УДК 621.372.825

В. И. Найденко, канд. техн. наук

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ СВЯЗИ НА ГРАНИЦАХ ПОЛОСЫ ПРОПУСКАНИЯ

1. При исследовании замедляющих систем в резонансном режиме замечено, что сопротивление связи $R_n n^2/n_{\text{гр}}$ (n и $n_{\text{гр}}$ — фазовое и групповое замедление) на границах полосы пропускания, вычисляемое по результатам измерений с помощью известных выражений, резко отличается от сопротивления связи внутри полосы пропускания. В то же время сопротивление связи как функция фазового сдвига должна быть непрерывной во всей полосе пропускания, включая границы. Поэтому обычно сопротивление связи на границах полосы пропускания или не измеряется, или граничные значения не принимаются «в расчет» [1; 2].

Из физических соображений следует, что измерения на границах полосы пропускания должны быть наиболее эффективными, точными и простыми. Действительно, на границах полосы пропускания все гармоники (за исключением нулевой, при нулевом фазовом сдвиге φ на период системы) разбиваются на пары, в каждой из которых распределения полей не различимы. Поскольку большинство методов измерения не реагирует на знак фазовой скорости, можно считать, что спектр пространственных гармоник на границах полосы пропускания разрежен. Благодаря этому на границах полосы пропускания поле на определенном расстоянии от периодической структуры (где оно измеряется) наиболее близко к полю, описываемому гармонической функцией, что повышает точность и упрощает обработку результатов измерений.

2. Анализируя известные методы измерения сопротивления связи (см., например, [1—3]), нетрудно заметить, что результат измерений в резонансном режиме пропорционален интегралу типа

$$\int_0^{NL} UU_0^* dz, \tag{1}$$

где z — продольная координата, вдоль которой введен измерительный зонд; U_0 — поля системы (искомые поля); U — поля или токи системы или зонда при введенном зонде; L — период системы; N — число периодов. Например, в методе связанных линий [2] U пропорционально току зонда, а U_0—электрическому полю системы без зонда.

Продольные компоненты электрического E_{z0} и магнитного H_{z0} полей в резонансном режиме можно представить в виде

$$E_{z0} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{A}_n \cos \beta_n z, \quad H_{z0} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{B}_n \sin \beta_n z, \tag{2}$$

где $\beta_n = \beta_0 + 2\pi n/L$ — постоянная распространения n гармоники.

Экспериментальные методы измерений приобретают теоретическую опору тогда, когда удается установить хотя бы приближенно связь между полями, возникающими в системе в результате внесения измерительного зонда и исследуемыми полями. В общем случае эта связь различна для различных пространственных гармоник, поэтому

$$E_z \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \widetilde{A}_n \cos \beta_n z, \quad H_z \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \widetilde{B}_n \sin \beta_n z. \tag{3}$$

Используя выражения (2) и (3) для определения остальных компонент электромагнитного поля и подставляя необходимые компоненты в интегралы типа (1), получим, что результат измерений (обозначим его через Δf)

$$\begin{aligned} \Delta f \sim & \int_0^{NL} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n A_n \cos \beta_n z \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^* \cos \beta_n z \right) dz + \\ & + \int_0^{NL} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta_n A_n \sin \beta_n z \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n A_n^* \sin \beta_n z \right) dz + \\ & + \int_0^{NL} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n B_n \sin \beta_n z \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^* \sin \beta_n z \right) dz + \end{aligned} \tag{4}$$

$$+\int\limits_0^{NL}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\gamma_n\theta_n B_n\cos\beta_n z\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\theta_n B_n^*\cos\beta_n z\right)dz.$$

Первый интеграл в выражении (4) соответствует вкладу в результат измерения полей E-типа, а именно, продольной компоненты электрического поля и, возможно, поперечных компонент магнитного поля, что отражает запись A_n вместо $\bar{A}_n$. Второй интеграл также описывает вклад полей E-типа, но их поперечных электрических компонент. Третий и четвертый интегралы соответствуют вкладу полей H-типа, причем третий интеграл описывает вклад продольных магнитных и поперечных электрических полей, что отражает запись B_n вместо $\bar{B}_n$; а четвертый — поперечных магнитных.

В частных случаях некоторые интегралы в выражении (4) могут отсутствовать. Например, в системах с аксиальной симметрией могут быть возбуждены независимо либо E, либо H азимутально-однородные поля. Если введение измерительного зонда не изменяет симметрии системы, то поля останутся либо E, либо H и тогда или третий и четвертый, или первый и второй интегралы отсутствуют.

Каждый из интегралов в (4) может быть рассмотрен независимо.

Рассмотрим вначале первый интеграл. Пусть Δf_c обозначает вклад первого интеграла. Тогда

$$\Delta f_c \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\alpha_n A_n A_q^*[\operatorname{sinc}(\beta_n+\beta_q)NL+\operatorname{sinc}(\beta_n-\beta_q)NL]. \quad (5)$$

Здесь обозначено $\operatorname{sinc} x=\sin x/x$. Разобьем двойную сумму на четыре

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=-1}^{-\infty}+\sum_{n=-1}^{-\infty}\sum_{q=0}^{\infty}+\sum_{n=-1}^{-\infty}\sum_{q=-1}^{-\infty}$$

и выделим из первой член, соответствующий $n=0$, $q=0$. Поскольку при замене индексов $n\to q$ и $q\to n$ сумма не меняется,

$$\Delta f_c \sim \alpha_0|A_0|^2(1+\operatorname{sinc}2\varphi N)+\sum_{\substack{n=0\\ n\wedge q\neq 0}}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}+2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=-1}^{-\infty}+\sum_{n=-1}^{-\infty}\sum_{q=-1}^{-\infty}, \quad (6)$$

причем в первой двойной сумме n и q не равны нулю одновременно.

В квадратных скобках (5) при положительных и одновременно не равных нулю n и q или отрицательных n и q не равно нулю второе слагаемое, а при n положительном, а q отрицательном — первое. Кроме того, $\operatorname{sinc}(\beta_n-\beta_q)NL$ равно 0, если $n\neq q$, и равно 1, если $n=q$. Поэтому (6) может быть записано в виде

$$\Delta f_c \sim \alpha_0|A_0|^2(1+\operatorname{sinc}2\varphi N)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\,\alpha_n|A_n|^2+$$

$$+2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=-1}^{-\infty}\alpha_n A_n A_q^*\operatorname{sinc}(\beta_n+B_q)NL. \quad (7)$$

Штрих при знаке суммы здесь и далее означает пропуск члена с $n = 0$. Далее $\operatorname{sinc}(\beta_n + \beta_q) NL = 0$, если $(\beta_n + \beta_q) NL = 0$. Отсюда

$$q = -n - (\varphi/\pi). \qquad (8)$$

В равенстве (8) q и n — целые числа; φ/π — целое число только при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. Если $\varphi \neq 0, \pi$, то $\varphi N = t\pi$, $t = 1, 2, \ldots, N-1$ и из (7) получим

$$\Delta f_c \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n |A_n|^2. \qquad (9)$$

Рассмотрим границы полосы пропускания. При $\varphi = 0$

$$\Delta f_c \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n \alpha_n |A_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n A^*_{-n}, \qquad (10)$$

где $\varepsilon_n = 2$ при $n = 0$ и 1 при $n \neq 0$. При $\varphi = \pi$ $q = -n - 1$ и

$$\Delta f_c \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n |A_n|^2 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n A^*_{-n-1}. \qquad (11)$$

Можно показать, что на границе $\varphi = 0$ $\alpha_{-n} = \alpha_n$, $A_{-n} = A_n$, а на границе $\varphi = \pi$ $\alpha_{-n-1} = \alpha_n$, $A_{-n-1} = A_n$. Учитывая эти равенства и то, что $R_n n_n^2/n_{\text{гр}} \sim |A_n|^2$, получаем искомый результат для первого интеграла

$$\Delta f_c \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{R_n}{n_{\text{гр}}} n_n^2 \text{ при } 0 < \varphi < \pi; \qquad (12)$$

$$\Delta f_c \sim 2\alpha_0 \frac{R_0}{n_{\text{гр}}} n_0^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{R_n}{n_{\text{гр}}} n_n^2, \quad R_{-n} = R_n \text{ при } \varphi = 0; \qquad (13)$$

$$\Delta f_c \sim 4\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{R_n}{n_{\text{гр}}} n_n^2, \quad R_{-n-1} = R_n \text{ при } \varphi = \pi. \qquad (14)$$

Рассмотрим теперь второй интеграл в выражении (4). Вклад второго интеграла

$$\Delta f_s \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta_n \delta_q A_n A^*_q [-\operatorname{sinc}(\beta_n + \beta_q) NL + \operatorname{sinc}(\beta_n - \beta_q) NL].$$

Разбивая двойную сумму в последнем выражении на четыре суммы, выделяя в первой сумме член с $n = 0$, $q = 0$ и рассматривая в каждой из четырех сумм каждое слагаемое в квадратной скобке, получаем

$$\Delta f_s \sim \alpha_0\delta_0^2 |A_0|^2 (1 - \operatorname{sinc} 2\varphi N) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \alpha_n\delta_n^2 |A_n|^2 -$$

$$- 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=-1}^{-\infty} \alpha_n\delta_n\delta_q A_n A_q^* \operatorname{sinc}(\beta_n + \beta_q) NL. \qquad (15)$$

Можно показать, что при $\varphi = 0$ $\delta_{-n} = \delta_n$, а при $\varphi = \pi$ $\delta_{-n-1} = \delta_n$. Поэтому из (15) аналогично (9) — (11) находим

$$\Delta f_s \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n\delta_n^2 |A_n|^2 \text{ при } 0 < \varphi < \pi; \qquad (16)$$

$$\Delta f_s \sim 4\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\delta_n^2 |A_n|^2 \text{ при } \varphi = 0; \qquad (17)$$

$$\Delta f_s \sim 4\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\delta_n^2 |A_n|^2 \text{ при } \varphi = \pi. \qquad (18)$$

Подставляя в выражения (16)—(18) вместо $|A_n|^2$ величину $R_n n_n^2/n_{\text{гр}}$ и суммируя их с соответствующими выражениями (12) — (14), получаем

$$\Delta f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (1 + \delta_n^2) \frac{R_n}{n_{\text{гр}}} n_n^2 \text{ при } 0 < \varphi < \pi; \qquad (19)$$

$$\Delta f \sim 2\alpha_0 \frac{R_0}{n_{\text{гр}}} n_0^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1 + \delta_n^2) \frac{R_n n_n^2}{n_{\text{гр}}}, \quad R_{-n} = R_n \text{ при } \varphi = 0; \qquad (20)$$

$$\Delta f \sim 4\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (1 + \delta_n^2) \frac{R_n}{n_{\text{гр}}} n_n^2, \quad R_{-n-1} = R_n \text{ при } \varphi = \pi. \qquad (21)$$

Соотношения (19)—(21) показывают, во-первых, что на границах и внутри полосы пропускания результат измерений описывается разными выражениями и, во-вторых, что вклад поперечных компонент нулевой и высших гармоник различен на границах и внутри полосы пропускания.

Распространим полученные результаты на третий и четвертый интегралы выражения (4). Вводя проводимость связи по магнитному полю $G_n n_n^2/n_{\text{гр}} \sim |B_n|^2$, получаем

$$\Delta f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n (1 + \theta_n^2) \frac{G_n}{n_{\text{гр}}} n_n^2 \text{ при } 0 < \varphi < \pi; \qquad (22)$$

$$\Delta f \sim 2\gamma_0\theta_n^2 \frac{G_0}{n_{\text{гр}}} n_0^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(1+\theta_n^2)\frac{G_n}{n_{\text{гр}}} n_n^2, \quad G_{-n}=G_n \text{ при } \varphi=0; \tag{23}$$

$$\Delta f \sim 4\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n(1+\theta_n^2)\frac{G_n}{n_{\text{гр}}} n_n^2, \quad G_{-n-1}=G_n \text{ при } \varphi=\pi. \tag{24}$$

Таким образом, результат измерений внутри и на границе $\varphi=\pi$ полосы пропускания для полей H-типа описывается такими же выражениями, как и для полей E-типа с заменой сопротивления связи по электрическому полю проводимостью связи по магнитному полю. На границе $\varphi=0$ ситуация несколько меняется: вклад нулевой гармоники обусловлен не продольной, а поперечными магнитными компонентами.

3. Соотношения (19)—(21) вскрывают причину отличия вычисляемых значений сопротивлений связи на границах и внутри полосы пропускания. Дело в том, что обычно $R_n n_n^2/n_{\text{гр}}$ как внутри, так и на границах полосы пропускания вычисляют по выражению (19), пренебрегая вкладом поперечных компонент (отбрасывая слагаемое δ_n^2) и связывая результат измерения Δf с одной (чаще всего, нулевой) пространственной гармоникой. В результате сопротивление связи как внутри, так и на границах полосы пропускания вычисляется по формуле $R_0 n_0^2/n_{\text{гр}} \sim \Delta f/\alpha_0$, вместо того, чтобы на границах использовать соотношения

$$\frac{R_0}{n_{\text{гр}}} n_0^2 \sim \frac{1}{2}\frac{\Delta f}{\alpha_0} \text{ при } \varphi=0; \quad \frac{R_0}{n_{\text{гр}}} n_0^2 \sim \frac{1}{4}\frac{\Delta f}{\alpha_0} \text{ при } \varphi=\pi,$$

как это следует из (20) и (21) в приближении одной нулевой пространственной гармоники и пренебрежения вкладом поперечных компонент.

Соотношения (20), (21) показывают целесообразность переформирования систем уравнений для сопротивлений связи на границах полосы пропускания, способ составления которых предложен в работе [3]. Действительно, условия $R_{-n}=R_n$ при $\varphi=0$ и условия $R_{-n-1}=R_n$ при $\varphi=\pi$ позволяют понизить порядок системы уравнений при определении сопротивлений связи заданного числа гармоник, либо наоборот, при заданном порядке системы уравнений увеличить число гармоник, сопротивление связи которых может быть вычислено. При этом в системе уравнений должны быть введены множители 2 или 4, полученные в формулах (20) и (21).

Природа преобразования выражений (19) и (22) внутри полосы пропускания в выражения (20), (21) и (23), (24) на границах заключается в потере ортогональности определенных пространственных гармоник на границах полосы пропускания, что отражается в появлении дополнительных сумм в выражениях (10), (11) и аналогичных им, показывающих, что имеется «взаимодействие» пространственных гармоник с номерами $-n$ и n при $\varphi = 0$ и с номерами $-n-1$ и n при $\varphi = \pi$.

Действительно, распределения полей указанных гармоник на границах полосы пропускания не различимы и, естественно, интеграл от их взаимного произведения не равен нулю. Эти пары гармоник могут быть объединены в одну «гармонику». Например, при $\varphi = 0$ электрическое поле (2) может быть записано в виде ряда $E_z = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos \frac{2\pi n}{L} z$ по ортогональным на отрезке $0 \div L$ функциям, в котором $C_n = A_n + A_{-n}$. При $\varphi = \pi$ для E_z получаем выражение $E_z = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos (2n+1) \frac{\pi}{L} z$ в виде разложения по ортогональным на отрезке $0 \div L$ функциям, в котором $D_n = A_n + A_{-n-1}$. Последние выражения можно интерпретировать и как форму записи электромагнитных полей в системе, отражающую перестройку спектра пространственных гармоник на границах полосы пропускания.

1. *Дашенков В. М., Демченко Н. П., Ильин В. С., Климова Т. А.* Об измерении сопротивления связи замедляющих систем с помощью «бисерных» зондов. Ч. II. Экспериментальное исследование — Электронная техника, сер. I, Электроника СВЧ, 1966, вып. 12, с. 3—19. 2. *Дашенков В. М., Демченко Н. П., Климова Т. А.* Измерение параметров замедляющих систем методом связанных линий. Ч. III. Экспериментальные исследования.— Электронная техника, сер. I., Электроника СВЧ, 1968, вып. 11, с. 51—67. 3. *Найденко В. И.* Двусторонние приближения для сопротивления связи пространственных гармоник замедляющих систем.— Радиотехника и электроника, 1976, т. XXI, № 1, с. 38 — 46. 4. *Силин Р. А., Сазонов В. П.* Замедляющие системы. М., Сов. радио, 1966. 632 с.

Поступила в редколлегию 28.09.79

V. I. Najdenko

SLOW-WAVE STRUCTURE INTERACTION IMPEDANCE ON THE PASSBAND BOUNDARIES

Expressions for calculation of interaction impedance on the passband boundaries from the measurements result is obtained. Nature in result difference of interaction impedance on the passband boundaries and passband is investigated.