...)	(1, -1/4, -1/2, 1/4, 0, -1/4, 1/2, 1/4, -1, 1/4, 1/2, -1/4, 0, 1/4, -1/2, -1/4, 1, -1/4,...)

(8*а*)

При цьому видно, що $\mu_{8,9} = -\mu_{9,8}; \mu_{10,11} = -\mu_{11,10}$; матриця $\bar{\bar{\mu}}_{8...9,10...11} = -\bar{\bar{\mu}}_{10...11,8...9}$.

Блок $\bar{\bar{G}}_{(b-\frac{M}{2}...b)}$ в (6) підматриці $\bar{\bar{\mu}}$ восьмого порядку (номери рядків 8...11, номери стовпців 12...15) має коефіцієнти при відліках g_i наступного виду

$$\bar{\bar{\mu}}_{8...11,9...15} = -\bar{\bar{\mu}}_{9...15,8...11} =$$

0,1/4, 1/2, 3/4, 1, 3/4, 1/2, 1/4, 0, -1/4, -1/2, -3/4, -1, -3/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4	(0, -1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, -1/4…)	(0, -1/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, -1/4, -1/2, -1/4, 0, -1/4,...)	(0, 1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0,-1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, 1/4,…)
(0, 1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, 1/4,…)	(0,-1/4, 1/2, -3/4, 1, -3/4, 1/2, -1/4, 0, ,1/4, -1/2, 3/4, -1, 3/4, -1/2, 1/4, 0, -1/4,...)	(0, -1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, -1/4,…)	(0, 1/4, -1/2, 1/4, 0, -1/4, 1/2, -1/4, 0, -1/4, 1/2, -1/4, 0, 1/4, -1/2, 1/4, 0, 1/4,...)
(0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, -1/4, -1/2, -1/4, 0, -1/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, 1/4, 0, 1/4,...)	(0, -1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, -1/4,…)	(0, -1/4, -1/2, 1/4, 1, 1/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, -1/4, -1, -1/4, 1/2, 1/4, 0, -1/4,...)	(0, 1/4, 0, -3/4, 0, 3/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, 3/4, 0, -3/4, 0, 1/4, 0, 1/4,...)
(0, 1/4, 0, -1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -1/4, 0, 1/4,…)	(0, -1/4, 1/2, -1/4, 0, 1/4, -1/2, 1/4, 0, 1/4, -1/2, 1/4, 0, -1/4, -1/2, -1/4, 0, -1/4,...)	(0, 1/4, 0, 3/4, 0, -3/4, 0, 1/4, 0, 1/4, 0, -3/4, 0, 3/4, 0, -1/4, 0, -1/4,...)	(0, 1/4, -1/2, -1/4, 1, -1/4, -1/2, 1/4, 0, -1/4, 1/2, 1/4, -1, 1/4, 1/2, -1/4, 0, 1/4,...)

(8*б*)

При цьому видно, що $\mu_{8,13}=-\mu_{9,12};\mu_{10,15}=-\mu_{11,14}$, а матриця $\bar{\bar{\mu}}_{8...11,12...15}=-\bar{\bar{\mu}}_{12...15,8...11}$.

Отриманої інформації про коефіцієнти достатньо для пошуку закономірностей прямого (без обчислень виду(5)) формування матриці $\bar{\bar{G}}_{H1}$ в (2). При цьому, по-перше, слід відзначити, що обчисленні коефіцієнти при відліках імпульсної характеристики періодично повторюються при зростанні кількості таких відліків. Так, для матриці першого порядку $\bar{\bar{G}}_{H1,1,1}$ період повторень коефіцієнтів μ_{11} дорівнює двом, для матриці другого порядку $\bar{\bar{G}}_{H1,2...3,2...3}$ період становить чотири, для матриці четвертого порядку $\bar{\bar{G}}_{H1,4...7,4...7}$ період дорівнює восьми, для матриці восьмого порядку – шістнадцять, а для матриці шістнадцятого порядку – тридцять два. Тобто період повторення коефіцієнтів при відліках імпульсної характеристики дорівнює мінімальному порядку матриці $\bar{\bar{G}}_{H1}$, в якій розміщується матричний блок діагоналі, для якого ці коефіцієнти обчислюються.

По-друге, усі коефіцієнти діагональних елементів з парними індексами $\mu_{2k,2l}$ матриць $\mu_{a...b,c...d}$ обчислюють «розширенням» індексів елементів попереднього матричного блоку, яке полягає в поповнені ряду індексів, додаючи нові індекси між вже існуючими зі значеннями, що дорівнюють середньому арифметичному чисел праворуч та ліворуч поповнення. Так наприклад, елемент

$\mu_{8,10}=(0,1/4,1/2,1/4,0,1/4,1/2,1/4,0,-1/4,-1/2,-1/4,0,-1/4,-1/2,-1/4,...)$ матриці $\bar{\bar{\mu}}_{8...11,8...11}$ отримаємо по елементу $\mu_{4,5}$ матриці $\bar{\bar{\mu}}_{4...7,4...7}=(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},...,0,\frac{1}{2},0,...)$. Кожен наступний елемент $\mu_{2k+1,2l+1}$ тієї ж діагоналі отримуємо множенням коефіцієнтів елемента $\mu_{2k,2l}$

1,-1,1,-1,1,..., тобто, наприклад, елемент

$\mu_{9,11}=(0,-1/4,1/2,-1/4,0,-1/4,1/2,-1/4,0,1/4,-1/2,1/4,0,1/4,-1/2,1/4,...)$. Таким чином, для усіх діагоналей (для матричних блоків), які починаються елементами $\mu_{2k,2l}$ обчислення елементів діагоналі не становить труднощів. Трошки інакше формуються ті діагоналі матричних блоків, які починаються елементами $\mu_{2k+1,2l}$ або $\mu_{2k,2l+1}$. Для пояснення процедури формування таких елементів розглянемо спочатку структуру матриць коефіцієнтів при відліках більш детально. Матриці $\bar{\bar{G}}_{(a...a+\frac{M}{2}-1),(a...a+\frac{M}{2}-1)}$ та $\bar{\bar{G}}_{(a...a+\frac{M}{2}-1),(b-\frac{M}{2}...b)}$ в (6), як і відповідні матриці коефіцієнтів, мають певну структуру. Так, матриця коефіцієнтів $\bar{\bar{\mu}}_{4...7,4...7}$ має вигляд $\bar{\bar{\mu}}_{4...7,4...7}=\begin{bmatrix}\bar{\bar{\mu}}_{4...5,4...5}\bar{\bar{\mu}}_{4...5,6...7}\\-\bar{\bar{\mu}}_{4...5,6...7}\bar{\bar{\mu}}_{4...5,4...5}\end{bmatrix}$, матриця

$\overline{\overline{\mu}}_{4...7,4...4}=\begin{bmatrix}\mu_{44}\mu_{44}\\-\mu_{45}\mu_{44}\end{bmatrix}$, а матриця $\overline{\overline{\mu}}_{4...5,6...7}=\begin{bmatrix}\mu_{46}\mu_{47}\\-\mu_{47}\mu_{46}\end{bmatrix}$. Аналогічно $\overline{\overline{\mu}}_{8...15,8...15}=\begin{bmatrix}\overline{\overline{\mu}}_{8...11,8...11}\overline{\overline{\mu}}_{8...11,12...15}\\-\overline{\overline{\mu}}_{8...11,12...15}\overline{\overline{\mu}}_{8...11,8...11}\end{bmatrix}$, причому $\overline{\overline{\mu}}_{8...15,8...15}=\begin{bmatrix}\overline{\overline{\mu}}_{8...9,8...9}\overline{\overline{\mu}}_{8...9,10...11}\\-\overline{\overline{\mu}}_{8...9,10...11}\overline{\overline{\mu}}_{8...9,8...9}\end{bmatrix}$.

Матриці $\overline{\overline{\mu}}_{8...9,8...9}=\begin{bmatrix}\mu_{88}\mu_{89}\\-\mu_{89}\mu_{88}\end{bmatrix}, \overline{\overline{\mu}}_{10...11,10...11}=\begin{bmatrix}\mu_{10,10}\mu_{10,11}\\-\mu_{10,11}\mu_{10,10}\end{bmatrix}, \overline{\overline{\mu}}_{8...9,10...11}=\begin{bmatrix}\mu_{8,10}\mu_{8,11}\\-\mu_{8,11}\mu_{9,11}\end{bmatrix}$. Так само $\overline{\overline{\mu}}_{8...11,12...15}=\begin{bmatrix}\overline{\overline{\mu}}_{8...9,12...13}\overline{\overline{\mu}}_{8...9,14...15}\\-\overline{\overline{\mu}}_{8...9,14...15}\overline{\overline{\mu}}_{10...11,14...15}\end{bmatrix}$,

причому $\overline{\overline{\mu}}_{8...9,12...13}=\begin{bmatrix}\mu_{8,12}\mu_{8,13}\\-\mu_{8,13}\mu_{9,13}\end{bmatrix}, \overline{\overline{\mu}}_{8...9,14...15}=\begin{bmatrix}\mu_{8,14}\mu_{8,15}\\-\mu_{8,15}\mu_{9,15}\end{bmatrix}, \overline{\overline{\mu}}_{10...11,14...15}=\begin{bmatrix}\mu_{10,14}\mu_{10,15}\\-\mu_{10,15}\mu_{11,15}\end{bmatrix}$. (9)

Аналогічні закономірності структури матриць коефіцієнтів при відліках спотворюючої сигнал (образ) імпульсної характеристики системи відображення. Для описаної структури усі закономірності формування коефіцієнтів елементів матриці $\mu_{2k+1,2l}$ та $\mu_{2k,2l+1}$, які будуть наведені нижче, вірні лише для блоків $\overline{\overline{G}}_{(a...a+\frac{M}{2}-1),(a...a+\frac{M}{2}-1)}$ та $\overline{\overline{G}}_{(a...a+\frac{M}{2}-1),(b-\frac{M}{2}...b)}$, а не для всієї матриці $\overline{\overline{G}}_{(a...b)(a...b)}$ в (6). Зауважимо також, що для формування матриці $\overline{\overline{G}}_{(a...b)(a...b)}$ достатньо сформувати лише верхньотрикутні (або нижньотрикутні) частини (разом з головною діагоналлю) матриць коефіцієнтів $\overline{\overline{\mu}}_{(a...a+\frac{M}{2}-1),(a...a+\frac{M}{2}-1)}$ та $\overline{\overline{\mu}}_{(a...a+\frac{M}{2}-1),(b-\frac{M}{2}...b)}$. Коефіцієнти $\mu_{2k+1,2l}$ та $\mu_{2k,2l+1}$ формуються за наступними рекурентними кроками. Так, за матрицею $\overline{\overline{\mu}}_{2...3,2...3}$ елемент $\mu_{2.3}=(0,1,0,-1,0,1,0,-1,...)$. Тоді елемент матриці $\overline{\overline{\mu}}_{4...7,4...4}=\mu_{2\times2.2\times2+1}=(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0,...)$ одержуємо «розширенням» послідовності коефіцієнтів елемента $\mu_{2.3}$ обчисленням проміжних значень між 0 та 1 і 0 та -1 та «проріджуванням» отриманого результату заміною чисел послідовності (0, 1,0,-1,0,1,0,-1,...) нулями, тобто (0,1/2,1,1/2,0,-1/2,-1,-1/2,0,...)→(0,1/2,0,1/2,0,-1/2,0,-1/2,0,...). Елемент $\mu_{5,6}$ отримаємо з $\mu_{4,5}$ множенням на послідовність (1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,...). Для матриці $\overline{\overline{\mu}}_{8...15,8...15}$ (підматриць $\overline{\overline{\mu}}_{8...11,8...11}$ та $\overline{\overline{\mu}}_{8...11,12...15}$) отримуємо наступні діагональні елементи з непарними індексами. Елемент
$\mu_{8,9}=\mu_{4\times2,4\times2+1}=(0,1/4,0,1/4,0,1/4,0,1/4,0,-1/4,0,-1/4,0,-1/4,0,-1/4,0,1/4,...)$
отримуємо з елемента $\mu_{4,5}$ «розширенням» та «»проріджуванням». Аналогічно для елемента $\mu_{8,13}=\mu_{4\times2,6\times2+1}$ по елементу $\mu_{4,7}$. Елементи тих самих ді-

агоналей $\mu_{9,10}$ та $\mu_{9,14}$ отримуємо множенням на послідовність (1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,...) елементів $\mu_{8,9}$ та $\mu_{8,13}$ відповідно. Треті елементи діагоналей, що починаються елементами $\mu_{8,9}$ та $\mu_{8,13}$ отримуємо «розширенням» та «проріджуванням» елементів $\mu_{4,4}$ та $\mu_{4,6}$ з їх подальшим множенням на послідовність (1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,...). При формуванні матриці $\bar{\bar{\mu}}_{16...31,16...31}$ процедура формування аналогічна попередньо зазначеній з урахуванням збільшення кількості подвоєних індексів.

Для формування матриці $\bar{\bar{\mu}}$ довільного порядку слід зазначити наступні властивості отримуваних матриць.

Будь-яка матриця $\bar{\bar{\mu}}$ порядку $N = 2^n$, n – ціле позитивне число, складається з чотирьох підматриць порядку 2^{n-1}, причому дві підматриці головної діагоналі рівні між собою , а підматриці зворотної діагоналі мають елементи на однакових позиціях рівні за модулем, але протилежні за знаком. Кожна з цих під матриць складається з чотирьох підматриць порядку 2^{n-2}, причому підматриці головної діагоналі вже різні, а підматриці зворотної діагоналі так, як і раніше, мають елементи, рівні за модулем, але протилежні за знаком. Аналогічною є структура під матриць меншого порядку (до четвертого включно).

Таким чином, алгоритм формування матриці коефіцієнтів $\bar{\bar{\mu}}$ довільного порядку $N = 2^n$, n – ціле позитивне число, має наступний вигляд.

1. Розбити матрицю порядку $N = 2^n$, n – ціле позитивне число, на блоки четвертого порядку для використання описаних вище її структурних властивостей. Усі подальші операції по формуванню матриці $\bar{\bar{\mu}}$ застосовувати для вказаних блоків, що утворюють верхньотрикутну частину цієї матриці.

2. За матрицею $\bar{\bar{\mu}}$ порядку 2^{n-1} сформувати коефіцієнти діагоналей з парними індексами $\mu_{2k,2l}$ по елементам $\mu_{k,l}$ матриці $\bar{\bar{\mu}}$ порядку 2^{m-1}, використовуючи процедуру «розширення».

3. За елементами $\mu_{k,l+1}$ матриці $\bar{\bar{\mu}}$ порядку 2^{n-1} «розширенням» послідовності коефіцієнтів (обчисленням проміжних значень) та «проріджуванням» отримаємо елемент $\mu_{2k,2l+1}$, а множенням отриманого результату на послідовність (1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,...) отримаємо елемент $\mu_{2k+1,2l+2}$. Елемент $\mu_{2k,2l+3} = -\mu_{2k,2l+1}$. Виконання пунктів 2,1 алгоритму дозволяє сформувати перші два рядки верхньотрикутної підматриці четвертого порядку.

4. Третій елемент піддіагоналі $\mu_{2k+2,2l+3}$ отримаємо «проріджуванням» $\mu_{2k,2l}$ та множенням отриманих коефіцієнтів на послідовність (1,1,-1,-1,1,1,-1,...).

Таким чином, безпосереднє формування матриці $\bar{\bar{G}}_{Had}$ в (1) можливе і до того ж легко програмується, що дозволяє зекономити на кількості операцій множення матриць високих порядків. Обчислення матриці $\overline{\overline{G}}_{2Had}$ можливе множення вже сформованих матриць $\overline{\overline{G}}_{Had}$ та $\overline{\overline{G}}_{Had}^{T}$, які є блочно-діагональними. Але більш цікавим та швидким є алгоритм безпосередньо формування цієї матриці, використовуючи інформацію про коефіцієнти при відліках імпульсної характеристики. Для пояснення розглянемо структуру матриці $\overline{\overline{G}}_2 = \overline{\overline{G}}^T \times \overline{\overline{G}}$. Ця матриця складається з елементів (по одному в кожній клітині матриці)

$$\beta_0 = \sum_{k=0}^{s-1} g_k^2;\ \beta_1 = \sum_{k=0}^{s-2} g_k \times g_{k+1}; \beta_2 = \sum_{k=0}^{s-3} g_k \times g_{k+2}; \ldots \sum_{k=0}^{0} g_k \times g_{s-1} = g_k \times g_{s-1}; S \le N,$$

де N – формат матриці $\overline{\overline{G}}_2$.

Тоді, наприклад, для підматриці діагоналі матриці $\overline{\overline{G}}_2$ порядку 8 ($S=4$) матиме вигляд

β_0	β_1	β_2	β_3		β_3	β_2	β_1
β_1	β_0	β_1	β_2	β_3		β_3	β_2
β_2	β_1	β_0	β_1	β_2	β_3		β_3
β_3	β_2	β_1	β_0	β_1	β_2	β_3	
	β_3	β_2	β_1	β_0	β_1	β_2	β_3
β_3		β_3	β_2	β_1	β_0	β_1	β_2
β_2	β_3		β_3	β_2	β_1	β_0	β_1
β_1	β_2	β_3		β_3	β_2	β_1	β_0

(10)

Порівнюючи тепер (10) та (4*a*) ,можна знайти коефіцієнти при β_k. Так, β_0 займає в (10) ті ж самі позиції, що й g_0 в (4*a*), β_1 займає ті ж позиції що й g_1 та g_7; β_2 – ті ж самі позиції, що й g_2 та g_6, а β_3 — ті ж позиції, що й g_3 та g_5 і т.д. Тому для визначення коефіцієнтів $\gamma_{i,j}$ при β_k слід підсумувати коефіцієнти $\mu_{i,j}$ при відліках імпульсної характеристики. Так при форматі імпульсної характеристики 8 з вищенаведених формул для $\mu_{i,j}$ отримаємо елементи матриці $\overline{\overline{G}}_{2Had}$ (порядку $N \ge 16$):

$$\theta_{0,0} = \beta_0 + 2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 + 2\beta_4 + 2\beta_5 + 2\beta_6 + 2\beta_7;$$
$$\theta_{1,1} = \beta_0 - 2\beta_1 + 2\beta_2 - 2\beta_3 + 2\beta_4 - 2\beta_5 + 2\beta_6 - 2\beta_7;$$
$$\theta_{2,2} = \theta_{3,3} = \beta_0 + 0 - 2\beta_2 + 0 + 2\beta_4 + 0 - 2\beta_6 + 0; \theta_{2,3} = \theta_{3,2} = 0;$$
$$\theta_{4,4} = \theta_{6,6} = \beta_0 + \beta_1 + 0 - \beta_3 - 2\beta_4 - \beta_5 + 0 + \beta_7;$$
$$\theta_{4,5} = \theta_{5,4} = \theta_{6,7} = \theta_{7,6} = \theta_{4,6} = \theta_{6,4} = \theta_{5,7} = \theta_{7,5} = 0;$$
$$\theta_{4,4} = \theta_{6,6} = 0 - \beta_1 + 0 + \beta_3 - 2\beta_4 + \beta_5 + 0 - \beta_7;$$

і т.д. Аналогічно знаходимо елементи матриці $\bar{\bar{C}}_{2Had}$ в (1).

Таким чином, єдиний алгоритм формування коефіцієнтів $\mu_{i,j}$ та $\theta_{i,j}$ дозволяє безпосередньо (використовуючи символьні залежності) обчислити матриці $\bar{\bar{G}}_{2Had}$ та $\bar{\bar{C}}_{2Had}$.

Висновки

Запропонований алгоритм формування матриць $\bar{\bar{G}}_{2Had}$ та $\bar{\bar{G}}_{Had}$ слід віднести до символьних, що дозволяє значно зекономити час на проведення обчислень за сформованими коефіцієнтами при відліках g_i імпульсної характеристики деградації та перед коефіцієнтами $\beta_{i,j}$ добутків цих коефіцієнтів. Враховуючи обмежену довжину імпульсної характеристики деградації коефіцієнти $\mu_{i,j}$ та $\theta_{i,j}$ можна від генерувати один раз і для різних імпульсних характеристик підставленням значень $\mu_{i,j}$ та $\theta_{i,j}$ одразу ж отримати матриці $\bar{\bar{G}}_{2Had}$ та $\bar{\bar{G}}_{Had}$.

Обчислення матриць $\bar{\bar{G}}_{2Had}$ та $\bar{\bar{G}}_{Had}$ чисельними методами спряжене з великою кількістю операцій додавань та віднімань тих самих виразів, що призводить до накопичення великої похибки. Символьний алгоритм є вільним від цього недоліку.

Формування матриці $\bar{\bar{G}}_{2Had}$ не є самоціллю. Для реставрації образу необхідно знайти обернену матрицю (1) при різних значеннях коефіцієнта варіації λ. Цю задачу теж можна розв'язати, використовуючи символьні методи, що буде показано в наступних роботах.

Література

1. Jan Jiшн Инslicova filtrace, analŷza arestaurace signlщ / VUT v BRNĚ, 1997,438s.

2. Рибін О.І. Реставравраціяя образів методом умовної деконволюції в області просторових частот / О.І. Рибін, В.Ю. Корольов // Вісник Технічного університету Поділля.— 2000.— С. 145 — 147.

3. Рыбин А. И. Реставрация образов в частотной области методом взвешенной фильтрации / А.И. Рыбин, В.Ю. Королев // Радиоэлектроника — 2001.— №4.— С. 51 — 56 (Изв. вузов).

4. Ахмед Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Н.Ахмед, К.Р. Рао / Пер. с англ. / Под ред. И. Б. Фоменко. – М.: Связь, 1980. – 248 с.

5. Рибін О.І. Аналіз лінійних систем в області трансформант перетворення Уолша-Адамара / О.І. Рибін, А.П. Ткачук // Вісник НУТУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.— 2006.— №33.— С.14— 23.

Рибін О.І., Іванюк Н.О. ***Умовна деконволюція в області трансформант Фур'є. Побудова матриці деградації образу.*** *В роботі запропоновано символьний метод формування матриці деградації образу в області трансформант перетворення Адамара. Розроблено алгоритм формування коефіцієнтів при відліках імпульсної характеристики системи, яка спотворює вихідний образ для будь-якої кількості відліків імпульсної характеристики, а також алгоритм обчислення коефіцієнтів при добутках таких відліків. Отриманий алгоритм відрізняється простотою, символьні вирази дозволяють підвищити швидкодію формування матриць, використовуваних при реалізації алгоритму реставрації образу з адитивним шумом за методом умовної деконволюції. Символьні вирази дозволяють значно підвищити точність обчислення елементів матриць, враховуючи обмежену розрядність операнд.*

Ключові слова*: Реставрація та деградація образу, умовна деконволюція, перетворення Адамара, матричні оператори деградації образу, точність, швидкодія.*

Рыбин А.И., Иванюк Н.А. ***Условная деконволюция в области трансформантов Фурье. Построение матрицы деградации образа.*** *В работе предложен символьный метод формирования матрицы деградации образа в области трансформантов преобразования Адамара. Разработан алгоритм формирования коэффициентов при отсчетах импульсной характеристики системы, которая искажает исходный образ для любого количества отсчетов импульсной характеристики, а также алгоритм вычисления коэффициентов при произведениях таких отсчетов. Полученный алгоритм отличается простотой, символьные выражения позволяют повысить быстродействие формирования матриц, используемых при реализации алгоритма реставрации образа с аддитивным шумом по методу условной деконволюции. Символьные выражения позволяют значительно повысить точность вычисления элементов матриц, учитывая ограниченную разрядность операнда.*

Ключевые слова: *Реставрация и деградация образа, условная деконволюция, преобразование Адамара, матричные операторы деградации образа, точность, быстродействие.*

Rybin A., Ivaniuk N ***Fourier transformant area deconvolution condition. Construction of the image degradation matrix.*** *Symbolic method of forming image degradation matrix at Adamar conversion transformants area is proposed. Algorythm of forming coefficients at distortion system impulse characteristics samples for any range of samples and product coefficients evaluation algorythm were developed. Algorithm obtained differs in simplicity, symbolic expressions enable to increase matrix forming speed-performance for matrixes, those are used for image restavration algorythm with additive noize with method of conditional deconvolution. Symbolic expressions enable to notably increase accuracy of matrix elements evaluation, considering to limited operand dimensionality.*

Keywords: *image restavration and degradation, deconvolution condition, Adamar conversion, image degradation operators, accuracy, speed-performance*