УДК 621.317

И. И. ВАСЬКОВСКИЙ, вед. инж.

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЦЕПИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В устройствах обработки непрерывных сигналов применяются цепи с линией задержки, передаточная функция которых $W(p)$ имеет вид

$$W(p)=\frac{1}{p}(1-e^{-\tau p}). \tag{1}$$

Математические преобразования функции (1), необходимые, например, при оптимальном синтезе, вызывают значительные трудности и поэтому экспоненту обычно аппроксимируют конечным числом членов степенного ряда, что, однако, иногда приводит к громоздким вычислениям.

В ряде случаев вычисления могут быть существенно упрощены, если аппроксимировать (1) функцией $W'(p)$ вида [1]

$$W'(p)=\tau e^{\frac{-\tau p}{2}}. \tag{2}$$

Определим погрешность $\Delta_1=W(p)-W'(p)$ такой аппроксимации. Разлагая в (1) и (2) экспоненциальные члены в степенные ряды в окрестности точки $\tau p=0$, получим

$$W(p)=\tau\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k(\tau p)^k}{(k+1)!},\quad W'(p)=\tau\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\tau p)^k}{2^k k!},$$

тогда

$$\Delta_1=\tau\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{(k+3)!}-\frac{1}{2^{k+2}(k+2)}\right](\tau p)^{k+2}.$$

[1] В $W'(p)$ экспоненциальный член входит в виде множителя и не влияет на ее модуль. Поэтому при предлагаемом представлении передаточной функции упрощаются выкладки при анализе случайных процессов.

При $p=j\omega$ для действительной и мнимой части Δ_1 можно записать

$$\operatorname{Re}(\Delta_1)=\tau\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[\frac{1}{(2k+3)!}-\frac{1}{2^{2k+2}(2k+2)!}\right](\tau\omega)^{2k+2};$$

$$\operatorname{Im}(\Delta_1)=\tau\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\left[\frac{1}{(2k+4)!}-\frac{1}{2^{2k+3}(2k+3)!}\right](\tau\omega)^{2k+3}.$$

Ряды $\operatorname{Re}(\Delta_1)$ и $\operatorname{Im}(\Delta_1)$ знакопеременны со стремящимися к нулю членами, а при $|\tau\omega|<2\sqrt{20}/3\approx 3$ члены этих рядов монотонно убывают по абсолютному значению, т. е. удовлетворяют признаку Лейбница [1]. В этом случае для погрешности Δ_1 справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(\tau\omega)^2}{24}\left[1-\frac{9(\tau\omega)^2}{80}\right]<\operatorname{Re}\left(\frac{\Delta_1}{\tau}\right)<\frac{(\tau\omega)^2}{24},\\&\left|\frac{(\tau\omega)^3}{48}\right|\left[1-\frac{(\tau\omega)^2}{20}\right]<\operatorname{Im}\left(\frac{\Delta_1}{\tau}\right)<\left|\frac{(\tau\omega)^3}{48}\right|.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Сравним значения погрешности (3) с погрешностью аппроксимации $\exp(-\tau p)$ в (1) тремя членами степенного ряда; тогда аппроксимирующая функция

$$W''(p)=\tau[1-(\tau p)/2]$$

отличается от исходной $W(p)$ на

$$\Delta_2=W(p)-W''(p)=\tau\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\tau p)^{k+2}}{(k+3)!}.$$

Используя признак Лейбница, для действительной и мнимой части Δ_2 получим неравенства (при $|\tau\omega|<\sqrt{20}$)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(\tau\omega)^2}{6}\left[1-\frac{(\tau\omega)^2}{20}\right]<\operatorname{Re}\left(\frac{\Delta_2}{\tau}\right)<\frac{(\tau\omega)^2}{6},\\&\left|\frac{(\tau\omega)^3}{24}\right|\left[1-\frac{(\tau\omega)^2}{30}\right]<\operatorname{Im}\left(\frac{\Delta_2}{\tau}\right)<\left|\frac{(\tau\omega)^3}{24}\right|.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Из сравнения выражений (3) и (4) следует, что при $|\tau\omega|<3$ максимальные значения $\operatorname{Re}(\Delta_1)$ и $\operatorname{Im}(\Delta_1)$ меньше минимальных значений $\operatorname{Re}(\Delta_2)$ и $\operatorname{Im}(\Delta_2)$ соответственно, т. е. $|\Delta_1|<|\Delta_2|$.

Если в рабочем диапазоне частот исследуемой системы выполняется неравенство $|\tau\omega|<3$, то точность предлагаемого представления функции $W(p)$ выше, чем при использовании функции $W''(p)$. При уменьшении предельного значения $|\tau\omega|$ погрешность (3) резко уменьшается.

Список литературы: 1. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. М., Наука, 1966. 540 с.

I. I. Waskovsky

ZUR APPROXIMATION VON ÜBERTRAGUNGSFUNKTION VOM GLIED MIT LAUFZEIT

Es wird die Approximation von Übertragungsfunktion vom Glied mit Laufzeit gescrieben. Der Fehler von Approximation wird eingeschützt.