

УДК 621.372.061

**АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА
ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ АНАЛОГОВЫХ ЦЕПЕЙ**

*Земляк А. М., к.т.н., доцент; Маркина Т. М., аспірантка
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут”, м. Київ, Україна*

Наиболее общая постановка задачи проектирования была дана в работах [1-2] на основе формулирования задачи проектирования аналоговых цепей в терминах теории управления. Такой подход позволяет искать среди множества различных стратегий проектирования одну или несколько стратегий, обладающих минимальным процессорным временем. Показано, что новый подход позволяет потенциально существенно уменьшить машинное время проектирования цепей. Это качество появляется вследствие практически неограниченного числа различных стратегий проектирования, возникающих в рамках обобщенной методологии и появившейся возможности управлять процессом проектирования путем перераспределения машинных затрат между анализом цепи и процедурой параметрической оптимизации. Традиционная стратегия проектирования (ТСП), включающая анализ цепи на каждом шаге процедуры оптимизации, не является оптимальной по времени, и выигрыш во времени проектирования для некой оптимальной стратегии по сравнению с ТСП возрастает при возрастании размеров и сложности проектируемой цепи [3]. Разработка алгоритма получения оптимальной стратегии проектирования (ОСП) является важнейшей задачей при реализации преимуществ такого подхода.

Постановка задачи

В соответствии с предложенной методологией [4] процесс проектирования электронной цепи определен как динамическая управляемая система. Эта система определяется дифференциальными или разностными уравнениями для переменных состояния и системой ограничений, в качестве которых выступает математическая модель электронной цепи.

Процесс проектирования электронной цепи определяем в соответствии с [1] как задачу минимизации обобщенной целевой функции $F(X,U)$ на основе векторного уравнения (1)

$$X^{s+1} = X^s + t_s \cdot H^s \quad (1)$$

с ограничениями (2), в качестве которых выступает математическая модель электронной цепи:

$$(1 - u_j) g_j(X) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (2)$$

где $X \in R^N$, $X = (X', X'')$, $X' \in R^K$ есть вектор независимых переменных и

$X \in R^M$ есть вектор зависимых переменных, M есть число зависимых переменных электронной цепи, K число независимых переменных, N общее число переменных ($N=K+M$) и t_s итерационный параметр. Функции $g_j(X)$ для всех j являются уравнениями модели цепи. Функция $H \equiv H(X, U)$ определяет направление уменьшения обобщенной целевой функции $F(X, U)$, U есть вектор управляющих функций $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, где $u_j \in \Omega$, $\Omega = \{0;1\}$. Обобщенная целевая функция процесса проектирования $F(X, U)$ может быть определена, например, следующим аддитивным выражением:

$$F(X, U) = C(X) + \psi(X, U), \quad (3)$$

где $C(X)$ есть не отрицательная функция цели, и $\psi(X, U)$ есть дополнительная штрафная функция, определяемая следующим выражением:

$$\psi(X, U) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^M u_j \cdot g_j^2(X). \quad (4)$$

Такая формулировка задачи проектирования позволяет перераспределять затраты машинного времени между решением задач (1) и (2). При этом вектор U является основным инструментом описанной методологии и управляет динамическим процессом приведения целевой функции $C(X)$ к минимуму за возможно минимальное время проектирования. В такой постановке задача поиска оптимальной по времени стратегии проектирования формулируется как типичная задача минимизации функционала, каковым является процессорное время, путем поиска оптимального управляющего вектора U . В непрерывной форме основное уравнение процедуры оптимизации может быть записано как следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(X, U), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Эта система совместно с уравнениями (2), (3) и (4) задает непрерывную форму процесса проектирования.

Структура функций $f_i(X, U)$ определяется методом оптимизации и, например, для градиентного метода, имеет вид:

$$f_i(X, U) = -\frac{\delta}{\delta x_i} F(X, U); \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (6)$$

$$f_i(X, U) = -u_{i-K} \frac{\delta}{\delta x_i} F(X, U) + \frac{(1-u_{i-K})}{dt} [-x_i + \eta_i(X)]; \quad i = K+1, K+2, \dots, N \quad (6')$$

Основная проблема такой постановки задачи – это определение оптимального поведения управляющих функций u_j в течение процесса проектирования. Функции $f_i(X, U)$ являются кусочно-непрерывными, т.к. таковыми являются управляющие функции u_j . В связи с этим наиболее перспективным является подход, использующий понятие функции Ляпунова

динамической системы.

В работе [5] для анализа динамических свойств процесса проектирования было введено понятие функции Ляпунова процесса проектирования. Была выявлена определенная взаимосвязь между процессорным временем проектирования и свойствами функции Ляпунова процесса проектирования. Определим функцию Ляпунова на основе обобщенной целевой функции посредством формулы:

$$V(X, U) = [F(X, U)]^r \quad (7)$$

где степень $r > 0$.

В соответствии с теорией прямого метода Ляпунова информация об устойчивости траектории, а в нашем случае и процессорное время, связаны с производной по времени от функции Ляпунова. В работе [5] показано, что функция Ляпунова процесса проектирования вместе со своей производной может служить достаточно информативным источником для поиска перспективных, с точки зрения минимального процессорного времени, стратегий проектирования.

С точки зрения теории управления задача конструирования минимального по времени алгоритма проектирования может быть сформулирована как задача поиска переходного процесса с минимальным временем установления. Основным инструментом при этом поиске служит управляющий вектор U , позволяющий изменять структуру функций $f_i(X, U)$ и, в соответствии с этим [6-7], изменять время переходного процесса. Для этого необходимо обеспечить максимальную скорость убывания функции Ляпунова, т. е. максимальное абсолютное значение производной $\dot{V} = dV / dt$. Введем более информативную функцию, а именно относительную временную производную функции Ляпунова $W = \dot{V} / V$. В этом случае мы можем сравнивать различные стратегии проектирования посредством анализа поведения функции $W(t)$ и выбрать наиболее перспективные с точки зрения минимального процессорного времени.

Численные результаты

Разобранные ниже примеры были проанализированы на основе непрерывной формы процесса оптимизации (5) с постоянным шагом интегрирования.

Поведение функций $V(t)$ и $W(t)$ для нелинейной пассивной цепи изображенной на Рис. 1 приведено на Рис. 2.

Нелинейные элементы задавались следующими зависимостями: $y_{n1} = a_{n1} + b_{n1} \cdot (V_1 - V_2)^2$, $y_{n2} = a_{n2} + b_{n2} \cdot (V_2 - V_3)^2$. Вектор X включает семь компонент, определяемых следующим образом: $x_1^2 = y_1$, $x_2^2 = y_2$, $x_3^2 = y_3$, $x_4^2 = y_4$, $x_5 = V_1$, $x_6 = V_2$, $x_7 = V_3$. Модель цепи (2) включает три уравнения ($M=3$) и

управляющий вектор включает три компоненты $U = (u_1, u_2, u_3)$.

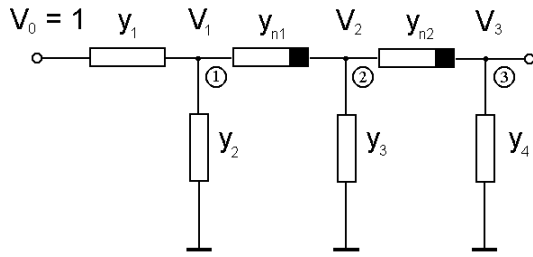


Рис. 1

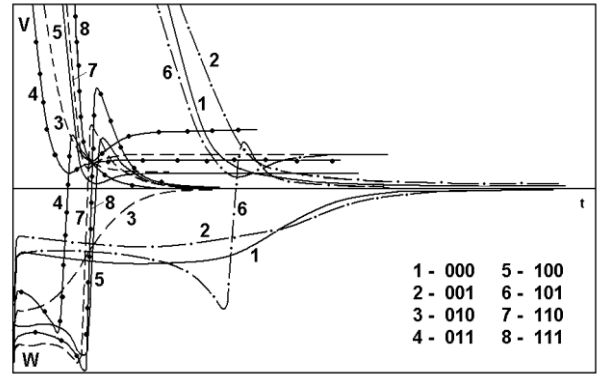


Рис. 2

На рис. 2 представлено поведение функций $V(t)$ и $W(t)$ для всех восьми стратегий структурного базиса. Относительное процессорное время проектирования для всех стратегий равно 1, 0.886, 0.569, 0.091, 0.129, 0.25, 0.131 и 0.105 для, соответственно, стратегий с управляющим вектором 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 и 111.

Наблюдается корреляция между общим процессорным временем для некоторой стратегии и поведением функции $W(t)$. Чем большее абсолютное значение имеет функция $W(t)$ на начальном участке процесса проектирования, тем быстрее уменьшается функция Ляпунова и, в конечном итоге, тем меньше полное процессорное время. Стратегии с управляющим вектором 011, 100, 110 и 111 имеют наибольшее абсолютное значение функции $W(t)$ и, к тому же, возрастающее на начальном участке, и поэтому имеют минимальное процессорное время. Стратегии 1 и 2 имеют наименьшее абсолютное значение функции $W(t)$, и они же имеют наибольшее процессорное время.

Анализ процесса оптимизации двухкаскадного транзисторного усилителя, представленного на рис. 3 дает аналогичные результаты. Поведение функций $V(t)$ и $W(t)$ представлено на рис. 4.

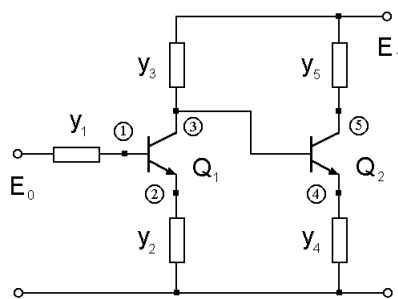


Рис. 3

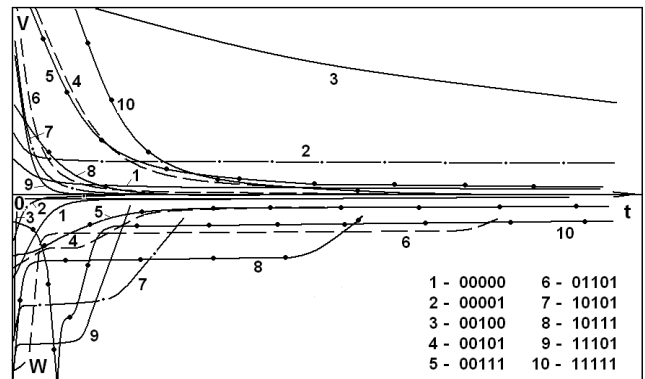


Рис. 4

В качестве модели транзистора использовалась статическая модель Эберса-Молла, реализуемая в системе SPICE [8]. Целевая функция определена как сумма квадратов разностей между заранее заданными и текущими значениями напряжений на переходах транзисторов. Имеется пять независимых переменных $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где $x_1^2 = y_1$, $x_2^2 = y_2$, $x_3^2 = y_3$, $x_4^2 = y_4$, $x_5^2 = y_5$, $(K=5)$ и пять зависимых переменных $(x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$, $x_6 = V_1$, $x_7 = V_2$, $x_8 = V_3$, $x_9 = V_4$, $x_{10} = V_5$, $(M=5)$. Алгоритм оптимизации включает систему десяти уравнений, а модель схемы определяется пятью нелинейными уравнениями. Базис стратегий проектирования содержит 32 различные стратегии. Поведение функций $V(t)$ и $W(t)$ представлено для некоторых стратегий этого базиса. Результаты анализа этих стратегий представлены также в табл. 1.

Для этого примера, как и для предыдущих, наблюдается строгая корреляция между поведением функции $W(t)$ на начальном периоде процесса проектирования и процессорным временем.

На Рис. 5 представлен трехкаскадный транзисторный усилитель.

Таблица 1

N	Управляющий вектор	Число итераций	Процессорное время, (сек)
1	(0 0 0 0 0)	165962	299,56
2	(0 0 0 0 1)	337487	737,55
3	(0 0 1 0 0)	44118	68,87
4	(0 0 1 0 1)	14941	19,06
5	(0 0 1 1 1)	21971	22,03
6	(0 1 1 0 1)	4544	4,56
7	(1 0 1 0 1)	2485	1,65
8	(1 0 1 1 1)	7106	3,57
9	(1 1 1 0 1)	2668	1,32
10	(1 1 1 1 1)	79330	10,11

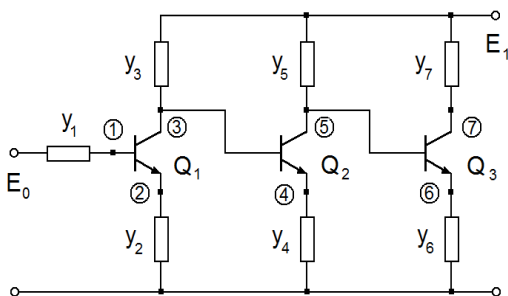


Рис. 5

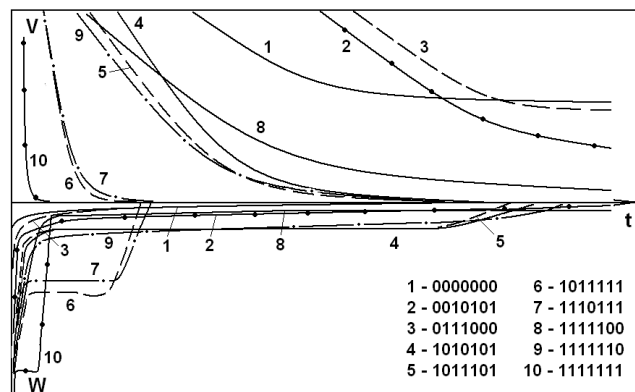


Рис. 6

Анализ различных стратегий этого усилителя подтверждает ранее полученные результаты. Полный структурный базис стратегий проектирования включает 128 различных стратегий. Имеется семь независимых переменных $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$, где $x_1^2 = y_1$, $x_2^2 = y_2$, $x_3^2 = y_3$, $x_4^2 = y_4$, $x_5^2 = y_5$, $x_6^2 = y_6$,

$x_7^2 = y_7$ ($K=7$) и семь зависимых переменных ($x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$), $x_8 = V_1$, $x_9 = V_2$, $x_{10} = V_3$, $x_{11} = V_4$, $x_{12} = V_5$, $x_{13} = V_6$, $x_{14} = V_7$ ($M=7$). Начальные значения вектора X равны соответственно

$$x_1 = 0,076, x_2 = 1, x_3 = 0,316, x_4 = 1, x_5 = 1, x_6 = 0,542,$$

$$x_7 = 0,482, x_8 = 2, x_9 = 1, x_{10} = 20, x_{11} = 2, x_{12} = 20, x_{13} = 30, x_{14} = 20.$$

Поведение функций $V(t)$ и $W(t)$ для некоторых стратегий этого базиса представлено на Рис. 6. Результаты анализа этих стратегий представлены в табл. 2.

Анализ этого примера подтверждает уже выявленную ранее закономерность между поведением функции $W(t)$ на начальном этапе процесса проектирования и полным процессорным временем проектирования. Наиболее быстрая стратегия 10, имеющая наименьшее значение процессорного времени, соответствует также наибольшему значению функции $W(t)$ на начальном этапе проектирования, что видно из рисунка 6. Стратегии 6 и 7 соответствуют меньшим значениям функции $W(t)$ и бóльшим значениям процессорного времени проектирования. Однако они значительно более оптимальные по времени, нежели остальные стратегии. Следующими по степени убывания величины $W(t)$ (по степени возрастания процессорного времени) являются стратегии 4 и 5. Остальные стратегии, представленные в таблице, отличаются малыми значениями функции $W(t)$ и еще бóльшим значением времени проектирования. При этом традиционная стратегия 1 в 655 раз более медленная, нежели традиционная модифицированная стратегия 10.

Таблица 2

N	Управляющий вектор	Число итераций	Процессорное время, (сек)
1	(0 0 0 0 0 0 0)	2161512	3019,47
2	(0 0 1 0 1 0 1)	275580	314,94
3	(0 1 1 1 0 0 0)	1075433	1042,05
4	(1 0 1 0 1 0 1)	102510	50,54
5	(1 0 1 1 1 0 1)	107541	43,66
6	(1 0 1 1 1 1 1)	38751	12,81
7	(1 1 1 0 1 1 1)	43387	13,91
8	(1 1 1 1 1 0 0)	160900	97,32
9	(1 1 1 1 1 1 0)	117828	53,72
10	(1 1 1 1 1 1 1)	52651	4,61

Обобщая полученные результаты, можно сделать следующий вывод: поведение относительной временной производной функции Ляпунова процесса проектирования $W = \dot{V}/V$ на начальном этапе процесса проектирования вполне может прогнозировать полное относительное процессорное время той или иной стратегии проектирования. Это означает, что для сравнения полного процессорного времени проектирования для различных стратегий нет необходимости проводить проектирование до конца. Достаточно сравнить поведение функции $W(t)$ на начальном этапе проектирования, чтобы определить стратегии с наименьшим процессорным временем. Бóльшая абсолютная величина функции W приводит к меньшему полному

процессорному времени.

Исходя из проведенного анализа, можно сделать вывод, что функция Ляпунова процесса проектирования и функции, производные от нее, в частности относительная производная по времени от функции Ляпунова, могут служить достаточно информативным источником для поиска стратегий, имеющих наименьшее процессорное время. Стратегии, имеющие наибольшее абсолютное значение относительной производной по времени функции Ляпунова на начальном участке траектории проектирования имеют также минимальное процессорное время. Это свойство может явиться основой для конструирования оптимального по времени алгоритма проектирования.

Литература

1. Zemliak A.M. Analog System Design Problem Formulation by Optimum Control Theory // IEICE Trans. Fundamentals Electron., Commun. and Computer Sciences.– 2001.– Vol. E84-A.– № 8.– P. 2029–2041.
2. Земляк А.М. Проектирования аналоговых цепей методами теории управления. I. Теория // Радиоэлектроника.– 2004.– № 5.– С. 18–28. (Изв. вузов).
3. Земляк А.М. Проектирования аналоговых цепей методами теории управления. II. Численные результаты // Радиоэлектроника.– 2004.– № 6.– С. 65–71. (Изв. вузов).
4. Земляк А.М. Проектирования аналоговой системы как управляемый динамический процесс // Нелинейный мир.– 2006.– № 11.– С. 609–618.
5. Земляк А.М. Анализ динамических характеристик процесса проектирования аналоговых цепей. // Радиоэлектроника.– 2007.– № .– С. 26—35 . (Изв. вузов).
6. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967.– 223 с.
7. Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability Theory by Liapunov's Direct Method. – N.Y.: Springer-Verlag. – 1977.
8. Massobrio G., Antognetti P. Semiconductor Device Modeling with SPICE. – N.Y.: Mc. Graw-Hill, Inc., 1993.

Земляк О. М., Маркіна Т. М. Аналіз поведінки функції Ляпунова при оптимізації аналогових кіл. Процес оптимізації аналогових кіл визначений математично як динамічна керована система. При цьому задача мінімізації процесорного часу може бути сформульована як задача мінімізації часу перехідного процесу динамічної системи. Для аналізу властивостей подібної системи запропоновано застосувати концепцію функції Ляпунова динамічної системи. Аналіз цієї функції і її часової похідної дозволяє виявити кореляцію між повним процесорним часом оптимізації кола і поведінкою функції Ляпунова.

Ключові слова: оптимізація аналогових кіл, теорія управління, керуючий вектор, оптимальний алгоритм проектування, функція Ляпунова процесу проектування.

Земляк А. М., Маркіна Т. М. Анализ поведения функции Ляпунова при оптимизации аналоговых цепей. Процесс оптимизации аналоговых цепей определен математически как динамическая управляемая система. При этом задача минимизации процессорного времени может быть сформулирована как задача минимизации времени переходного процесса динамической системы. Для анализа свойств подобной системы предложено использовать концепцию функции Ляпунова динамической системы. Анализ этой функции и ее временной производной позволяет выявить корреляцию между

полным процессорным временем оптимизации цепи и поведением функции Ляпунова.

Ключевые слова: *оптимизация аналоговых цепей, теория управления, управляющий вектор, оптимальный алгоритм проектирования, функция Ляпунова процесса проектирования.*

Zemliak A., Markina T. Analysis of the behavior of the Lyapunov function in the optimization of analog circuits. The process of optimization of analog circuits is defined mathematically as the dynamic controllable system. Thus the problem of minimization of processor time can be set forth as a task of minimization of time of transient of the dynamic system. For the analysis of properties of the similar system it is suggested to use conception of function of Lyapunov of the dynamic system. Analysis of this function and her temporal derivative allows to reveal correlation between complete processor time of optimization of circuit and behavior of function of Lyapunov.

Keywords: *optimization of analog circuits, the control theory, vector of control, optimum algorithm of designing, Lyapunov function of process of designing.*