УДК 519.281

К. Г. НИКИТИН, П. С. СОЧЕНКО, кандидаты техн. наук,
А. Г. БЕЛЫЙ, студент

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ СВЯЗЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И МЕРЫ ТОЧНОСТИ НОРМАЛЬНОГО АПОСТЕРИОРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Часто для решения статистических задач необходимо учитывать корреляционную связь таких неизвестных параметров нормального распределения, как математическое ожидание и мера точности, которая является величиной, обратной дисперсии. Определение корреляционного момента указанных случайных величин имеет важное значение в статистических исследованиях.

Согласно работе [2] апостериорная плотность неизвестных значений математического ожидания m и меры точности r нормального распределения определяются законом нормального гамма-распределения

$$f(m, r/x) = \beta^{\alpha}\tau^{1/2}r^{(\alpha-1/2)}\Gamma(\alpha)^{-1}(2\pi)^{-1/2}\times$$
$$\times\exp\{-[\tau(m-\mu)^2/2+\beta]\,r\}, \qquad (1)$$

где α и β — параметры маргинального (частного) гамма-распределения случайной величины меры точности r; μ и τ — среднее значение и мера точности условного нормального распределения случайной величины математического ожидания m; $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

Для заданного закона распределения вероятностей (1) корреляционный момент $K(m, r/x)$ определяется известной зависимостью

$$K(m, r/x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}(m-\mu)(r-\alpha/\beta)\,f(m, r/x)\,dmdr. \qquad (2)$$

Интеграл (2) легко раскладывается на четыре интеграла

$$K(m, r/x) = I_1 - I_2 - I_3 + I_4, \qquad (3)$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} mrf(m, r/x)\,dmdr, \quad I_2 = \alpha/\beta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{-\infty} mf(m, r/x)\,dmdr;$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \mu rf(m, r/x)\,dmdr, \quad I_4 = \mu\alpha/\beta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(m, r/x)\,dmdr.$$

С учетом (1) интеграл I_1 можно записать таким образом:

$$I_1 = E\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} mr^{(\alpha+1/2)}e^{-Ar}dmdr, \qquad (4)$$

где

$$E = \beta^{\alpha}\tau^{1/2}(2\pi)^{-1/2}\Gamma(\alpha)^{-1},\ A = \tau(m-\mu)^2/2 + \beta. \tag{4a}$$

Интеграл I_1 является табличным [3] и его можно представить как

$$I_1 = E\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\alpha + 3/2)\, A^{-(\alpha+3/2)} m dm; \tag{5}$$

подставляя (4а) в (5) и производя необходимые преобразования, нетрудно получить

$$I_1 = E_1\int_{0}^{\infty}[m^2 - 2m\mu + \mu^2 + 2\beta/\tau]^{-(\alpha+3/2)} m dm; \tag{6}$$

здесь

$$E_1 = 2E\Gamma(\alpha + 3/2)(2/\tau)^{(\alpha+3/2)}. \tag{6a}$$

Интеграл (6) — табличный [2] и может быть записан в виде

$$I_1 = E_1 B(2; 2\alpha + 1)_2 F_1[1;\ \alpha + 1/2;\ \alpha + 2;\ 1 - \mu^2(\mu^2 + 2\mu/\tau)^{-1}], \tag{7}$$

где $B(2; 2\alpha + 1)$ — бета-функция, определяемая выражением

$$B(2; 2\alpha + 1) = \Gamma(2)\,\Gamma(2\alpha + 1)/\Gamma(2\alpha + 3); \tag{7a}$$

${}_2F_1[1;\ \alpha + 1/2;\ \alpha + 2;\ 1 - \mu^2(\mu^2 + 2\beta/\tau)^{-1}]$ — гипергеометрическая функция, которую можно при соответствующих условиях выразить через гамма-функции

$$ {}_2F_1[1;\ \alpha + 1/2;\ \alpha + 2;\ 1 - \mu^2(\mu^2 + 2\beta/\tau)^{-1}] = \Gamma(\alpha + 2)\,\Gamma(1/2)\,[\Gamma(\alpha + 1)\,\Gamma(3/2)]^{-1}. \tag{7б}$$

Если подставить (6а), (7а), (7б) в (7) и произвести несложные преобразования, можно получить окончательное выражение для интеграла I_1

$$I_1 = 8E(\alpha + 1)\,\Gamma(\alpha + 3/2)\,[(2\alpha + 2)(2\alpha + 1)\,\tau\beta^{(\alpha+1/2)} \times (\mu^2\tau/2\beta + 1)^{(\alpha+1/2)}]^{-1}. \tag{8}$$

Интегралы I_2, I_3 и I_4 можно найти аналогичным образом. Окончательные их значения выражаются следующими соотношениями:

$$I_2 = 2E\alpha/\beta\Gamma(\alpha + 1/2)\,[\mu\tau/2\beta + 1]^{(\alpha-1/2)}\beta^{(\alpha-1/2)}2\tau]^{-1},$$
$$I_3 = \mu\alpha/\beta,\ I_4 = I_3. \tag{9}$$

Подставляя зависимости (9) в (3) и производя несложные преобразования, получим выражение искомого корреляционного момента

$$K(m, r/x) = -\mu(\tau/2\pi\beta)^{1/2}\,\Gamma(\alpha + 1/2)\,[\beta\Gamma(\alpha) \times (\mu^2\tau/2\beta + 1)^{(\alpha+1/2)}]^{-1}. \tag{10}$$

Отрицательный знак корреляционного момента $K(m, r/x)$ объясняется тем, что с повышением меры точности r рассеивание случайной величины m должно уменьшаться, а при малой мере точности r разброс параметра m должен быть большим.

Как известно [1], апостериорные значения параметров μ, τ, α и β в зависимости от результатов испытаний изменяются согласно выражениям

$$\left.\begin{aligned} &\mu = (\tau_0\mu_0 + n\bar{x})(\tau_0 + n)^{-1}, \ \tau = (\tau_0 + n)\, r, \\ &\alpha = \alpha_0 + n/2, \ \beta = \beta_0 + nS^2/2 + \tau_0 n V^2 (\tau_0 + n)^{-1}/2, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

где $S^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2/n$, $V^2 = (\bar{x} - \mu)^2$, $\bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$; μ_0, τ_0, α_0, β_0 — априорные значения параметров, задаваемые соотношениями $\mu_0 = F(m)$, $\alpha_0 = F^2(r)/D(r)$, $\beta_0 = F(r)/D(r)$, $\tau_0 = F(r)\, D^{-1}(m)\, [F^2(r) - D(r)]^{-1}$; n — число испытаний; $F(m)$, $F(r)$, $D(m)$, $D(r)$ — априорные значения средних и дисперсий математического ожидания и меры точности.

Если подставить (11) в (10), можно найти апостериорное значение корреляционного момента $K(m, r/x)$ зависимости от числа проведенных испытаний.

Полученное выражение (10) определяет корреляционную связь математического ожидания и меры точности для нормального распределения, которая должна учитываться при анализе и оценках статистических данных байесовским методом, что позволяет повысить эффективность статистических исследований.

1. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1981. 718 с. 2. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974. 492 с. 3. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.

Поступила в редколлегию 10.09.86

УДК 621.372

В. С. СКРЫНСКИЙ, канд. техн. наук, В. Б. КУЛЬКО, мл. науч. сотр., М. В. ГЛАЗКОВА, студентка

МНОГОМЕРНАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЕКТРОТЕПЛОВОГО ЭЛЕМЕНТА

Существует множество устройств, объединенных общим признаком — нелинейным инерционным тепловым преобразованием сигнала [2]. Для его анализа использовались методы, не обладающие общностью и применимые лишь для конкретных типов нелинейных дифференциальных уравнений и специальных постановок краевых и начально-краевых задач для этих уравнений [3]. Применение метода, основанного на использовании функциональных рядов Вольтерра и многомерного преобразования Лапласа, введение многомерных передаточных функций для описания электротеплового преобразования (ЭТП)