Операцию определения ДКФ разобьем на два этапа. На первом этапе вычисляются пары двучленов

$$\alpha A_{01} + \alpha^* A_{02} \text{ и } \alpha^* A_{01} + \alpha A_{02}; \qquad \alpha A_{10} + \alpha^* A_{20} \text{ и } \alpha^* A_{10} + \alpha A_{20};$$

$$\alpha A_{11} + \alpha^* A_{22} \text{ и } \alpha^* A_{11} + \alpha A_{22}; \qquad \alpha A_{12} + \alpha^* A_{21} \text{ и } \alpha^* A_{12} + \alpha A_{21},$$

а также двучлены $A_{01} + A_{02}$, $A_{10} + A_{20}$, $A_{11} + A_{22}$ и $A_{12} + A_{21}$.

Для вычисления каждой пары требуется два умножения действительных чисел на $\sqrt{3/2}$, два умножения на тривиальный множитель 1/2 и 4 суммирования действительных чисел. Для вычисления всех двучленов требуется восемь умножений на $\sqrt{3/2}$, восемь умножений на 1/2 и 32 суммирования действительных чисел.

Второй этап сводится к суммированию полученных двучленов, для чего требуется 70 суммирований действительных чисел.

Сравнение с предыдущим вариантом алгоритма показывает, что последний по количеству суммирований практически не отличается от варианта последовательного преобразования, но требует для вычисления каждых девяти ДКФ двух перемножений комплексных чисел вместо трех. Недостатком же варианта одновременного вычисления ДКФ является отсутствие цикличности (базисного преобразования) внутри каждого девятиточечного двумерного ДПФ. Поэтому вопрос о выборе этого или иного варианта алгоритма должен решаться при разработке схемы процессора БПФ, исходя из конкретных требований к разрабатываемому преобразователю.

1. *Васюк Г. И.* Алгоритм двумерного преобразования Фурье со смешанным основанием. — Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1983, № 12, с. 80—81. 2. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.

Поступила в редколлегию 30.08.82

УДК 621.327.757

Г. И. ВАСЮК, канд. техн. наук, К. Б. КРУКОВСКИЙ-СИНЕВИЧ, д-р техн. наук,
И. В. ЛАТЕНКО, канд. техн. наук

ЭКОНОМНЫЙ АЛГОРИТМ МНОГОМЕРНОГО БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С ОСНОВАНИЕМ 8

Экономные алгоритмы многомерного быстрого преобразования Фурье с основаниями 2 и 4 описаны в работе [1]. Целью нашей статьи является рассмотрение экономии количества умножений на нетривиальные множители (отличающиеся от ± 1 и $\pm j$) при использовании основания *8*.

Будем исходить из аналитического представления двумерного дискретного преобразования Фурье числового массива из 64 элементов $a(m,n)$, размещенных в восьми строках и восьми столбцах,

$$A(i,k) = \sum_{m=0}^{7} \sum_{n=0} a(m,n) \exp\left[-\frac{j\pi}{4}(mi + nk)\right]. \tag{1}$$

Алгоритм двумерного быстрого преобразования Фурье (БПФ-2) такого массива можно получить, представив выражение (1) в матричной форме, соответствующей прямому построчному расположению элементов a $(m.n)$ в матрице-столбце col (a),

$$\mathrm{col}\,(A) = (W_6 W_5 W_4 W_3 W_2 W_1)\,\mathrm{col}\,(a), \tag{2}$$

где $W_1 = I_{32} \otimes Q$; $W_2 = I_4 \otimes Q \otimes I_8$; $W_3 = (I_{16} \otimes Q \otimes I_2)\cdot D_3$; $D_3 = d_3 \otimes d_3$; $d_3 = \mathrm{diag}\,(1, 1, 1, 1, 1, 1, -j, -j)$; $W_4 = (I_2 \otimes Q \otimes I_{16})\cdot D_4$; $D_4 = d_4 \otimes d_4$; $d_4 = \mathrm{diag}\left(1, 1, 1, 1, 1, \frac{1-j}{\sqrt{2}}, 1, \frac{-1-j}{\sqrt{2}}\right)$; $W_5 = I_8 \otimes Q \otimes I_4$; $W_6 = [(Q \otimes I_2)\cdot D_6] \otimes I_{16}$; $D_6 = \mathrm{diag}\,(1, 1, 1, -j)$; $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; I_n — единичная матрица, порядка n; $\otimes$ — знак кронекерова произведения матриц.

Полученный результат распространим на БПФ-2 квадратных массивов с линейным размером $N = 8^r$, составив алгоритм из r описанных этапов. Каждый этап объединения массива $N_п \times N_п$ в массив $8N_п \times 8N_п$ описывается следующим образом:

$$A\,(i + pN_п \cdot k + qN_п) = \sum_{m=0}^{7}\sum_{n=0}^{7} B_{m.n}(i.\,k)\exp\left[-\frac{j\pi}{4}(mp + nq)\right], \tag{3}$$

где $B_{m.n}(i.\,k) = A_{m.n}(i.\,k)\exp\left[-\frac{j\pi}{4N_п}(mp + nq)\right]$.

Из выражений (2) и (3) следует, что весь алгоритм состоит из r этапов, каждый из которых содержит шесть ступеней. На каждой пятой ступени во всех этапах нетривиальные множители имеют один и тот же, коэффициент $1/\sqrt{2}$ Умножение на $\pm(1 \pm j)/\sqrt{2}$ можно выполнить путем умножения на $1/\sqrt{2}$ с последующим выполнением тривиального умножения на $\pm(1 \pm j)$, которое сводится к операциям суммирования — вычитания и переадресации. Общее количество нетривиальных комплексных умножений состоит из $N^2(r-1)$ умножений при объединении массивов и $12\,N^2 r/64$ умножений на множитель $1/\sqrt{2}$, т. е. равно

$$M_8 = N^2\left[\frac{19}{16}\log_8 N - 1\right]. \tag{4}$$

Например, для массива 64×64 при выполнении БПФ-2 по алгоритму с основанием 8 необходимо выполнить $(11/8)\cdot 2^{12}$ умножений.

Для сравнения заметим, что для такого же массива при выполнении БПФ-2 по алгоритму с основанием 4 потребуется $2 \cdot 2^{12}$ умножений, а при последовательном преобразовании с основанием 2 потребуется $4 \cdot 2^{12}$ умножений.

Итак, в предлагаемом алгоритме ценой добавления умножений на тривиальный множитель $\pm(1 \pm j)$ достигается экономия числа нетривиальных умножений примерно на 65 % по отношению к стандартному алгоритму последовательного преобразования с основанием 2.

Все нетривиальные умножения сосредоточены в одной ступени каждого этапа и между этапами, что упрощает реализацию алгоритма на универсальных ЭВМ и обусловливает существенное упрощение схемы спецпроцессора, особенно при поточной обработке информации.

Заметим, однако, что разнообразие квадратных массивов, для которых можно выполнять БПФ-2 по алгоритму с основанием 8 весьма невелико, поэтому алгоритм вряд ли представляет самостоятельный интерес, но его рационально применять в качестве составной части алгоритма со смешанным основанием. Аналогичные результаты можно получить и для случая многомерного БПФ.

1. *Васюк Г. И., Круковский-Синевич К. Б.* Экономный алгоритм многомерного быстрого преобразования Фурье.—Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1982, 25, 5, с. 63—66.

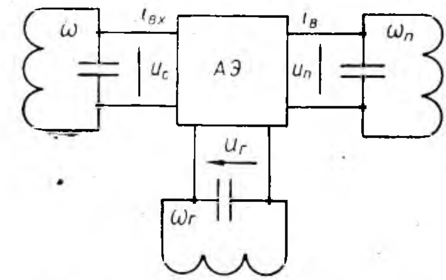
Поступила в редколлегию 02.08.82

УДК 621.396.622

Н. Ф. ВОЛЛЕРНЕР, д-р техн. наук

К ВЫВОДУ РАСЧЕТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ЧАСТОТЫ

Соотношения для расчета преобразователей частоты (ПрЧ) можно получить несколько проще, чем обычно [2]. Для этого представим ПрЧ нелинейным шестиполюсником, к двум входам которого подключены контуры и подведены напряжение сигнала $u_c = U_c \sin \omega t$ и гетеродина $u_г = U_г \cos \omega_г t$ (см. рисунок), а на выходе включена селективная цепь, настроенная на промежуточную частоту, $\omega_п$ и выделяется напряжение $u_п = U_п \sin \omega_п t$. В ПрЧ выходной ток нелинейного активного элемента (АЭ) зависит от напряжений u_c, $u_г$ и $u_п$ $i_в = \psi(u_c, u_г, u_п)$, при этом выполняется условие $U_c \ll U_г \gg U_п$. Разложим выражение для выходного тока $i_в$ в ряд Тейлора по степеням малых напряжений u_c, $u_п$ и, ограничившись линейным приближением, получим



$$i_в = \psi(u_c, u_г, u_п) = \psi(u_г) + (\partial i_в/\partial u_c)\, u_c + (\partial i_в/\partial u_п)\, u_п, \tag{1}$$

где $\psi(u_г)$, $\partial i_в/\partial u_c$ и $\partial i_в/\partial u_п$ — нелинейные функции напряжения $u_г$. Полагая для упрощения, что ток $i_в$ зависит от суммы взвешенных напряжений $u_г$, u_c и $u_п$, $i_в = \psi(u_c, u_г, u_п) = \psi(u_г + p u_c + k u_п) = \psi(u_\Sigma)$, $u_\Sigma = u_г + p u_c + k u_п$, аппроксимируем вольт-амперную характеристику (ВАХ) АЭ усеченным полиномом степени d

$$i_в = \psi(u_\Sigma) = i_0 + s u_\Sigma + (s'/2)\, u_\Sigma^2 + \ldots + (s^{(d-1)}/d!)\, u_\Sigma^d, \tag{2}$$

где $s = \partial i_в/\partial u_\Sigma \ldots s^{(d-1)} = \partial^d i_в/\partial u_\Sigma^d$ — крутизна ВАХ и ее производные,