УДК 62—5:519.25

В. Д. ВОЛКОВ, В. А. НИКИТИН, инженеры,
В. И. ПРАВДА, канд. техн. наук

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ

Теория линейной фильтрации процессов без последействия разработана наиболее полно [1—4]. Однако для решения прикладных задач в ряде случаев учет последействия приводит к более простым конечным результатам, так как исключается избыточность информации и понижается размерность дифференциальных уравнений [5—7].

Рассмотрим задачу оптимальной фильтрации по критерию минимума среднеквадратической ошибки (СКО) процесса $x(t)$, удовлетворяющего линейному стохастическому дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_2[(d^2x)/(dt^2)] + a_1[(dx)/(dt)] + x = \xi(t), \tag{1}$$

где $\langle \xi \rangle = 0$; $\langle \xi\xi_\tau \rangle = N_\xi \delta(\tau)$. Пусть наблюдается сигнал $r(t) = x(t) + n(t)$, где $\langle n \rangle = 0$; $\langle nn_\tau \rangle = N_n \delta(\tau)$.

Используя результаты работ [5—7], найдем уравнение для одномерной апостериорной плотности распределения вероятностей $W(x, t)$, которое можно записать в виде

$$\left[a_2 \frac{\partial}{(\partial t)} + a_1\right] \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}[xW] + \sigma_x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} +$$
$$+ \left[a_2 \frac{\partial}{\partial t} + a_1\right] N_n^{-1} \left\{\left[r(t)\langle x \rangle - \frac{\langle x^2 \rangle}{2}\right] W(x, t) + W(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \left[r(t)x - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{x^2}{2}\right] W(x, t)\,dx\right\}, \quad -\infty < x < \infty, \; 0 < t < \infty, \tag{2}$$

где $\sigma_x^2 = N_\xi / 2a_1$ — дисперсия процесса $x(t)$, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (1).

Используя стандартную методику, перейдем от уравнения для $W(x, t)$ к системе уравнений для одномерных апостериорных моментов $\langle x \rangle$ и $\langle \tilde{x}^2 \rangle$

$$\left[a_2 \frac{d}{dt} + a_1\right] \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -\langle x \rangle + \left[a_2 \frac{d}{dt} + a_1\right] \frac{\langle \tilde{x}^2 \rangle}{N_n} [r(t) - \langle x \rangle], \quad (3)$$

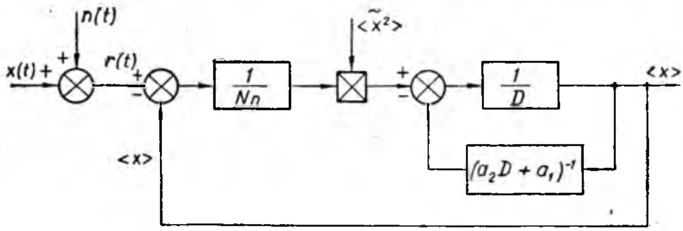

Рис. 1. Алгоритмическая схема системы оптимальной фильтрации, соответствующая уравнению (3)

$$\frac{1}{2}\left[a_2 \frac{d}{dt} + a_1\right] \frac{d\langle \tilde{x}^2 \rangle}{dt} = -\langle \tilde{x}^2 \rangle + \sigma_x^2 - \left(a_2 \frac{d}{dt} + a_1\right) \frac{\langle \tilde{x}^2 \rangle^2}{2N_n}, \quad (4)$$

где $\tilde{x} = x - \langle x \rangle$.

Так как процесс $x(t)$ подчиняется линейному стохастическому дифференциальному уравнению, то имеет место естественное замыкание системы дифференциальных уравнений для моментов на первых двух моментах $\langle x \rangle$ и $\langle \tilde{x}^2 \rangle$.

Алгоритмическая схема системы оптимальной фильтрации, соответствующая уравнению (3), приведена на рис. 1. Для определения оптимального коэффициента усиления $K_{\text{опт}} = (a_1 \langle \tilde{x}^2 \rangle)/N_n$ можно использовать схему, моделирующую решение уравнения (4) и позволяющую найти $\langle \tilde{x}^2 \rangle$ (рис. 2).

Из уравнения (4) можно определить установившееся значение апостериорной дисперсии ошибки оптимальной системы, полагая $t \to \infty$,

$$a_1 \langle \tilde{x}^2 \rangle^2 + 2N_n \langle \tilde{x}^2 \rangle - 2N_n \sigma_x^2 = 0. \quad (5)$$

Решая (5), находим установившееся значение $\langle \tilde{x}^2 \rangle$

$$\langle \tilde{x}^2 \rangle = \frac{1}{a_1} [\sqrt{N_n^2 + 2N_n \sigma_x^2 a_1} - N_n]. \quad (6)$$

Так как в рассматриваемом случае $\sigma_x^2 = N_\xi / 2a_1$, то из (6) следует

$$\langle \tilde{x}^2 \rangle = N_n / a_1 [\sqrt{1 + N_\xi / N_n} - 1]. \quad (7)$$

Оптимальный коэффициент усиления системы может быть найден из выражения

$$K_{опт} = (a_1 \langle \tilde{x}^2 \rangle)/N_n = [\sqrt{1 + N_\xi/N_n} - 1]. \qquad (8)$$

Таким образом, соотношение (8) характеризует установившееся значение коэффициента усиления оптимальной системы фильтрации сигнала $x(t)$, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (1) и наблюдается на фоне белого шума.

Из сопоставления результатов, приведенных в статье, с известными результатами по теории оптимальной фильтрации

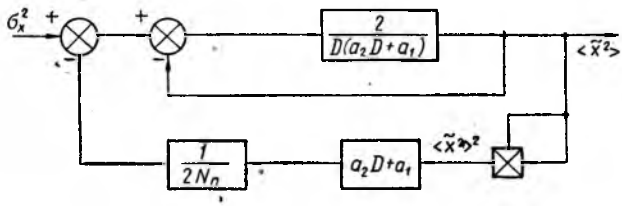

Рис. 2. Алгоритмическая схема, моделирующая решение уравнения (4)

следует, что наблюдается снижение размерности вектора состояния. Вместо решения матричного уравнения Риккати для вторых моментов необходимо решать единственное уравнение второго порядка для $\langle \tilde{x}^2 \rangle$. Это существенным образом упрощает практическое использование результатов, полученных при решении задачи оптимальной фильтрации.

Список литературы: 1. *Александров Ю. А., Янцевич А. А.* О некоторых классах случайных процессов с последействием.— Вести. Харьк. ун-та. Серия мех.-мат., 1970, вып. 34, № 53, с. 139—157. 2. *Александров Ю. А. Янцевич А. А.* Оптимальная фильтрация сигналов и управление линейными объектами.— Вести. Харьк. ун-та, Сер. мех.—мат., 1971, вып. 35, № 66, с. 79—98. 3. *Александров Ю. А.,Янцевич А. А.* Случайные процессы с последействием и некоторые их приложения. Оптимальное обнаружение, фильтрация и управление.— Вестн. Харьк. ун-та. Сер. мех.-мат., 1971, вып. 35, № 66, с. 60—93. 4. *Линцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М., Наука, 1974. 480 с. 5. *Медич Дж.* Статистически оптимальные линейные оценки и управление. Пер. с англ. М., Энергия, 1973. 440 с. 6. *Стратонович Р. Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. Изд-во Моск. ун-та, 1966. 319 с. 7. *Тихонов В. И., Кульман Н. К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М., Сов. радио, 1975. 704 с.

V. D. Volkov, V. A. Nikitin, V. I. Pravda

OPTIMAL FILTERING OF RANDOM PROCESS SETTLING ACCOUNTS WITH POSTACTION

Optimal filtering problem solution according to the minimum of mean-square error of the process satisfying random differential equation of the second order with constant coefficients is presented.