УДК 621.372.825.4

*Ф. Ф. ДУБРОВКА, В. И. НАЙДЕНКО, кандидаты техн. наук*

# РАЗРЕЖЕНИЕ СПЕКТРА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГАРМОНИК ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Рассмотрим спектры пространственных гармоник волн и способы их разрежения в периодических структурах, обладающих одновременно трансляционной симметрией по координате $z$ (период $L$) и осевой симметрией $C_N$ (период $2\pi/N$ по угловой координате $\varphi$) [1], например, в цепочке индуктивно связанных резонаторов.

В соответствии с теоремой Флоке компоненты поля $E$ или $H$ $q$-й волны в рассматриваемых структурах могут быть представлены в виде двойного ряда Фурье по аксиальным и азимутальным пространственным гармоникам

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} U_{nm_q}(r) e^{-i\beta_n z} e^{-im_q\varphi}. \qquad (1)$$

Здесь $U_{nm_q}(r)$ — компонента $E$- или $H$-поля (например, $E_z$); $\beta_n = \beta_0 + 2\pi n/L$ — постоянная распространения $n$-й аксиальной пространственной гармоники вдоль координаты $z$; $m_q = q + Np$ — по аналогии, постоянная распространения $m_q$-й азимутальной пространственной гармоники вдоль координаты $\varphi$. Входящее в $m_q$ число $q$ целое и лежит в пределах [1] $-N/2 < q \leqslant N/2$. Его можно детерминировать как номер типа волны, характеризующий распределение ее полей по азимуту. Значит, в данных структурах могут существовать независимо $N$ нормальных волн, отличающихся распределением поля в азимутальном направлении, причем каждый $q$-й тип волны содержит «свой» разреженный спектр азимутальных пространственных гармоник.

Номера азимутальных гармоник $q$-й волны, по которым производится суммирование в (1), определяются по формуле

$$m_q = q + Np,$$
$$p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \qquad (2)$$

Из (2) ясно, чем выше порядок $N$ оси симметрии $C_N$, тем более разреженный спектр азимутальных пространственных гармоник для данного типа волны $q$. В пределе, когда структура становится однородной по азимуту ($N \to \infty$, ось симметрии $C\infty$), каждый $q$-й тип волны будет содержать только одну азимутальную гармонику, соответствующую его номеру.

Из (1) следует, что каждая $n$-я аксиальная пространственная гармоника содержит весь спектр азимутальных пространственных гармоник, принадлежащих $q$-й волне. Поэтому при дальнейших выкладках сумму по $n$ в формуле (1) можно опустить, подразумевая при этом, что все результаты будут справедливыми для произвольной аксиальной пространственной гармоники.

Выявим общие закономерности в спектрах азимутальных гармоник волн, связанные с четностью либо нечетностью порядка $N$ оси симметрии $C_N$ структур. Для конкретности ограничимся рассмотрением спектров гармоник двух наиболее важных с практической точки зрения типов волн с $q=0$ и $|q|=1$. Здесь $|q|$ характеризует стоячую по азимуту волну, являющуюся суперпозицией двух вырожденных волн с $+q$ и $-q$, бегущих по азимуту в противоположных направлениях с угловой скоростью $\varphi/t=\omega/q$ [1]. Поэтому тип волны $|q|$ включает в себя все азимутальные гармоники, входящие в спектры волн $+q$ и $-q$. Тогда из (2) находим: для азимутально-однородной волны

$$m_q = pN,$$
$$p=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \tag{3}$$

и для азимутально-неоднородной волны

$$m_q = \pm 1 + Np,$$
$$p=0,\ \pm 1,\ +2, \ldots . \tag{4}$$

Анализируя выражения (3) и (4), обнаруживаем следующую закономерность: в структурах с четным $N$ азимутально-однородный тип волны $q=0$ содержит только четные азимутальные гармоники, тогда как азимутально-неоднородный тип волны $|q|=1$ — только нечетные гармоники; в структурах с нечетным $N$ в спектрах обоих типов волн $q=0$ и $|q|=1$ содержатся как четные, так и нечетные азимутальные пространственные гармоники.

Для разрежения спектров азимутальных пространственных гармоник рассматриваемых структур предлагается использовать два возбуждающих источника, расположенных в диаметрально противоположных точках $A$ и $B$. Предполагая режим возбуждения линейным, можем воспользоваться принципом суперпозиции.

Найдем поля в точках $A$ и $B$ структуры с нечетным $N$, возбуждаемые идентичными синфазными источниками, расположенными в тех же точках:

1) в точке $A$ — от источника $A$

$$\sum_{m_q=\text{чет}} U_{nm_q}(r)\, e^{-im_q\varphi} + \sum_{m_q=\text{неч}} U_{nm_q}(r)\, e^{-im_q\varphi} \cdot \tag{5}$$

и от источника $B$

$$\sum_{m_q=\text{чет}} U_{nm_q}(r)\,e^{-im_q\varphi} - \sum_{m_q=\text{неч}} U_{nm_q}(r)\,e^{-im_q\varphi}; \qquad (6)$$

2) в точке $B$ от источника $B$

$$\sum_{m_q=\text{чет}} U_{nm_q}(r)\,e^{-im_q\varphi} + \sum_{m_q=\text{неч}} U_{nm_q}(r)\,e^{-im_q\varphi} \qquad (7)$$

и от источника $A$

$$\sum_{m_q=\text{чет}} U_{nm_q}(r)\,e^{-im_q\varphi} - \sum_{m_q=\text{неч}} U_{nm_q}(r)\,e^{-im_q\varphi}. \qquad (8)$$

Суммируя (5) и (6), а также (7) и (8), находим, что поля в точках $A$ и $B$ равны и определяются выражением

$$2\sum_{m_q=\text{чет}} U_{nm_q}(r)\,e^{-im_q\varphi}. \qquad (9)$$

Таким образом, нечетные азимутальные гармоники взаимно скомпенсированы. В спектре азимутально-однородной волны $q=0$ остались только четные азимутальные гармоники, спектр стал разреженным. Например, в системе с осью симметрии $C_9$ в спектре волны $q=0$ остаются только гармоники с номерами $m_q=0$, $\pm 18$, $\pm 36$, скомпенсированы гармоники с номерами $m_q=$ $=9$, $\pm 27\ldots$. Значит, ближайшими высшими азимутальными гармониками в этой структуре являются гармоники с номерами $\pm 18$.

Заметим, что в системах с четным $N$ аналогичный спектр гармоник волны $q=0$ достигается только при $N=18$ (!).

При возбуждении азимутально-неоднородной волны $|q|=1$ в структуре с нечетным $N$ двумя идентичными противофазными источниками, расположенными в диаметрально противоположных точках $A$ и $B$, поля в точках $A$ и $B$ от источника $A$ определяются выражениями (5) и (7), а поля в точках $A$ и $B$ от источника $B$ — выражениями (6) и (8) с противоположными знаками.

Суммируя, находим поле в точке $A$, равное

$$2\sum_{m_q=\text{неч}} U_{nm_q}(r)\,e^{-im_q\varphi}, \qquad (10)$$

и в точке $B$, равное (10) с противоположным знаком.

Из (10) следует, что поле волны $|q|=1$ содержит только нечетные азимутальные гармоники. Четные гармоники скомпенсированы, спектр разрежен. Например, в системе с осью симметрии $C_9$ в спектре гармоник волны $|q|=1$ ближайшими высшими гармониками являются гармоники с номерами $\pm 17$. Опять таки в системах с четным $N$ аналогичный спектр гармоник достигается при $N=18$ (!).

Нетрудно показать, используя аналогичный подход, что в системах с четным $N$ при использовании диаметрально противоположных источников, возбуждающих волны с $q=0$ и $|q|=1$, никакой компенсации гармоник нет, спектры не разрежаются.

Это объясняется тем, что в исходных спектрах гармоник волн с $q=0$ и $|q|=1$ в структурах с четным $N$ содержатся только четные гармоники для $q=0$ и только нечетные гармоники для $|q|=1$.

Таким образом, периодические структуры с нечетным порядком $N$ оси симметрии $C_N$ при возбуждении их двумя диаметрально противоположными источниками обладают такими же спектрами азимутальных пространственных гармоник, как и структуры с удвоенным (четным) порядком оси симметрии $C_{2N}$. При этом важным требованием является идентичность источников возбуждения, синфазных для волны $q=0$ и противофазных для волны $|q|=1$.

В общем случае возбуждение полей с требуемым $q$ может осуществляться $2N$ идентичными источниками, расположенными на одном радиусе, смещенными в азимутальном направлении на угол $\pi/N$ и сдвинутыми по фазе друг относительно друга на угол $q\pi/N$.

**Список литературы:** 1. *Силин Р. А., Сазонов В. П.* Замедляющие системы. М., Сов. радио, 1966. 632 с.

*F. F. Dubrovka, V. I. Naidenko*

THE SPACE HARMONIC SPECTRA RARING IN PERIODIC STRUCTURES

The spectra of the angle space harmonics in the periodic structures is considered. The method of the spectra raring is proposed.